

fillnegative の保存性の検証

雲密度に対する穴埋めを行なう関数 FillNegativeMMC 中の式を書き下すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 QSUMPN(i, k) = & 1.0 / \\
 & \{0.75 * [max(0.0, \rho_s(i-1, k)) \\
 & + max(0.0, \rho_s(i+1, k)) \\
 & + max(0.0, \rho_s(i, k-1)) \\
 & + max(0.0, \rho_s(i, k+1))] \\
 & + 0.25 * [max(0.0, \rho_s(i-2, k)) \\
 & + max(0.0, \rho_s(i+2, k)) \\
 & + max(0.0, \rho_s(i, k-2)) \\
 & + max(0.0, \rho_s(i, k+2))]\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DQFILL(i, k) = & -min(0.0, \rho_s(i, k)) \\
 & + max(0.0, \rho_s(i, k)) \\
 & * \{0.75 * [min(0.0, \rho_s(i-1, k)) * QSUMPN(i-1, k) \\
 & + min(0.0, \rho_s(i+1, k)) * QSUMPN(i+1, k) \\
 & + min(0.0, \rho_s(i, k-1)) * QSUMPN(i, k-1) \\
 & + min(0.0, \rho_s(i, k+1)) * QSUMPN(i, k+1)] \\
 & + 0.25 * [min(0.0, \rho_s(i-2, k)) * QSUMPN(i-2, k) \\
 & + min(0.0, \rho_s(i+2, k)) * QSUMPN(i+2, k) \\
 & + min(0.0, \rho_s(i, k-2)) * QSUMPN(i, k-2) \\
 & + min(0.0, \rho_s(i, k+2)) * QSUMPN(i, k+2)]\} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_s(i, k) = \rho_s(i, k) + DQFILL(i, k). \quad (3)$$

但し、 ρ_s は穴埋め前の雲密度、 $\hat{\rho}_s$ は穴埋め後の雲密度、 $DQFILL(i, k)$ は穴埋めする量である。例えばある一点のみで雲密度が負となった場合、この関数は負の点がゼロとなるように隣接する点と2つ隣の点から雲を削って埋める。その際、隣接する各点は埋める量全体の3/16を負担し、2つ隣の各点は埋める量全体の1/16を負担する。

簡単のため、ある一点 $(i, k) = (M, N)$ のみ穴埋め前の雲密度が負である場合に、穴埋め前後での全雲質量が保存されることを示す。ある一点 $(i, k) = (M, N)$ のみ穴埋め前の雲密度が負であるとき、(1), (2) より $(i, k) = (M-2, N), (M-1, N), (M, N), (M+1, N), (M+2, N), (M, N-2), (M, N-1), (M, N+1), (M, N+2)$ 以外の点では

$DQFILL(i, k) = 0$ となる. 以上の 9 点での $DQFILL(i, k)$ を書き下すと,

$$DQFILL(M - 2, N) = 0.25 * \rho_s(M - 2, N)\rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N), \quad (4)$$

$$DQFILL(M - 1, N) = 0.75 * \rho_s(M - 1, N)\rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N), \quad (5)$$

$$DQFILL(M, N) = -\rho_s(M, N) \quad (6)$$

$$DQFILL(M + 1, N) = 0.75 * \rho_s(M + 1, N)\rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N), \quad (7)$$

$$DQFILL(M + 2, N) = 0.25 * \rho_s(M + 2, N)\rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N), \quad (8)$$

$$DQFILL(M, N - 2) = 0.25 * \rho_s(M, N - 2)\rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N), \quad (9)$$

$$DQFILL(M, N - 1) = 0.75 * \rho_s(M, N - 1)\rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N), \quad (10)$$

$$DQFILL(M, N + 1) = 0.75 * \rho_s(M, N + 1)\rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N), \quad (11)$$

$$DQFILL(M, N + 2) = 0.25 * \rho_s(M, N + 2)\rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N), \quad (12)$$

となる. 但し

$$\begin{aligned} QSUMP_N(M, N) = & \{0.75 * [\rho_s(M - 1, N) + \rho_s(M + 1, N) \\ & + \rho_s(M, N - 1) + \rho_s(M, N + 1)] \\ & + 0.25 * [\rho_s(M - 2, N) + \rho_s(M + 2, N) \\ & + \rho_s(M, N - 2) + \rho_s(M, N + 2)]\}^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

である. 従って

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_k \hat{\rho}_s(i, k) &= \sum_i \sum_k [\rho_s(i, k) + DQFILL(i, k)] \\
&= \sum_i \sum_k \rho_s(i, k) \\
&\quad + DQFILL(M-2, N) + DQFILL(M-1, N) \\
&\quad + DQFILL(M, N) + DQFILL(M+1, N) \\
&\quad + DQFILL(M+2, N) + DQFILL(M, N-2) \\
&\quad + DQFILL(M, N-1) + DQFILL(M, N+1) \\
&\quad + DQFILL(M, N+2) \\
&= \sum_i \sum_k \rho_s(i, k) - \rho_s(M, N) \\
&\quad + \rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N) \\
&\quad \{0.75 * [\rho_s(M-1, N) + \rho_s(M+1, N) \\
&\quad + \rho_s(M, N+1) + \rho_s(M, N-1)] \\
&\quad + 0.25 * [\rho_s(M-2, N) + \rho_s(M+2, N) \\
&\quad + \rho_s(M, N+2) + \rho_s(M, N-2)]\} \\
&= \sum_i \sum_k \rho_s(i, k) - \rho_s(M, N) \\
&\quad + \rho_s(M, N) * QSUMP_N(M, N) * QSUMP_N(M, N)^{-1} \\
&= \sum_i \sum_k \rho_s(i, k) \tag{14}
\end{aligned}$$

となるので, 穴埋め前後での質量は相等しい.

同様に雲密度が負である点が複数ある場合についても, 穴埋め前後で質量は保存されると考えられる.