課題演習 DB「数値計算」資料その 5(慣性振動/慣性不安定, 対称不安定)

慣性振動

緯度 ϕ における f 平面上での質点の水平方向の運動方程式は以下のようになる.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + fu = 0 \tag{1}$$

ここに, (u, v): (x, y) 方向の速度, (x, y): (東向き, 北向き) 座標, $f = 2\Omega \sin\phi$: コリオリパラメター, Ω: 地球自転角速度, である. なお, ここで圧力 p は水平方向に一様であるとし, 圧力傾度の項は入れていない.

運動方程式 (1) の解は, (u, v) の初期値を (u_0, v_0) とすると,

$$u = u_0 \cos(ft) + v_0 \sin(ft), \quad v = -u_0 \sin(ft) + v_0 \cos(ft) \tag{2}$$

となる. 質点の位置を (x, y) とすると,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v,$$

であるから, (2) を積分することにより,

$$x = \frac{u_0}{f}\sin(ft) - \frac{v_0}{f}\cos(ft) + x_c, \quad y = \frac{u_0}{f}\cos(ft) + \frac{v_0}{f}\sin(ft) + y_c \tag{3}$$

と解ける. ここに, (x_c, y_c) は回転中心の座標で, (x, y) の初期値を (x_0, y_0) とすれば,

$$x_c = x_0 + \frac{v_0}{f}, \quad y_c = y_0 - \frac{u_0}{f}$$

と定まる. 式 (3) より,

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \frac{u_0^2 + v_0^2}{f^2}$$

を得るから, 質点の運動は, (x_c, y_c) を中心とする, 半径 $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}/|f|$ の円運動である. この振動は慣性振動と呼ばれ, 振動の周期 $2\pi/|f|$ は慣性周期と呼ばれる. この円運動は, $f > 0$ の北半球では鉛直上方から見て時計回りの運動になる.

慣性不安定

慣性振動では圧力 p は水平方向に一様であるとして, 運動方程式において圧力傾度の項は考慮しなかったが, 今度は, 圧力 p が y の関数になっており, p の南北傾度とバランスする地衡風が

$$\bar{u}(y) = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{4}$$

と吹いているものとする (これを基本流と呼ぶことにする). さて, (1) において南北方向の圧力傾度も考慮すると,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{5}$$

となるが, (4) を用いて圧力傾度項を消去すると,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + f(u - \bar{u}) = 0 \tag{6}$$

と表せる. さて, 初期位置 (x_0, y_0) にある質点を考える. この質点の速度が $(u, v) = (\bar{u}, 0)$ であれば, (6) より質点の速度は時間変化せず, 基本流の速度 $\bar{u}$ で東西方向に流されるだけである. では, 速度に微小な南北成分が与えられた場合を考えてみよう. 質点の y 座標の初期値からのずれを Δy とするとき

$$\frac{\mathrm{d}\Delta y}{\mathrm{d}t} = v$$

であるから (6) 第一式より,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u - f\Delta y) = 0 \tag{7}$$

となるから, この質点に対して

$$u = \bar{u}(y_0) + f\Delta y \tag{8}$$

となる. (8) を (6) の第二式に代入すると,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + f\left(\bar{u}(y_0) + f\Delta y - \bar{u}(y_0 + \Delta y)\right) = 0.$$

ここで, Δy が微小であるとすると

$$\bar{u}(y_0) - \bar{u}(y_0 + \Delta y) = -\bar{u}_y \Delta y$$

と表せることと, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\Delta y/\mathrm{d}t^2$ であることを考慮すると,

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta y}{\mathrm{d}t^2} + f\bar{q}\Delta y = 0$$

と書き直せる. ここに, $\bar{q} = f - \bar{u}_y$ は基本流の絶対渦度である. もし, $f\bar{q} < 0$ ならば, 指数関数的に増大する解を持ち, このとき質点の位置も初期位置から急激にずれていく. このような場合を慣性不安定という. また, $f\bar{q} > 0$ なら, 解は振動的で, これは慣性振動と同様になる. なお, この場合は慣性安定であるという.

慣性不安定は, 以下のように静力学的不安定と同様に解釈できる. 式 (7) より, パーセルについて, 絶対角運動量

$$M = u - fy$$

が保存する. 背景場の M を $\bar{M}(y) = \bar{u}(y) - fy$ とするとき, 初期に $y = y_0$ にあった $M = \bar{M}(y_0)$ のパーセルが $\Delta y > 0$ だけ北向きに変位することを考える. その位置における背景場の M は $\bar{M}(y_0 + \Delta y)$ であるので, パーセルの x 方向の基本流からの相対速度はパーセルについて M が保存することを考えると, $\bar{M}(y_0) - \bar{M}(y_0 + \Delta y) = -\bar{M}_y\Delta y$ となる. もし $\bar{M}_y > 0$ ならば, パーセルの東向き速度は基本流より遅いことになり, このパーセルに働くコリオリ力は南北圧力傾度 (基本流に働くコリオリ力とバランスしている) よりも小さくなるため, コリオリ力と南北圧力傾度の合力は $f > 0$ の北半球では北向きとなり, 変位が増大することになる. というわけで, $f > 0$ なら, $\bar{M}_y > 0$ のとき不安定ということになる ($f < 0$ なら, $\bar{M}_y < 0$ で不安定). $\bar{q} = -\bar{M}_y$ であるから, ここで導いた不安定の条件は上で導いたものと当然同じである.

対称不安定

基本場の流速 $\bar{u}$ が y のみの関数ではなく, 鉛直座標 z にも依存していて $\bar{u}(y, z)$ と表されるとする. また, 基本場の温位 $\bar{\theta}$ も z のみでなく (y, z) に依存していて $\bar{\theta}(y, z)$ と表されるとする. このとき, (y, z) 方向の変位 $(\Delta y, \Delta z)$ に関する運動方程式は浮力振動の方程式との組み合わせで以下のようになる.

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta y}{\mathrm{d}t^2} = -f\bar{q}\Delta y + f\bar{u}_z\Delta z, \quad \frac{\mathrm{d}^2\Delta z}{\mathrm{d}t^2} = -(g\bar{\theta}_y/\bar{\theta})\Delta y - N^2\Delta z.$$

行列を使って表示すれば,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f\bar{q} & f\bar{u}_z \\ -(g\bar{\theta}_y/\bar{\theta}) & -N^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる. $(\Delta y, \Delta z)$ の時間依存性を $\exp(\sigma t)$ とすると, σ^2 は (9) の右辺の係数行列の固有方程式

$$F(X) = (X + f\bar{q})(X + N^2) + f\bar{u}_z(g\bar{\theta}_y/\bar{\theta}) = X^2 + (f\bar{q} + N^2)X + f\bar{q}N^2 + f\bar{u}_z(g\bar{\theta}_y/\bar{\theta}) = 0$$

の解として定まる. 系が不安定となるのは, $\mathrm{Re}(\sigma) > 0$ の解を持ちうるときである. これは次の 2 つの場合が考えられる.
(i) $F(X) = 0$ が $X > 0$ の範囲に実数解を持つ場合 (このとき, $\sigma^2 = X$ なので, 必ず $\sigma > 0$ の解が存在).
(ii) $F(X) = 0$ が純虚数ではない虚数解を持つ場合 (このとき, $\sigma^2 = X$ なので, 一方の解について必ず $\mathrm{Re}(\sigma) > 0$).

系が静力学的に安定でかつ慣性安定であるとして,

$$f\bar{q} > 0 \quad \text{かつ} \quad N^2 > 0$$

が満されているとする. このとき, (i) の場合, すなわち, $F(X) = 0$ が $X > 0$ の解を持つ必要十分条件は,

$$F(0) = f\bar{q}N^2 + f\bar{u}_z(g\bar{\theta}_y/\bar{\theta}) < 0$$

となる. この条件は,

$$\bar{u}_z = \bar{M}_z, \quad \bar{q} = -\bar{M}_y, \quad N^2 = g\bar{\theta}_z/\bar{\theta},$$

であることを用いると,

$$\frac{fg}{\bar{\theta}}(\bar{M}_z\bar{\theta}_y - \bar{M}_y\bar{\theta}_z) < 0$$

となる. $f > 0$ の北半球に限定すれば,

$$\bar{M}_z\bar{\theta}_y < \bar{M}_y\bar{\theta}_z$$

が不安定の必要十分条件となる．従って, 慣性安定 ($\bar{M}_y < 0$) かつ静力学的安定 ($\bar{\theta}_z > 0$) でも $\bar{M}_z\bar{\theta}_y$ が負で十分絶対値が大きければ不安定を生じうる．このような不安定を対称不安定と言う．

この不安定の条件式は, $\bar{\theta}$ と $\bar{M}$ の等値線の傾き

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\bar{\theta}} = -\bar{\theta}_y/\bar{\theta}_z, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\bar{M}} = -\bar{M}_y/\bar{M}_z,$$

を用いると,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\bar{\theta}} > \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\bar{M}}$$

と表せる (なぜこのとき不安定が起きるのか図を描いて考えてみよ).

また, 現実大気ではあまり起りえないと思われるが, (ii) の場合が生じる条件を考えておく．判別式が負となることが必要十分条件だから,

$$D = (f\bar{q} + N^2)^2 - 4(f\bar{q}N^2 + f\bar{u}_z(g\bar{\theta}_y/\bar{\theta})) = (f\bar{q} - N^2)^2 - 4f\bar{u}_z(g\bar{\theta}_y/\bar{\theta}) < 0$$

が条件となるが, 通常の大気においては, 温度風平衡により,

$$f\bar{u}_z \approx -g\bar{\theta}_y/\bar{\theta}$$

が成立しているから, $D < 0$ が満されることは通常考えなくてよい.

※補足: 慣性振動およびそれに至る基礎方程式の導出などは, 気象学 I の講義資料 (kishougakuI-1w.pdf ～ kishougakuI-4w.pdf) も参照のこと (PandA の演習の資料のところに置いている).

課題 (以下の課題については, もうサンプルプログラムを提供しないので, これまでのサンプルプログラムを参考に自力で作成してみて欲しい)

- 課題 5-1(慣性振動について)

  方程式

  $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + fu = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v$$

  を初期条件 $(x, y, u, v) = (0, 0, 0, V)$ から Runge-Kutta 等で時間積分して (x, y) の軌跡を求め, 周期 $2\pi/|f|$, 半径 $|V/f|$ の円運動をすることを確認せよ．f, V はいくつか適当な値の組み合わせを試してみること.

- 課題 5-2(慣性不安定について)

  方程式

  $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + f(u - \bar{u}) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v, \tag{10}$$

  において,

  $$f = 1, \quad \bar{u}(y) = \alpha y$$

  とする．α が 1 より大なる場合とそうでない場合それぞれについて (10) を初期条件 $(x, y, u, v) = (0, 0, 0, \epsilon)$ から時間積分して (x, y) の軌跡を求め, $\alpha > 1$ のときに慣性不安定が起きることを確かめよ．ここで, ϵ は十分小さな適当な値 (例えば 1×10^{-6} など) とする.

- 課題 5-3(対称不安定について)

  方程式

  $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A_y y + A_z z, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -B_y y - B_z z \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w, \tag{11}$$

  を考える (対称不安定のところで導いた方程式において, $fM = A,\ g\log\bar{\theta} = B$ と書き換えたものに相当)．ここで,

  $$A_y = -1, \quad A_z = 1, \quad B_y = -2, \quad B_z = 1$$

  とし, (11) を適当な微小な初期値から時間積分して (y, z) の軌跡を求め, 対称不安定が起きることを確認せよ．グラフに A, B の等値線も書き入れられているとよい．また, $B_y > -1$ とすると対称不安定が生じなくなることも確認せよ (ただし, 前述の (ii) に対応する不安定が $D = (A_y + B_z)^2 - 4A_zB_y < 0$ のとき生じるので, ここでの $A_y,\ A_z,\ B_z$ の設定では $B_y > 0$ でも不安定化してしまうことに注意. そのことも確認せよ).

  さらに, 安定な場合について, 軌跡がリサージュ図形のようになることも確かめよ.