

連続モードの出現に着目した 回転球面上の2次元磁気流体波動の解析

中島 涼輔[†]

[†]九州大学 大学院理学研究院

GFD オンラインセミナー (第3回)
2020年12月7日

^{*1}非キャッチーな内容にも関わらず、お集まりいただきありがとうございます。

少し自己紹介

なかしま りょうすけ
中島 涼輔

- 九州大学 大学院理学研究院 学術研究員
- 昨年度, 九州大学 理学府 地球惑星科学専攻で (なんとか) 博士号取得 【指導教員: 吉田 茂生 先生】
- 今回は, 博士論文の内容の一部をお話します
- 現在は, 九大理学部の仕事 (広報) をしつつ, ポスドクをするという謎な身分をしている
 - 九大理学部の HP (<https://www.sci.kyushu-u.ac.jp>) 編集
 - 九大理学部ニュース (<https://www.sci.kyushu-u.ac.jp/koho/qrnews/>) の取材・編集・執筆依頼



フォロー

九大理学部ニュース

@qrnews

九州大学理学部から最新の研究成果を発信するサイト「九大理学部ニュース」の更新情報をお知らせします。たまにきゅうりくん (きゅうりくん) もつぶやきます。きゅうりくんのつぶやきには[さゆ]ってついています。

📍 福岡県福岡市西区元岡744番地 🌐 [sci.kyushu-u.ac.jp/koho/qrnews/](https://www.sci.kyushu-u.ac.jp/koho/qrnews/)

📅 2010年5月からTwitterを利用しています

九大理学部ニュース



九大理学部内でも知名度が低い
マスコットキャラクター きゅうりくん

① はじめに

- 研究背景
- 類似の研究

② 前提知識 (+研究の目的)

- 回転系の磁気流体波動
- 連続モードとは

③ 理想 MHD (磁気拡散なし)

- 基礎方程式
- 結果
- まとめ (1)

④ 非理想 MHD (磁気拡散あり)

- 基礎方程式
- 結果
- まとめ (2)

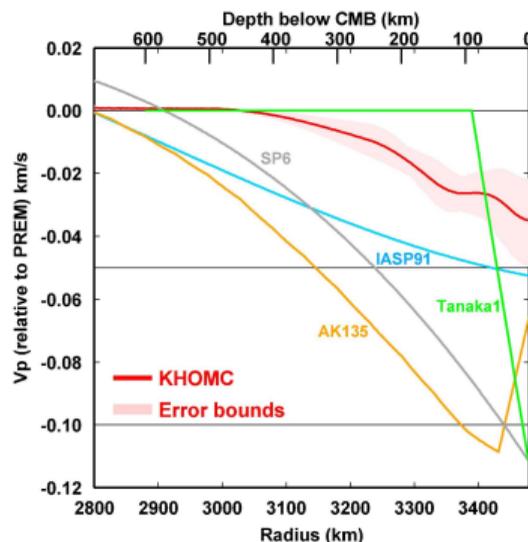
研究背景

地球外核最上部の安定成層

- 地震学的な研究により検出されたかも
 - 地震波速度によると、
コア最上部はあまり混合されていない？
(e.g. Helffrich & Kaneshima, 2010 [15]; van Tent *et al.*, 2020 [27])
 - グローバルに存在？ 厚さ数百 km？
 - 熱起源？ 組成起源？
 - (自由振動によると) ないかも？ (Irving *et al.*, 2018 [18])

地磁気変動への影響 (もし安定成層があれば)

- 成層内は、外核深部の流れ (対流) とは様子が異なる
 - 成層内を伝播する流体波動が存在可能
- 波動伝播の様子が地磁気変動の観測から見えるかも
- 逆に地磁気変動から、安定成層を制約 (e.g. Buffett, 2014 [2])



地球外核最上部の
P 波速度構造
Kaneshima (2018) [20]

安定成層内の波動を考えるための問題設定

自転する球体に張りついた薄い磁気流体の層

- 地球外核の半径 (3480 km) \gg 成層の厚さ (数百 km)
- 磁気流体 (MHD) の式 + 水平 2 次元

波動伝播

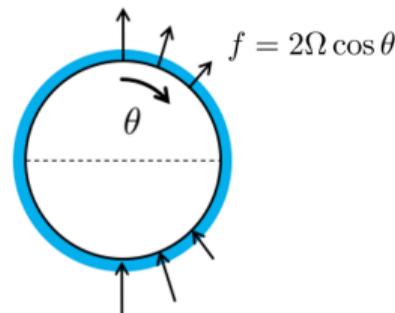
- 波よりも長い時間スケールの現象 (ダイナモ) の平均的な解を基本場として線形化したい
- 基本場も真面目にすると難しいので,

$$\text{速度場: } U_0 = 0, \quad \text{磁場: } B_0 = B_{0\phi}(\theta)\hat{e}_\phi$$

など, とても簡単で理想化された設定をつかう (θ : 余緯度, ϕ : 経度)

- 鉛直磁場 $B_{0r}(\theta)$ を背景場として使う研究もある

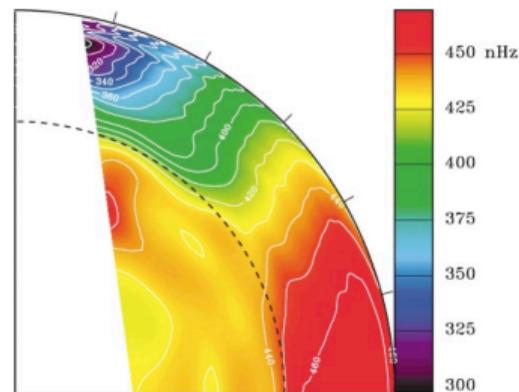
(e.g. Buffett *et al.*, 2016 [3]; Buffett & Matsui, 2019) [4])



類似の研究 (太陽タコクライン)

太陽内部のタコクライン

- 対流層 (上) と放射層 (下) の間
- 強い南北シアー (差動回転) が存在
- Ω 効果で強いトロイダル磁場 $B_{0\phi}(\theta)$ あり
- トロイダル磁場入り シアー不安定の線形安定性解析
 - 様々な背景流 $U_{0\phi}(\theta)$ ・ 背景磁場 $B_{0\phi}(\theta)$ プロファイル
 - 水平 2 次元 (理想 or 非理想 MHD) の例:
Gilman & Fox (1997 [12], 1999a [13], b [14]),
Dikpati & Gilman (1999) [9], Gilman & Dikpati (2000) [11],
Dikpati *et al.* (2004) [8], Sharif & Jones (2005) [23]



太陽内部の自転角速度分布
Thompson *et al.*(2003) [25]

類似の研究 (線形波動 vs 線形安定性解析)

- 以下, Fourier 変換 $e^{i(m\phi - \omega t)}$ (ω : 角振動数 = 固有値)

同様の系での線形波動

- 基本場: $U_0 = 0, B_0 = B_0 \sin \theta \hat{e}_\phi$ (B_0 は定数)
Zaqarashvili *et al.* (2007) [28], Márquez-Artavia *et al.* (2017) [22] (※ MHD 浅水系)
 - これ**以外**の基本場を採用すると, 線形波動の問題が難しくなる
- $U_0 = 0, B_0 = B_0 \sin \theta \hat{e}_\phi$ **以外**の基本場の場合
 - **実数の連続固有値 (連続モード, 位相混合)** の出現 【後述】
 - 知りたい「線形波動」は, **実数の離散固有値**
 - ▷ 連続モードに埋もれて, どこにあるか分からなくなってしまう
 - 不安定モードは一般に, **複素数の離散固有値**
 - ▷ 連続モードに埋もれていても, 虚部 $\neq 0$ を探せばいいので, 線形安定性解析では, それほど問題にならない
 - ▷ ただし, 不安定の発生を波の共鳴として理解するときは, 連続モードも重要 (e.g. Iga, 2013 [17])

1 はじめに

- 研究背景
- 類似の研究

2 前提知識 (+研究の目的)

- 回転系の磁気流体波動
- 連続モードとは

3 理想 MHD (磁気拡散なし)

- 基礎方程式
- 結果
- まとめ (1)

4 非理想 MHD (磁気拡散あり)

- 基礎方程式
- 結果
- まとめ (2)

回転系の磁気流体波動

説明のために f 平面で, 簡単な背景場 ($U_0 = 0, B_0$ が一様) の場合を考える

理想 MHD ($\eta = 0$, 電気伝導度 ∞) の摂動方程式: $U = U_0 + u, B = B_0 + b$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(p + \frac{B_0 \cdot \mathbf{b}}{\mu_m} \right) + \frac{(B_0 \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu_m}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta_m \nabla^2 \mathbf{b}$$

波数ベクトルを k とすると,

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u} \approx 0 \quad \dots$ **慣性波**: $\omega_{\text{Inertial}} = f k_z / |\mathbf{k}|$
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx \frac{(B_0 \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu_m}$ & $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \dots$ **Alfvén 波**: $\omega_{\text{Alfvén}} = (B_0 \cdot \mathbf{k}) / \sqrt{\rho_0 \mu_m}$
- $f \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u} \approx \frac{(B_0 \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu_m}$ & $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \dots$ **MC 波**: $\omega_{\text{MC}} = \omega_{\text{Alfvén}}^2 / \omega_{\text{Inertial}}$

Coriolis 力と Lorentz 力がバランス (慣性項が効かない), MC = Magnetic-Coriolis

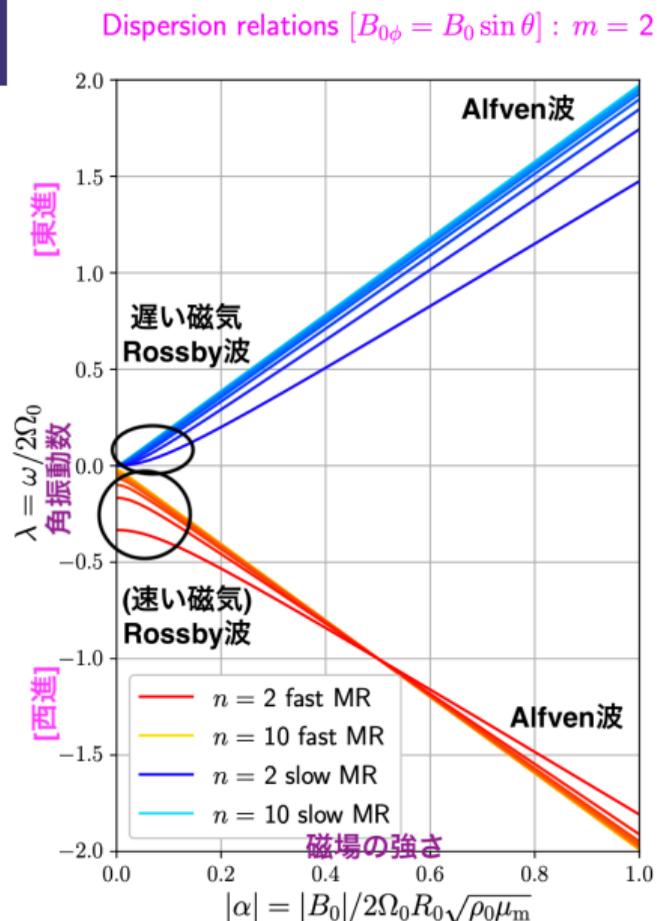
回転系の磁気流体波動 (β 面, 球面)

β 平面の場合

- β 効果と Lorentz 力がバランス
→ 遅い磁気 Rossby 波 (MC Rossby 波)
$$\omega_{\text{MCRossby}} = -\omega_{\text{Alfvén}}^2 / \omega_{\text{Rossby}}$$
- 速い磁気 Rossby 波 (普通の Rossby 波) と遅い磁気 Rossby 波がペアで現れる
- 速い/遅いで、位相速度の向きは東西逆

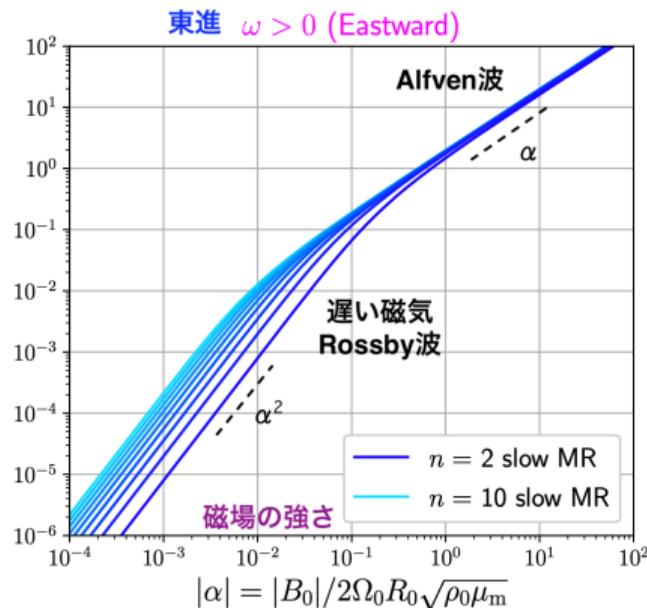
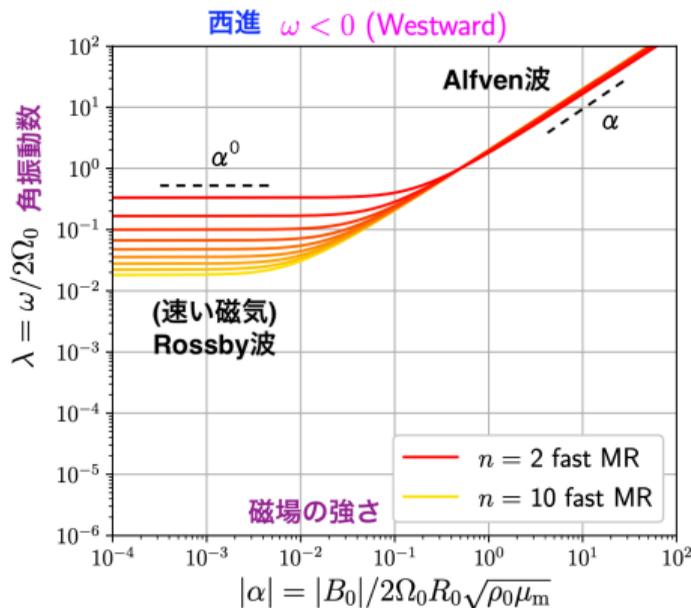
2次元球面の場合

- 基本場: $U_0 = 0, B_0 = B_0 \sin \theta \hat{e}_\phi$
(連続モードが現れない場合)
右図は、東西波数 $m = 2$ での分散関係
- 磁場が強いと、回転の影響は小さくなり、2つの Rossby 波は Alfvén 波になる



回転系の磁気流体波動 (球面) つづき

Dispersion relations [$B_{0\phi} = B_0 \sin \theta$] : $m = 2$



$$(\text{流線関数}) \propto \mathcal{P}_n^m(\theta) e^{i(m\phi - \omega t)}, \quad \lambda = \frac{-m \pm m \sqrt{1 + 4\alpha^2 n(n+1)[n(n+1) - 2]}}{2n(n+1)}$$

"遅い波の近似"

地磁気変動と関係づけたいときは、**遅い波**を考える

- マントルは、ほんの少し電気を通すので、コアからの速い磁場のシグナルは遮蔽される
- コア内の**年スケールの変化**だけが、地上で地磁気変動として観測できる (と言われている)
- 特に、MC 波や遅い磁気 Rossby 波 (e.g. Hide (1966) [16]: 西方移動^{*1})

"遅い波の近似"

- **慣性項を無視して MC 波 or 遅い磁気 Rossby 波だけを残す近似**
- 式の上では、 $\omega^2 \ll \omega_{\text{Alfvén}}^2 = (B_0 \cdot k)^2 / \rho_0 \mu_m$ の時に適切な近似だが、背景磁場 B_0 が空間変化して**局所的に $B_0 = 0$** のときでも、たまに用いられている

*1

	薄層	分厚い層 (Taylor 柱)
(速い磁気) Rossby 波	西進	東進
遅い磁気 Rossby 波	東進	西進

研究の目的 (1)

- ★ **【最終目標 (当初の目標)】 離散モードを見つけたい**
→ 地球外核 / 地磁気変動の研究へ
- ★ 実際の地球コアにより近い背景磁場分布で解きたい
 - さすがに, $B_{0\phi} = B_0 \sin \theta$ は簡単すぎる?
 - せめて**赤道反対称**, $B_{0\phi} = B_0 \sin \theta \cos \theta$ とか
 - そうすると, 連続モードが現れる

(1) 後述するが, 連続モードが出現するとき, $\omega^2 \approx \omega_{\text{Alfvén}}^2 = (B_0 \cdot k)^2 / \rho_0 \mu_m$ となりうる
さらに, $B_{0\phi} = B_0 \sin \theta \cos \theta$ のとき, 赤道上で $\omega_{\text{Alfvén}}^2 = 0$
このとき, "遅い波の近似"は適切なのかわ不明

"遅い波の近似"なしで、2次元回転球面の理想 MHD (磁気拡散なし) の問題を解く

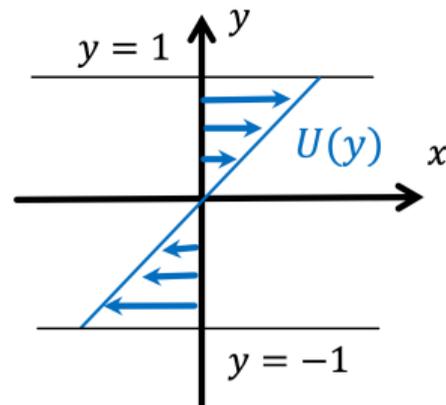
平行シア一流中の連続モード

Rayleigh 方程式 : 2次元平行シア一流を記述

$\zeta =$ 渦度, $\psi =$ 流線関数

$$\left(U(y) - \frac{\omega}{k_x} \right) \zeta + \frac{d^2 U(y)}{dy^2} \psi = 0, \quad \zeta = -\nabla^2 \psi$$

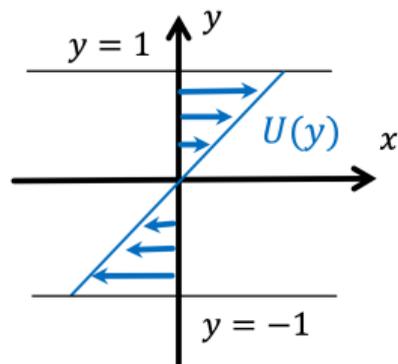
- 微分の最高階の係数が 0 になる
($U(y) = \omega/k_x$ となる) $y = y_c$ で**確定特異点** (臨界層)
確定特異点の位置が, 角振動数 ω に依存する
- 線形シア一流 (Couette 流) : $U(y) = U'y$ (U' は定数) を考えると, 境界条件にあう**離散モードが存在しない**
(e.g. Case, 1960 [5]; Balmforth & Morrison, 1995 [1])
- 任意の初期値の時間発展を表現するには, **連続モードが必要**
離散モードと連続モードを合わせて完全系



平行シア一流中の連続モード (Couette 流)

線形シア一流 (Couette 流) : $U(y) = U'y$ (U' は定数), 境界 $y = \pm 1$

$$\left(U'y - \frac{\omega}{k_x} \right) \zeta + \frac{d^2(U'y)}{dy^2} \psi = 0, \quad \zeta = -\nabla^2 \psi$$



- 確定特異点 $U'y_c = \omega/k_x$
- 解は, $\zeta = 0$ or $\zeta = \Lambda(y_c)\delta(y - y_c)$ (Λ は任意関数)
- 時間 Fourier 逆変換すると, $\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(y_c)\delta(y - y_c)e^{-iU'y_c k_x t} d\underbrace{(U'y_c k_x)}_{=\omega}$

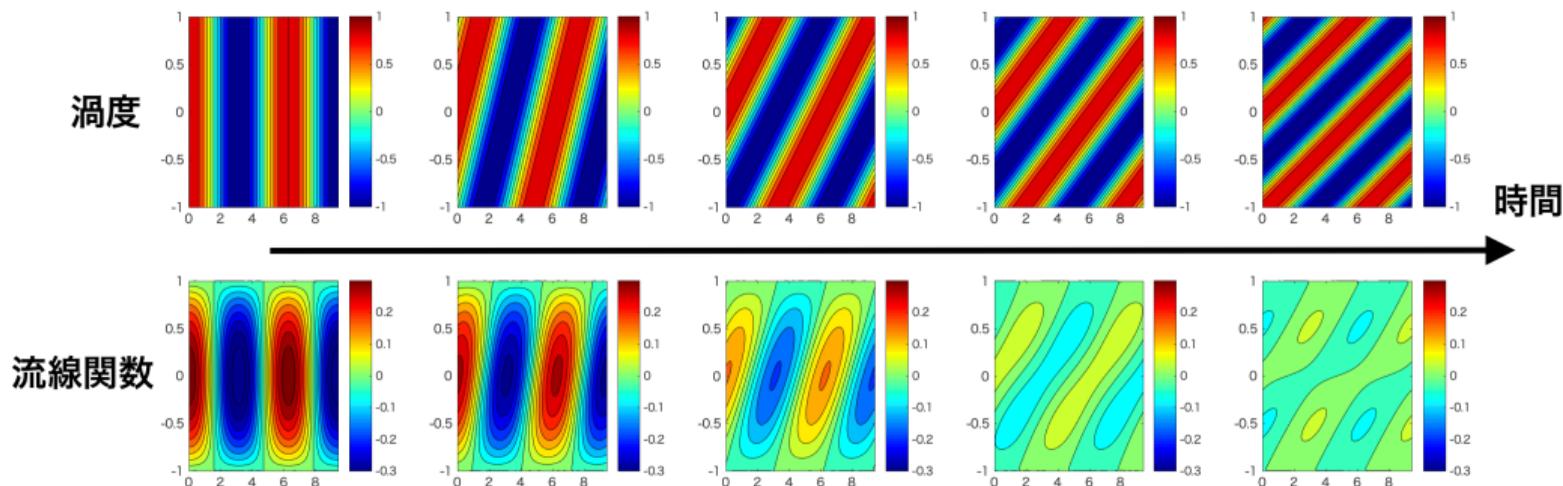
$\implies \zeta \sim e^{iU'y_c k_x t}$ というように, 座標 y に依存する時間依存性を持つ

- 流線関数は, $\psi = -\nabla^{-2}\zeta = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(y, \tilde{y})\zeta(\tilde{y})d\tilde{y}$ なので, 時間 t の負の幂で減衰する (位相混合)

平行シア一流中の連続モード (Couette 流)

渦度分布の初期値が簡単な場合は手で解ける

- 渦度擾動 ζ が, 背景流 $U(y) = U'y$ にただ流されるだけ
- このふるまいは, (領域全体で同一の位相速度を持つ) **離散モードでは表せない**
- 運動エネルギーを背景場に捨てて, 流線関数は減衰?



平行シア一流中の連続モード

Laplace 変換による理解 (一般の背景流速分布)

- 確定特異点まわりの Frobenius 級数解 (e.g. Lin, 1961 [21])

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (y - y_c)^k$$

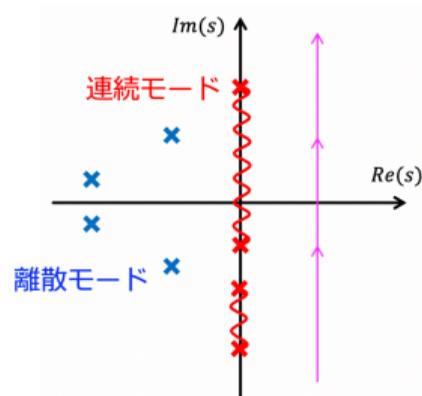
$$\psi_2 = \frac{(d^2U/dy^2)|_{y=y_c}}{(dU/dy)|_{y=y_c}} \psi_1 \ln(y - y_c) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (y - y_c)^k$$

- Green 関数は, (φ_i は一方の B.C. を満たす解, \mathcal{W} はロンスキアン, \mathcal{H} はステップ関数)

$$\mathcal{K}(y, \tilde{y}) = \frac{\varphi_1(y)\varphi_2(\tilde{y})}{\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2)} \mathcal{H}(\tilde{y} - y) + \frac{\varphi_1(\tilde{y})\varphi_2(y)}{\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2)} \mathcal{H}(y - \tilde{y})$$

なので, 流線関数 ψ の Laplace 逆変換を行うときに,

- 極 $\mathcal{W} = 0$ から離散モード
- 分子の $\varphi_i (= C_1\psi_1 + C_2\psi_2)$ から \log 型の特異性が現れ, cut まわりの寄与から, 連続モード (を積分で足し合わせたもの)



位相混合 (phase mixing) いろいろ

連続モード・位相混合は様々な問題で現れる

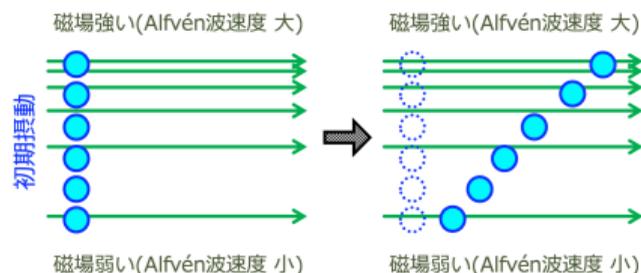
- シア一流
- 無衝突プラズマ (Vlasov 方程式) (e.g. Van Kampen, 1955 [26]; Case, 1959 [6])
 - 速度が速い粒子たちは速く進み, 速度が遅い粒子たちは遅く進む

- 背景磁場 B_0 の勾配がある場合の Alfvén 波

- Alfvén 波は磁力線に沿って伝わる
- 位相速度は, 局所的な磁場強度に依存

△ (Ekman 数 $\rightarrow 0$ の) 回転球殻対流の線形安定性解析

- 円筒動径方向 ($\partial/\partial s$) のオーダリングを間違えると, 求まる臨界モードの東西位相速度が s に依存してしまう (e.g. Soward, 1977 [24])
- Jones *et al.* (2000) [19], Dormy *et al.* (2004) [10] の方法を使うと, 位相混合起きない



Alfvén 連続モード

球面上の Alfvén 波の場合

- $U_0 = 0, B_0 = B_0 \sin \theta \hat{e}_\phi$ のとき, 連続モードなし

▷ 余緯度 $\theta = \theta_0$ での Alfvén 波の東西位相速度: $c = \frac{\omega}{m/R_0} = \frac{B_0 \sin \theta_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_m}}$

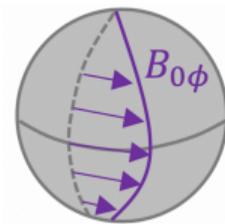
▷ 余緯度 $\theta = \theta_0$ で, ϕ 方向に $\Delta\phi$ だけ進む距離: $L = \Delta\phi R_0 \sin \theta_0$

▷ L だけ進むのにかかる時間 L/c は
 θ_0 に依存しないので, 位相混合起こらず

- **それ以外の全ての背景場では, 連続モードが存在**
 一般に, 臨界(余)緯度 $\theta = \theta_c$ は以下を満たす^{*1}

$$\underbrace{\left(U_{0\phi}(\theta_c) - \frac{\omega}{m/R_0} \right)^2}_{=0 \text{ が平行シア一流の連続モードに対応}} = \left(\frac{B_{0\phi}(\theta_c)/\sqrt{\rho_0 \mu_m}}{\sin \theta_c} \right)^2$$

▷ 2乗になっているのは, Alfvén 波が磁力線の順方向と逆方向の両方に伝播するため



$$B_{0\phi} = B_0 \sin \theta$$

^{*1} 回転系ではなく慣性系で考えるときは, $U_{0\phi} = \Omega_0 R_0 \sin \theta$ が剛体回転なので, $U_{0\phi}(\theta_c)$ を $\sin \theta_c$ で割る

研究の目的 (2)

(1) "遅い波の近似"なしで、2次元回転球面の理想 MHD (磁気拡散なし) の問題を解く

- 臨界緯度では、 $\omega^2 = \omega_{\text{Alfvén}}^2$ なので、"遅い波の近似"は適切なものか不明
- 特に、地磁気変動に関係しそうな"遅い波"は、 $B_0 \approx 0$ となる付近で臨界緯度をもつ
- シア一流の問題の類推から、連続モードは物理的に意味がありそうな解ではあるが、我々がイメージする"波"とは違うかもしれない
- 連続モードに埋もれた離散モードがあるかどうか頑張って探す



(2) 磁気拡散の効果を加えると (非理想 MHD),

微分の階数が増えて、(確定特異点なくなるので) 連続モードは消える

- 理想 MHD の問題との関係性は？

1 はじめに

- 研究背景
- 類似の研究

2 前提知識 (+研究の目的)

- 回転系の磁気流体波動
- 連続モードとは

3 理想 MHD (磁気拡散なし)

- 基礎方程式
- 結果
- まとめ (1)

4 非理想 MHD (磁気拡散あり)

- 基礎方程式
- 結果
- まとめ (2)

選んだ背景磁場と解くべき方程式 (理想 MHD)

背景磁場：赤道反対称な東西磁場 以下、 $\mu = \cos \theta$ とする

- $B_0 = B_0 \mathcal{B}(\theta) \sin \theta \hat{e}_\phi$ とする
特に、 $B_0 = B_0 \sin \theta \cos \theta \hat{e}_\phi$ ($\mathcal{B} = \mu$)

基礎方程式：運動方程式・誘導方程式

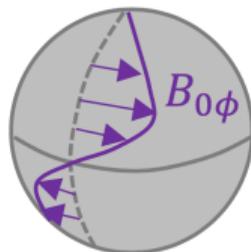
$\tilde{\Psi}_u =$ 流線関数, $\tilde{\Psi}_b =$ 磁場の流線関数, $\lambda = \omega/2\Omega_0$

$$(-\lambda \nabla_h^2 + m) \tilde{\Psi}_u = m\alpha \left\{ \mathcal{B} \nabla_h^2 - \frac{d^2}{d\mu^2} [\mathcal{B}(1 - \mu^2)] \right\} \tilde{\Psi}_b$$

$$(-\lambda + iE_\eta \nabla_h^2) \tilde{\Psi}_b = m\alpha \mathcal{B} \tilde{\Psi}_u$$

無次元パラメータ

- 磁場の強さ (Lehnert 数): $\alpha = \frac{B_0}{2\Omega_0 R_0 \sqrt{\rho_0 \mu_m}}$
- 磁気拡散の大きさ (磁気 Ekman 数): $E_\eta = \frac{\eta_\eta}{2\Omega_0 R_0^2} = 0$



$$B_{0\phi} = B_0 \sin \theta \cos \theta$$

解くべき方程式 (理想 MHD)

数値計算で解く場合

- 以下の式の $\tilde{\Psi}_u$ と $\tilde{\Psi}_b$ を Legendre 陪多項式で展開 (切断波数 1000 次)

$$\begin{aligned} (-\lambda \nabla_h^2 + m) \tilde{\Psi}_u &= m\alpha \left\{ \mu \nabla_h^2 - \frac{d^2}{d\mu^2} [\mu(1 - \mu^2)] \right\} \tilde{\Psi}_b \\ -\lambda \tilde{\Psi}_b &= m\alpha \mu \tilde{\Psi}_u \end{aligned}$$

- 固有値問題は, Python (Numpy) で計算 (一部, MATLAB を含む)

解析的に調べる場合

- 2 つの式を 1 つの微分方程式にまとめると,

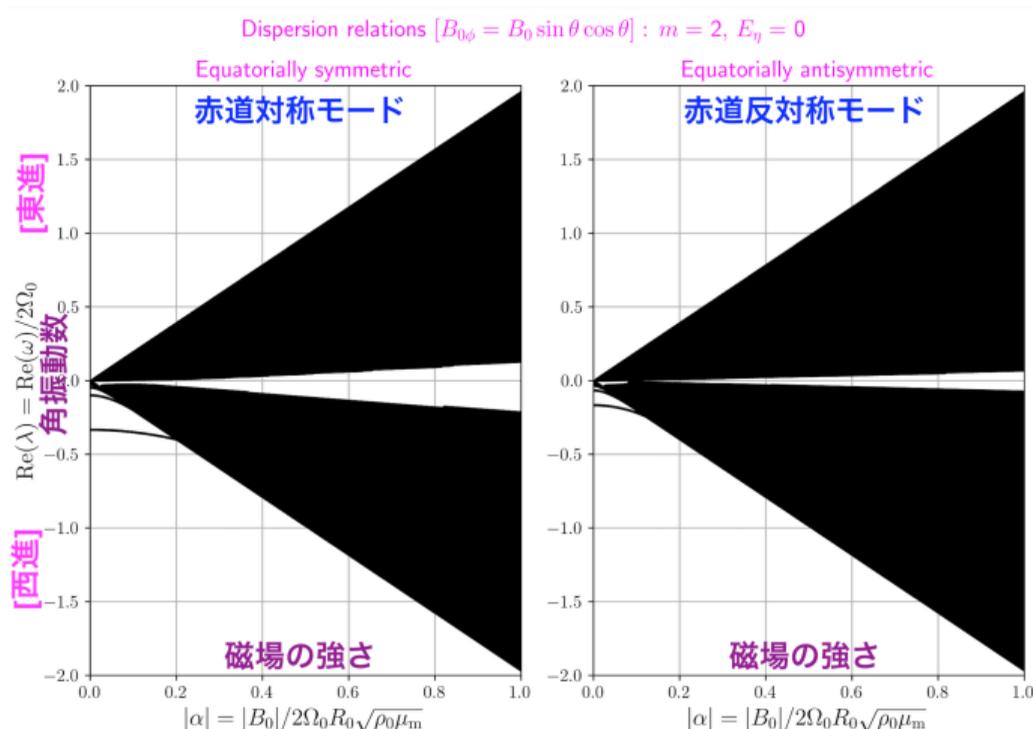
$$\frac{d}{d\mu} \left[(\lambda^2 - m^2 \alpha^2 \mathcal{B}^2) (1 - \mu^2) \frac{d\tilde{\Psi}_u}{d\mu} \right] - \left[\frac{m^2 (\lambda^2 - m^2 \alpha^2 \mathcal{B}^2)}{1 - \mu^2} + m \left(\lambda + 2m\alpha^2 \mathcal{B} \frac{d}{d\mu} (\mathcal{B}\mu) \right) \right] \tilde{\Psi}_u = 0$$

確定特異点 : $\lambda^2 = m^2 \alpha^2 [\mathcal{B}(\mu)]^2$ となる $\mu = \mu_c$ に臨界緯度

理想 MHD ($E_\eta = 0$) の場合の分散関係

東西波数 $m = 2$ の場合

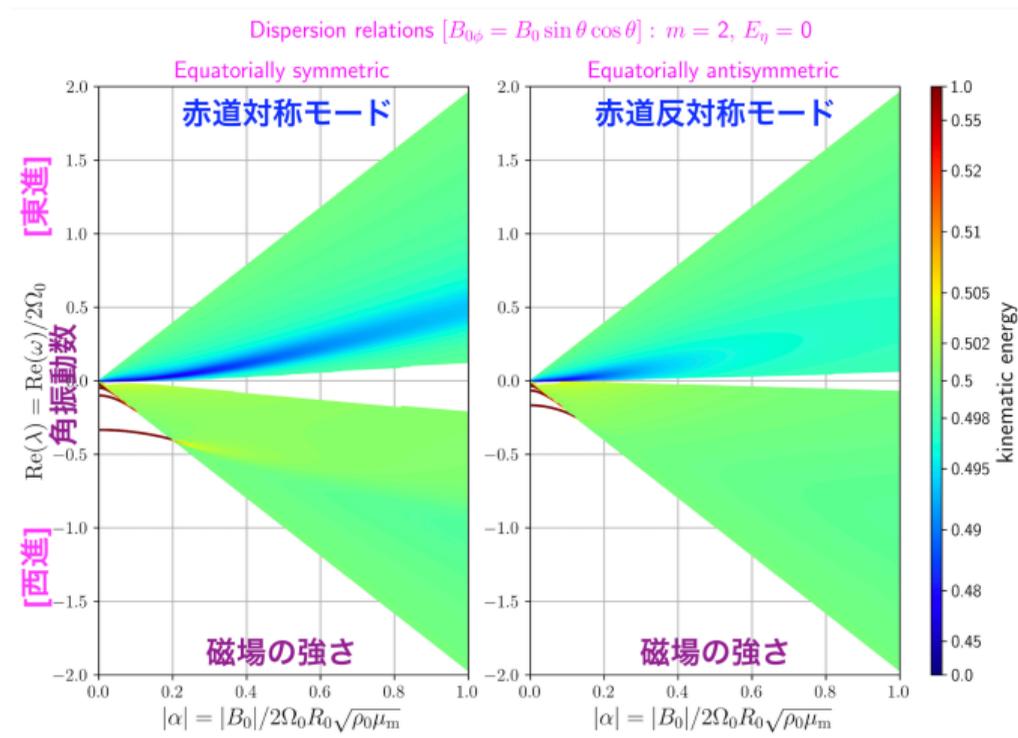
- 連続モードで埋めつくされて、埋もれた離散モードがあるのかどうか分からない
- ※ 中心の白抜き部分は、高次の展開係数の寄与が大きく、解が収束していないと判断したのでプロットしていない



理想 MHD ($E_\eta = 0$) の場合の分散関係

東西波数 $m = 2$ の場合

- (運動エネルギー) + (磁場エネルギー) = 1 で規格化
- 運動エネルギーの割合で色をつけてプロット
- 連続モードの大部分は運動エネルギー比 およそ 0.5 (Alfvén 波的)
- 遅い磁気 Rossby 波のブランチがあると予想される付近の連続モードは、運動エネルギーの割合が低い

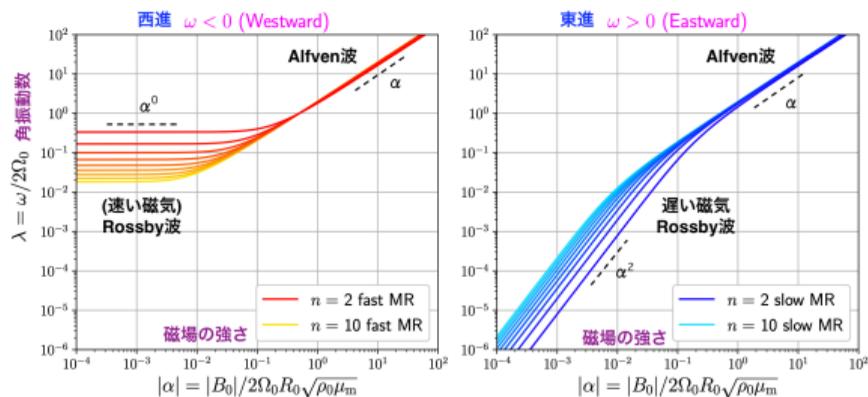


理想 MHD ($E_\eta = 0$) の場合の分散関係

連続モードがない場合との比較

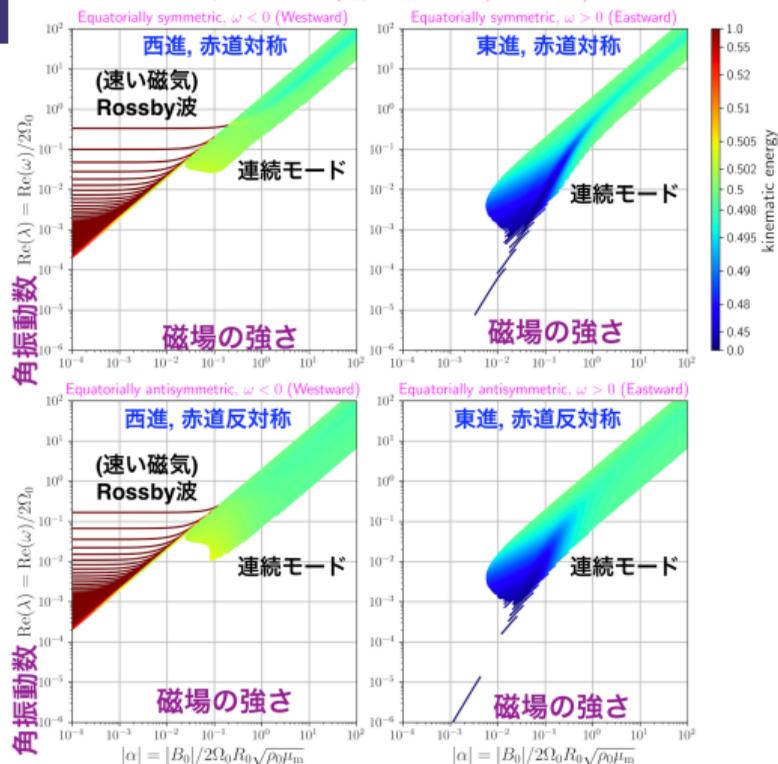
- 遅い磁気 Rossby 波に対応する
連続モードはない？

Dispersion relations [$B_{0\theta} = B_0 \sin \theta$] : $m = 2$



連続モードがない場合 : $B_0 = B_0 \sin \theta \hat{e}_\phi$

Dispersion relations [$B_{0\theta} = B_0 \sin \theta \cos \theta$] : $m = 2, E_\eta = 0$



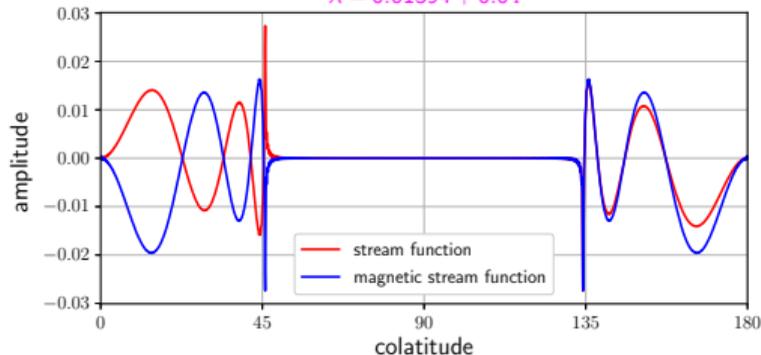
連続モードがある場合 : $B_0 = B_0 \sin \theta \cos \theta \hat{e}_\phi$

連続モードの固有関数

- 連続モードの固有関数は、臨界緯度で尖った構造を持つ
- 単体では、物理的に意味がなさそう

Eigenfunction [$B_{0\phi} = B_0 \sin \theta \cos \theta$] : $m = 2, \alpha = 0.01, E_\eta = 0$

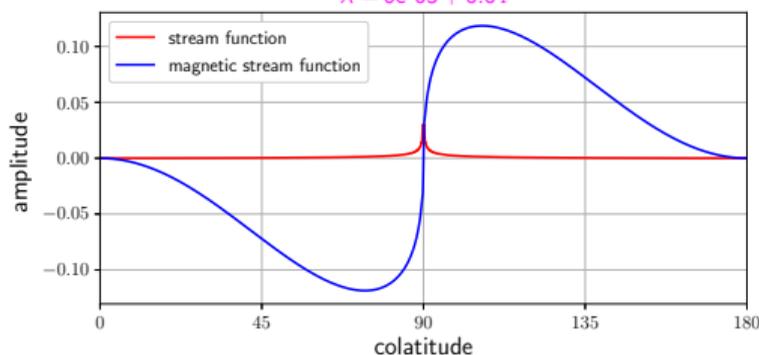
$\lambda = 0.01394 + 0.0i$



$$m = 2, \alpha = 0.01, \lambda = 1.3940 \times 10^{-2}$$

Eigenfunction [$B_{0\phi} = B_0 \sin \theta \cos \theta$] : $m = 2, \alpha = 0.01, E_\eta = 0$

$\lambda = 6e-05 + 0.0i$



$$m = 2, \alpha = 0.01, \lambda = 6.2818 \times 10^{-5}$$

連続モードの固有関数

確定特異点まわりの Frobenius 級数解

- 微分方程式

$$\frac{d}{d\mu} \left[(\lambda^2 - m^2 \alpha^2 \mathcal{B}^2)(1 - \mu^2) \frac{d\tilde{\Psi}_u}{d\mu} \right] - \left[\frac{m^2(\lambda^2 - m^2 \alpha^2 \mathcal{B}^2)}{1 - \mu^2} + m \left(\lambda + 2m\alpha^2 \mathcal{B} \frac{d}{d\mu} (\mathcal{B}\mu) \right) \right] \tilde{\Psi}_u = 0$$

の臨界緯度まわりの線形独立な解

$$\tilde{\Psi}_{u,1}^{(\text{id},c)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\mu - \mu_c)^k$$

$$\tilde{\Psi}_{u,2}^{(\text{id},c)} = \tilde{\Psi}_{u,1}^{(\text{id},c)} \ln |\mu - \mu_c| + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\mu - \mu_c)^k$$

- 2 番目の解 $\tilde{\Psi}_{u,2}^{(\text{id},c)}$ は log 型の特異性をもつ
- シア一流の場合は, $(d^2U/dy^2)|_{y=y_c} = 0$ のとき, log 型の特異性が消えたが, 今の場合はいつでもその特異性が現れる (決定方程式の解が重解タイプ)

確定特異点での接続条件

- 微分方程式を $\mu = \mu_c$ をはさむ狭い区間で積分

$$\left[(\lambda^2 - m^2 \alpha^2 B^2)(1 - \mu^2) \frac{d\tilde{\Psi}_u}{d\mu} \right]_{\mu=\mu_c} - \int_{\mu_c-\delta}^{\mu_c+\delta} d\mu \left[\frac{m^2(\lambda^2 - m^2 \alpha^2 B^2)}{1 - \mu^2} + m \left(\lambda + 2m\alpha^2 B \frac{d}{d\mu}(B\mu) \right) \right] \tilde{\Psi}_u = 0$$

- たかだか $\tilde{\Psi}_u \sim \tilde{\Psi}_{u,2}^{(\text{id},c)} \sim \ln |\mu - \mu_c|$ なので、第 2 項はゼロ

- 接続条件 $\left[(\mu - \mu_c) \frac{d\tilde{\Psi}_u}{d\mu} \right]_{\mu=\mu_c} = 0$

これを満たすのは、 $\left. \frac{d\tilde{\Psi}_u}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_c} = \frac{A_1}{\mu - \mu_c} + A_2 + A_3(\mu - \mu_c) + \dots$

(ただし、 A_1 は +, - 側で共通)

もしくは、 $\left. \frac{d\tilde{\Psi}_u}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_c} = \delta(\mu - \mu_c) [B_1 + B_2(\mu - \mu_c) + \dots]$

確定特異点での接続条件

- 接続条件より, $-1 \leq \mu_c \leq 1$ ならば独立な解は 3 つ :

$$\tilde{\Psi}_u = C_1 \tilde{\Psi}_{u,1}^{(\text{id},c)} + C_2 \tilde{\Psi}_{u,2}^{(\text{id},c)} + C_3 \mathcal{H}(\mu - \mu_c) \tilde{\Psi}_{u,1}^{(\text{id},c)} \quad (\mathcal{H} \text{ はステップ関数})$$

与えられた角振動数 λ に対して, 確定特異点の位置が $-1 \leq \mu_c \leq 1$ ならばいつでも固有モードになることができる \implies **連続モード**

- $\tilde{\Psi}_{u,2}^{(\text{id},c)} = \tilde{\Psi}_{u,1}^{(\text{id},c)} \ln |\mu - \mu_c| + \sum b_k (\mu - \mu_c)^k$ より, $C_3 = \pm i\pi C_2$ とすると, 無限小の散逸を考えて μ を複素数に拡張し,
 $\ln(\mu - \mu_c) = \ln |\mu - \mu_c| \pm i\pi \mathcal{H}(\mu - \mu_c)$ と扱う方法と等価 (Lin, 1961 [21]; Iga, 2013 [17])
- 連続固有値に埋もれていれば (すなわち, $-1 \leq \mu_c \leq 1$), 都合よく $C_2 = 0$ となっていない限り, 固有関数は必ず (連続モードに特有の) \log 型の尖った構造を持つ
連続モードに埋もれた離散モードというのは普遍的には存在しない? (数学的根拠はない)

数値解と級数解の比較

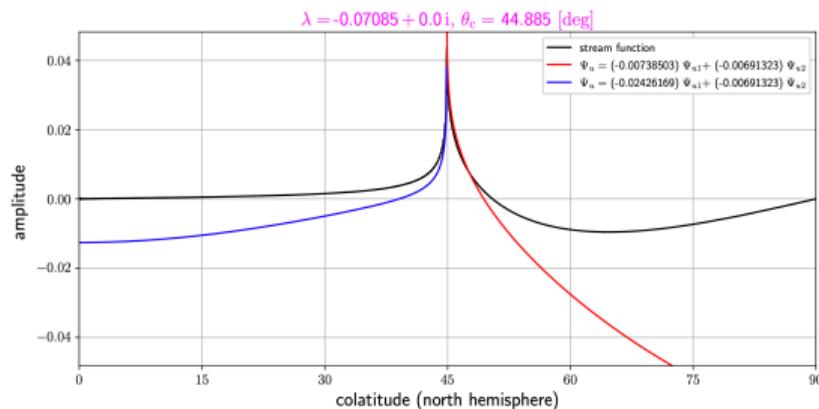
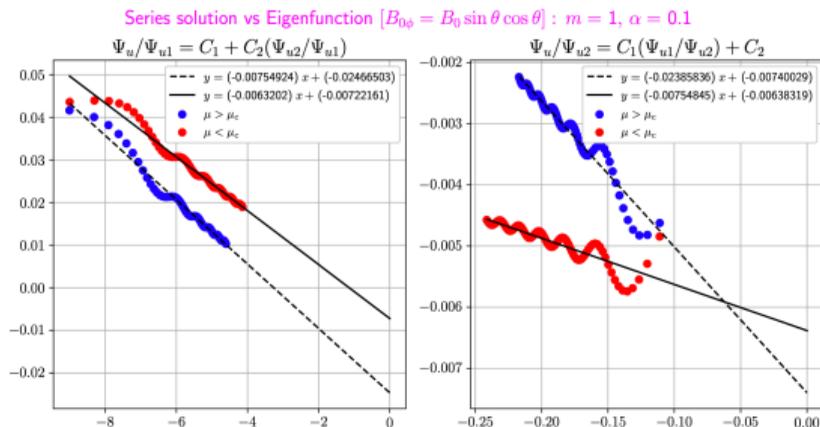
- 数値解の確定特異点近くの値をサンプリングして、級数解と最小二乗フィット

$$\tilde{\Psi}_{u,1}^{(id,c)} = 1 + a_1(\mu - \mu_c),$$

$$\tilde{\Psi}_{u,2}^{(id,c)} = [1 + a_1(\mu - \mu_c)] \ln |\mu - \mu_c| + b_1(\mu - \mu_c)$$

確定特異点の前後 100 点の値を使用 (切断波数 2000, 北半球から南半球まで 18000 点)

- C_1 は特異点の前後で jump があり, C_2 は前後で不変であることが, おおよそ確かめられた



唯一見つかった連続モードに埋もれた離散モード

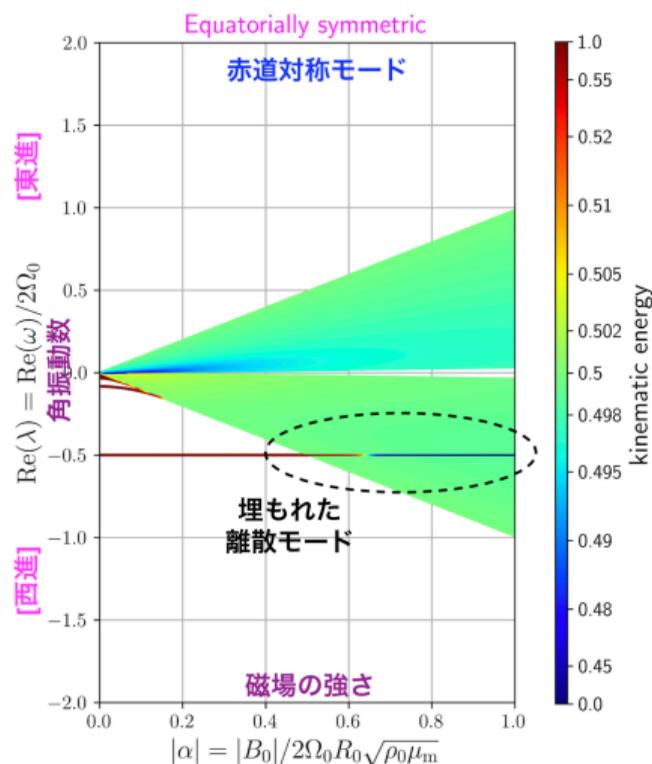
連続モードに埋もれた (速い磁気) Rossby 波

- 東西波数 $m = 1$ のときだけ、連続モードに埋もれた離散モードが見つかった

- $\tilde{\Psi}_u \propto \mathcal{P}_1^1, \tilde{\Psi}_b \propto \mathcal{P}_2^1$ のとき、運動方程式の両辺が 0 になる

$$\begin{aligned} (-\lambda \nabla_h^2 + m) \tilde{\Psi}_u &= m\alpha \left\{ \mu \nabla_h^2 - \frac{d^2}{d\mu^2} [\mu(1 - \mu^2)] \right\} \tilde{\Psi}_b = 0 \\ -\lambda \tilde{\Psi}_b &= m\alpha \mu \tilde{\Psi}_u \end{aligned}$$

- このとき、2 式を組み合わせるとこれまで考えていた微分方程式をつくることのできないので、 $-1 \leq \mu_c \leq 1$ を満たしても、確定特異点が存在しない

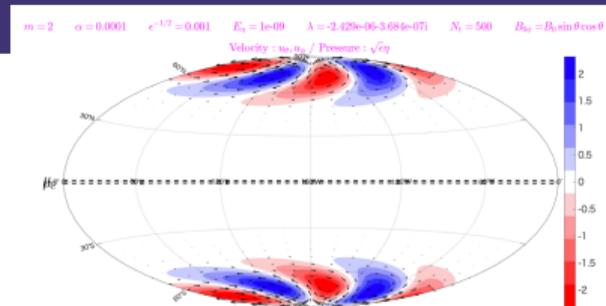


理想 MHD (磁気拡散なし) の場合のまとめ

- 数値的に計算した結果, 予想通り連続モードが現れた
背景磁場分布を変更しただけで, **遅い磁気 Rossby 波のブランチは消えてしまった**
 - 連続モードの固有関数は, 確定特異点で尖った構造を持つ
 - 解析的な計算により, 特異点まわりの解の表現 $\tilde{\Psi}_{u,1}^{(id,c)}$, $\tilde{\Psi}_{u,2}^{(id,c)}$ を得た
 - $\tilde{\Psi}_{u,2}^{(id,c)}$ は, 確定特異点で log 型の特異性を示す
 - $\tilde{\Psi}_{u,1}^{(id,c)}$ の係数は, 確定特異点の前後で不連続であってもよく,
数学的には, このことが原因で連続モードが現れている
 - 限られた状況においては, 連続モードに埋もれた離散モードが存在できる
埋もれた離散モードが, 様々な背景磁場分布に対して普遍的に存在しているとは考えにくい
- (※) MHD 浅水波系にすると, 離散モードを見つける望みが少し出てくる (D 論の後半)
確定特異点付近で摂動の振幅がほとんど 0 になっていれば良さそう

MHD 浅水波系の場合

- 背景磁場 $B_0 = B_0 \sin \theta \cos \theta \hat{e}_\phi$ で周波数が小さい波の場合、**確定特異点は赤道付近にある**
- MHD 浅水系の場合、**極域に局在するモードが存在可能**
確定特異点の影響を受けないので、**離散モードとして存在できる**
- アラスカ付近に周期 20 年の西進波？
(Chi-Durán *et al.*, 2020 [7])



浅水系のときの固有関数の例

Table 2

A Summary of Wave Properties for the Three Geographic Regions

Window	Mode	Weight (%)	Period (years)	Wavenumber m	Velocity ($^{\circ}/\text{yr}$)	Velocity (km/yr)
Southeast Asia	1	79.4	15.73 ± 4.44	6	3.81 ± 0.93	232 ± 56
	2	14.2	8.73 ± 1.48	7	6.78 ± 1.08	411 ± 66
Atlantic	1	69.90	7.08 ± 0.58	6	-8.48 ± 0.58	-515 ± 35
	2	23.00	—	—	—	—
Alaska	1	94.7	20.75 ± 3.40	3	-5.78 ± 0.63	-132 ± 14
	2	4.40	—	—	—	—

Note. Unfilled entries indicate that the CEOF is not identified as a traveling wave.

Chi-Durán *et al.*, 2020 [7]

① はじめに

- 研究背景
- 類似の研究

② 前提知識 (+研究の目的)

- 回転系の磁気流体波動
- 連続モードとは

③ 理想 MHD (磁気拡散なし)

- 基礎方程式
- 結果
- まとめ (1)

④ 非理想 MHD (磁気拡散あり)

- 基礎方程式
- 結果
- まとめ (2)

解くべき方程式

数値計算で解く場合

- 理想 MHD のときと同じ ($E_\eta \neq 0$)

解析的に調べる場合

- 2つの式を1つの微分方程式にまとめると,

$$\left[-\lambda \nabla_h^2 + m + \lambda B \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{B^2} \frac{dB}{d\mu} \right) + \frac{2\lambda(1 - \mu^2)}{B} \frac{dB}{d\mu} \frac{d}{d\mu} \right] (-\lambda + iE_\eta \nabla_h^2) \tilde{\psi}_b$$

$$= m^2 \alpha^2 B \left\{ B \nabla_h^2 - \frac{d^2}{d\mu^2} [B(1 - \mu^2)] \right\} \tilde{\psi}_b$$

- 磁気拡散の項が微分の最高階なので、
微小な磁気拡散 ($E_\eta \ll 1$) を導入すると、臨界緯度 (確定特異点) に境界層ができる
- 散逸の影響により、 λ は複素数になるので、確定特異点 μ_c も複素数

微小な磁気拡散がある場合の解析解

境界層内部解

- ストレッチ座標 $\varepsilon\xi = \mu - \mu_c$ ($\varepsilon \ll 1$) を導入
- 項のつり合いを考えると, $\varepsilon \sim O[(E_\eta/\alpha)^{1/3}]$
このとき,

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{d^2\chi}{d\xi^2} - \xi\chi \right) = O(\varepsilon^1), \quad \chi = \frac{d\tilde{\Psi}_b}{d\xi}$$

ゆえに, 4つの線形独立な解は,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{b,1}^{(\text{res},c)} &= 1 + O(\varepsilon^1), & \tilde{\Psi}_{b,2}^{(\text{res},c)} &= \int_0^\xi (-\pi)\text{Hi}(z) dz + O(\varepsilon^1) \\ \tilde{\Psi}_{b,3}^{(\text{res},c)} &= \int_{\infty_2}^\xi \text{Ai}(ze^{2\pi i/3}) dz + O(\varepsilon^1), & \tilde{\Psi}_{b,4}^{(\text{res},c)} &= \int_{\infty_3}^\xi \text{Ai}(ze^{-2\pi i/3}) dz + O(\varepsilon^1) \end{aligned}$$

- $\text{Hi}(z)$ は Scorer 関数, $\text{Ai}(z)$ は Airy 関数
- ε は複素数なので, μ の実軸は ξ の実軸と一致しないことに注意 (詳細は省略)

理想/非理想 MHD 解の対応関係

- 臨界緯度 or 境界層付近での解

理想 MHD 解	非理想 MHD 解
$\tilde{\Psi}_{u,1}^{(\text{id},c)} = 1 + a_1(\mu - \mu_c) + \dots$	$\tilde{\Psi}_{b,1}^{(\text{res},c)} = 1 + O(\varepsilon^1)$
$\tilde{\Psi}_{u,2}^{(\text{id},c)} = \ln(\mu - \mu_c) + a_1(\mu - \mu_c) \ln(\mu - \mu_c) + \dots$	$\tilde{\Psi}_{b,2}^{(\text{res},c)} = \int_0^\xi (-\pi) \text{Hi}(z) dz + O(\varepsilon^1)$
なし ($\xi \rightarrow \infty$ のとき極で発散するので除外)	$\tilde{\Psi}_{b,3}^{(\text{res},c)} = \int_0^\xi \text{Ai}(ze^{2\pi i/3}) dz + O(\varepsilon^1)$
なし ($\xi \rightarrow \infty$ のとき極で発散するので除外)	$\tilde{\Psi}_{b,4}^{(\text{res},c)} = \int_0^\xi \text{Ai}(ze^{-2\pi i/3}) dz + O(\varepsilon^1)$

- Scorer 関数の漸近的 ($\xi \rightarrow \infty$) ふるまい

$$\int_0^\xi (-\pi) \text{Hi}(z) dz \sim \ln(\mu - \mu_c) - \ln(-\varepsilon) + O(\varepsilon^0)$$

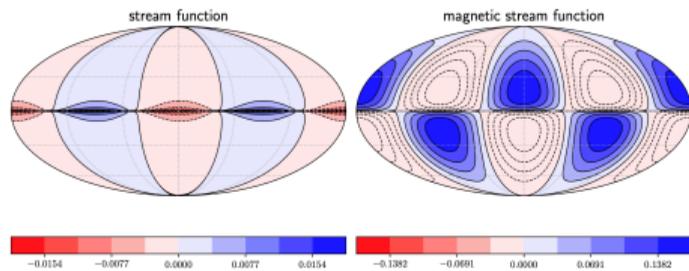
非理想 MHD の場合の分散関係

東西波数 $m = 2$, $E_\eta = 10^{-9}$ の場合

- 磁気拡散を入れると、連続モードの確定特異点まわりに境界層ができたような解が離散モードとして得られた

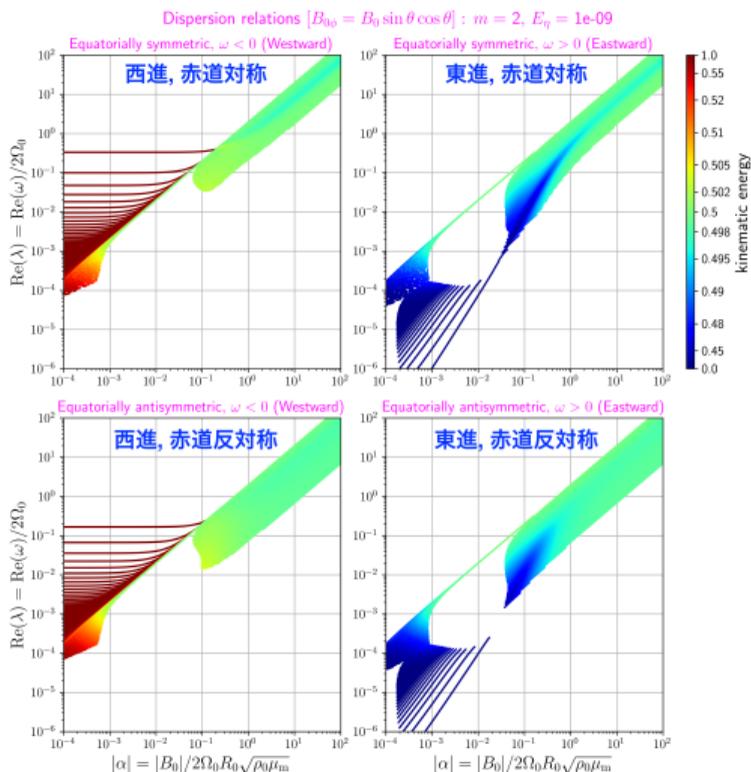
Eigenfunction [$B_{\theta 0} = B_0 \sin \theta \cos \theta$]: $m = 2$, $\alpha = 0.01$, $E_\eta = 1e-09$

$\lambda = 7e-05 + i1e-05i$



$$m = 2, \alpha = 0.01, E_\eta = 10^{-9},$$

$$\lambda = 7.4806 \times 10^{-5} - 5.9967 \times 10^{-6}i$$



まとめ (2), 今後検討したいこと

- 磁気拡散の効果を加えると, 連続モードは消失する
- 連続モードの確定特異点に境界層ができたような解ばかりであまり目新しいものはない
- (今回紹介していないが, 強い磁場のとき不安定モードは生じる)

- 非線形臨界層
- 3次元薄層の問題への拡張、鉛直背景磁場の影響

Reference I

- [1] Balmforth, N. J. and Morrison, P. J.
Normal modes and continuous spectra.
Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 773, No. 1, pp. 80–94, 1995.
- [2] Buffett, B.
Geomagnetic fluctuations reveal stable stratification at the top of the Earth's core.
Nature, Vol. 507, No. 7493, pp. 484–487, 2014.
- [3] Buffett, B., Knezek, N., and Holme, R.
Evidence for MAC waves at the top of Earth's core and implications for variations in length of day.
Geophysical Journal International, Vol. 204, No. 3, pp. 1789–1800, 2016.
- [4] Buffett, B. and Matsui, H.
Equatorially trapped waves in Earth's core.
Geophysical Journal International, Vol. 218, No. 2, pp. 1210–1225, 2019.
- [5] Case, K. M.
Stability of inviscid plane Couette flow.
The Physics of Fluids, Vol. 3, No. 2, pp. 143–148, 1960.
- [6] Case, K.
Plasma oscillations.
Annals of Physics, Vol. 7, No. 3, pp. 349 – 364, 1959.
- [7] Chi-Durán, R., Avery, M. S., Knezek, N., and Buffett, B. A.
Decomposition of geomagnetic secular acceleration into traveling waves using complex empirical orthogonal functions.
Geophysical Research Letters, Vol. 47, No. 17, p. e2020GL087940, 2020.
e2020GL087940 10.1029/2020GL087940.
- [8] Dikpati, M., Cally, P. S., and Gilman, P. A.
Linear analysis and nonlinear evolution of two-dimensional global magnetohydrodynamic instabilities in a diffusive tachocline.
The Astrophysical Journal, Vol. 610, No. 1, pp. 597–615, 2004.
- [9] Dikpati, M. and Gilman, P. A.
Joint instability of latitudinal differential rotation and concentrated toroidal fields below the solar convection zone.
The Astrophysical Journal, Vol. 512, No. 1, pp. 417–441, 1999.

Reference II

- [10] Dormy, E., Soward, A. M., Jones, C. A., Jault, D., and Cardin, P.
The onset of thermal convection in rotating spherical shells.
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 501, pp. 43–70, 2004.
- [11] Gilman, P. A. and Dikpati, M.
Joint instability of latitudinal differential rotation and concentrated toroidal fields below the solar convection zone. II. instability of narrow bands at all latitudes.
The Astrophysical Journal, Vol. 528, No. 1, pp. 552–572, 2000.
- [12] Gilman, P. A. and Fox, P. A.
Joint instability of latitudinal differential rotation and toroidal magnetic fields below the solar convection zone.
The Astrophysical Journal, Vol. 484, No. 1, pp. 439–454, 1997.
- [13] Gilman, P. A. and Fox, P. A.
Joint instability of latitudinal differential rotation and toroidal magnetic fields below the solar convection zone. II. instability for toroidal fields that have a node between the equator and pole.
The Astrophysical Journal, Vol. 510, No. 2, pp. 1018–1044, 1999.
- [14] Gilman, P. A. and Fox, P. A.
Joint instability of latitudinal differential rotation and toroidal magnetic fields below the solar convection zone. III. unstable disturbance phenomenology and the solar cycle.
The Astrophysical Journal, Vol. 522, No. 2, pp. 1167–1189, 1999.
- [15] Helffrich, G. and Kaneshima, S.
Outer-core compositional stratification from observed core wave speed profiles.
Nature, Vol. 468, No. 7325, pp. 807–810, 2010.
- [16] Hide, R. and Bullard, E. C.
Free hydromagnetic oscillations of the earth's core and the theory of the geomagnetic secular variation.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 259, No. 1107, pp. 615–647, 1966.
- [17] Iga, K.
Shear instability as a resonance between neutral waves hidden in a shear flow.
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 715, pp. 452–476, 2013.
- [18] Irving, J. C. E., Cottaar, S., and Lekić, V.
Seismically determined elastic parameters for earth's outer core.
Science Advances, Vol. 4, No. 6, 2018.

Reference III

- [19] Jones, C. A., Soward, A. M., and Mussa, A. I.
The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere.
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 405, pp. 157–179, 2000.
- [20] Kaneshima, S.
Array analyses of SmKS waves and the stratification of Earth's outermost core.
Physics of the Earth and Planetary Interiors, Vol. 276, pp. 234 – 246, 2018.
Special Issue:15th SEDI conference.
- [21] Lin, C. C.
Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows.
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 10, No. 3, pp. 430–438, 1961.
- [22] Márquez-Artavia, X., Jones, C. A., and Tobias, S. M.
Rotating magnetic shallow water waves and instabilities in a sphere.
Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, Vol. 111, No. 4, pp. 282–322, 2017.
- [23] Sharif, B. W. and Jones, C. A.
Rotational and magnetic instability in the diffusive tachocline.
Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, Vol. 99, No. 6, pp. 493–511, 2005.
- [24] Soward, A. M.
On the finite amplitude thermal instability of a rapidly rotating fluid sphere.
Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, Vol. 9, No. 1, pp. 19–74, 1977.
- [25] Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., and Toomre, J.
The internal rotation of the sun.
Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 41, No. 1, pp. 599–643, 2003.
- [26] Van Kampen, N.
On the theory of stationary waves in plasmas.
Physica, Vol. 21, No. 6, pp. 949 – 963, 1955.

Reference IV

- [27] van Tent, R., Deuss, A., Kaneshima, S., and Thomas, C.
The signal of outermost-core stratification in body-wave and normal-mode data.
Geophysical Journal International, Vol. 223, No. 2, pp. 1338–1354, 2020.
- [28] Zaqarashvili, T. V., Oliver, R., Ballester, J. L., and Shergelashvili, B. M.
Rossby waves in “shallow water” magnetohydrodynamics.
Astronomy & Astrophysics, Vol. 470, No. 3, pp. 815–820, 2007.