

# 傾圧場の軸対称擾乱に対する安定性

竹広 真一

2016/08/27

傾圧不安定のメカニズムとして、圧力場の等値線と密度場の等値線が傾いた状態 (傾圧場) でのパーセル法による説明がしばしば見受けられる (図). そこでは、とある方向に動かしたパーセルが元の位置から離れていく方向に力を受けるため不安定であると解釈する. しかしながら、そのような解釈で与えるパーセル擾乱は軸対称的であるが、実際に発生する傾圧不安定擾乱は非軸対称な運動であるので、説明としては不適切であると考えられる. ここでは実際に傾圧場に対して軸対称な擾乱を与えたときどのような流体運動が生じるのかを数値実験を行って確かめてみる.

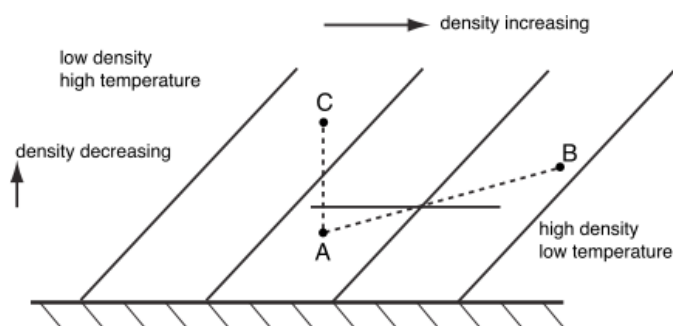


図 1: パーセル法による傾圧場の安定性の説明の例 (Vallis 2006).  $A$  のパーセルが  $C$  に向かって真上に上昇する場合は周囲より密度が大きくなり下向きに浮力を受けて戻ろうとするので安定.  $A$  のパーセルが  $B$  に向かって斜めに上昇する場合は周囲より密度が小さいとなり上向きに浮力を受けてさらに上昇していくので不安定.

## 1 支配方程式

水平方向および鉛直方向に無限に広がるブシネスク流体の2次元な流体運動を考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

流れ関数  $\psi$  を

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (6)$$

と導入する. 渦度の  $x$  成分の式を導き, 流線関数を用いると,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) - f \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y}. \quad (7)$$

ここで  $J(f, g) = (\partial_y f)(\partial_z g) - (\partial_z f)(\partial_y g)$  はヤコビアンであり移流項を表している. 同様に, 速度  $x$  成分の式, および密度の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + J(\psi, u) + f \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + J(\psi, \rho) = 0. \quad (9)$$

基本場として, 次のような地衡流バランスした傾圧場を与える.

$$\rho_B = \Gamma(y \cot \alpha - z), \quad u_B = \frac{g\Gamma \cot \alpha}{\rho_0 f} z, \quad \psi_B = \zeta_B = 0. \quad (10)$$

ここで  $\Gamma = -d\rho_B/dz$  は鉛直方向の密度傾度の逆負号,  $\alpha$  は密度等値面の鉛直方向からの傾きを表す角度である. この基本場に対する擾乱方程式を構成する.  $\rho = \rho_B + \rho', u = u_B + u'$  を代入すると, 擾乱の支配方程式は,

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + J(\psi, u') + \frac{g\Gamma \cot \alpha}{\rho_0 f} \frac{\partial \psi}{\partial y} + f \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) - f \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial y}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\psi, \rho) - \Gamma \frac{\partial \psi}{\partial y} - \Gamma \cot \alpha \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

## 2 実験設定

軸対称な子午面流れの擾乱を与える.

$$\psi = \psi_0(y - \tan \theta)e^{-(y^2+z^2)/\sigma^2} \quad (14)$$

ここで  $\theta$  は原点附近での擾乱速度の向きの  $z$  軸からの傾きを表す.  $\psi_0$  は擾乱の振幅である.

実験に用いるパラメータは  $f = g = \rho_0 = \Gamma = 1$  とした.

## 3 結果

### 3.1 実験 1 : $\alpha = \pi/3$ の場合

初期擾乱は慣性重力波として伝播してしまう. 基本場は安定.

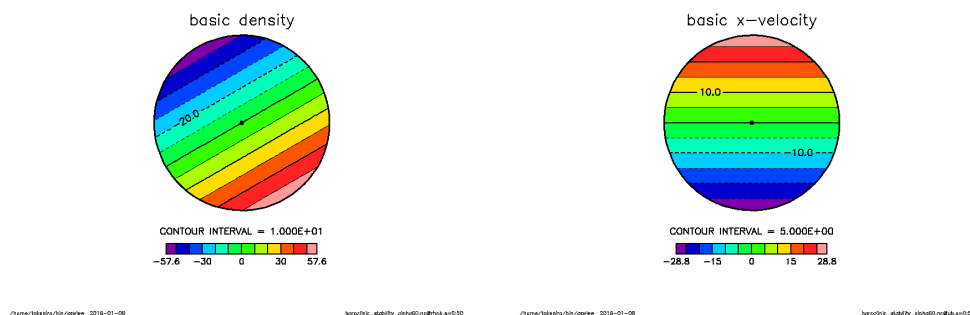


図 2: 基本場の密度分布と速度  $x$  成分.  $\alpha = \pi/3$  の場合

### 3.2 実験 2 : $\alpha = \pi/6$ の場合

初期擾乱が発達する. 基本場は不安定.

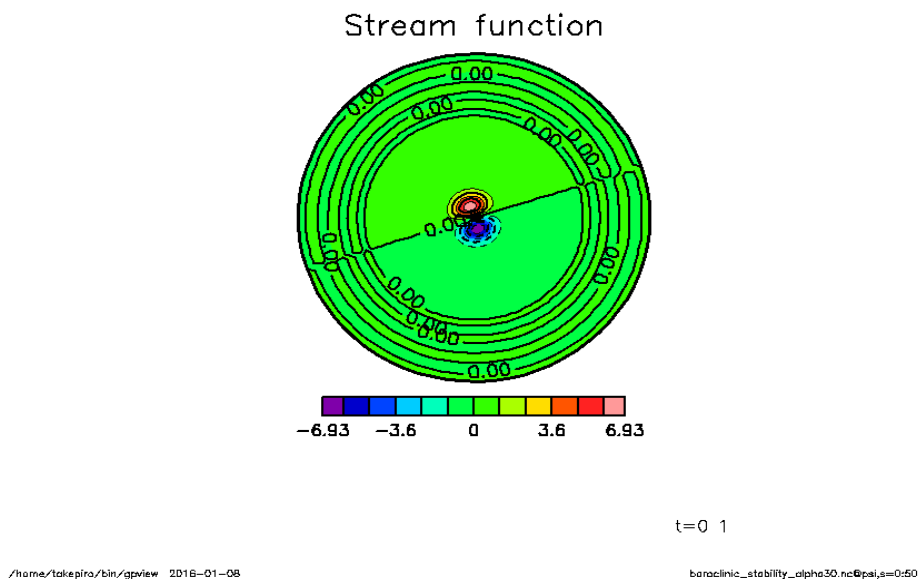


図 3: 子午面流れ関数の時間発展アニメーション.  $\alpha = \pi/3$  の場合

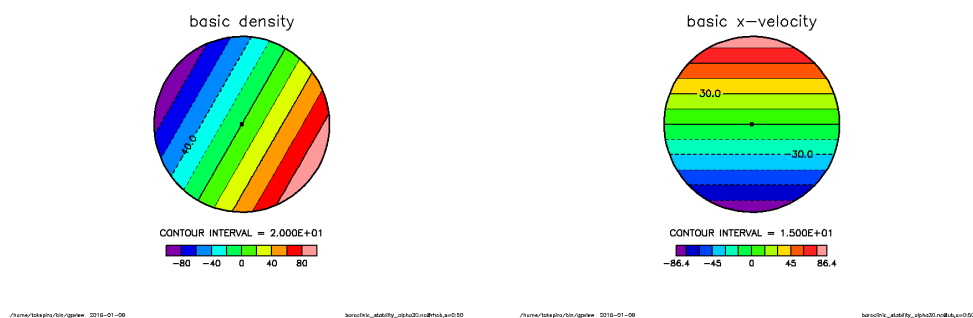


図 4: 基本場の密度分布と速度  $x$  成分.  $\alpha = \pi/6$  の場合

## 文献

Vallis, G. K., 2006 : Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 745pp.

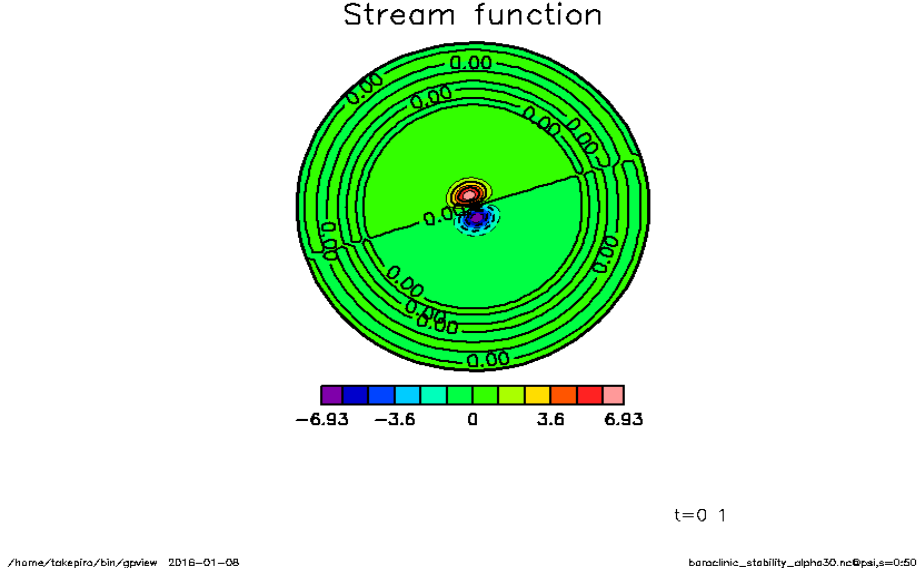


図 5: 子午面流れ関数の時間発展アニメーション.  $\alpha = \pi/6$  の場合

## A $f$ 面ブシネスク流体のポテンシャル渦度保存則

ここでは  $f$  面ブシネスク流体のポテンシャル渦度保存則を導出する. 一般的な 3 次元の支配方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0. \quad (17)$$

運動方程式から渦度方程式を構成すると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho \times \mathbf{g}. \quad (18)$$

$\boldsymbol{\Omega}$  は定ベクトルなので,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_a}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_a - (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho \times \mathbf{g}. \quad (19)$$

ただし  $x i_a = x i + 2\boldsymbol{\Omega}$  は絶対渦度である.  $\nabla \rho$  との内積をとると, 右辺は 0 となって,

$$\nabla \rho \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_a}{\partial t} + \nabla \rho \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_a - \nabla \rho \cdot (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0.$$

第 1 項目は

$$\nabla \rho \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \rho) - \boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

第 2 項目は

$$\begin{aligned} \nabla \rho \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_a &= \partial_i \rho (u_k \partial_k) \xi_{ai} \\ &= (u_k \partial_k) (\xi_{ai} \partial_i \rho) - \xi_{ai} (u_k \partial_k) \partial_i \rho = (u_k \partial_k) (\xi_{ai} \partial_i \rho) - \xi_{ai} \partial_i (u_k \partial_k) \rho + (\xi_{ai} \partial_i u_k) (\partial_k \rho) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \rho) - \boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \nabla \rho \cdot (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \rho) - \boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \rho) - \boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0.$$

密度の保存則を用いると、結局、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \rho) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \rho) = 0.$$

したがって  $\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla \rho$  は保存する。これが  $f$  面ブシネスク系でのポテンシャル渦度である。

本文中の状況である 2 次元系においては、

$$\rho = \rho_B(y, z) + \rho'(y, z, t), \quad \boldsymbol{\xi}_a = \frac{\partial u_B}{\partial z} \mathbf{e}_y + \left( f - \frac{\partial u_B}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\xi}',$$

であるから、擾乱の 1 次に対応するポテンシャル渦度擾乱  $q'$  は

$$\begin{aligned} q' &= \left[ \frac{\partial u_B}{\partial z} \mathbf{e}_y + \left( f - \frac{\partial u_B}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \right] \cdot \nabla \rho' + \boldsymbol{\xi}' \cdot \nabla \rho_B \\ &= \frac{\partial u_B}{\partial z} \frac{\partial \rho'}{\partial y} + \left( f - \frac{\partial u_B}{\partial y} \right) \frac{\partial \rho'}{\partial z} + \xi'_y \frac{\partial \rho_B}{\partial y} + \xi'_z \frac{\partial \rho_B}{\partial z} \\ &= \frac{\partial u_B}{\partial z} \frac{\partial \rho'}{\partial y} + \left( f - \frac{\partial u_B}{\partial y} \right) \frac{\partial \rho'}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \rho_B}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \rho_B}{\partial z}. \end{aligned}$$

## B 線形波動の分散関係

擾乱の支配方程式を線形化し、各変数が  $\exp[i(l y + m z - \omega t)]$  の形であることを仮定すると、係数行列式が次のようになる。

$$\begin{vmatrix} -i\omega & il \frac{g\Gamma \cot \alpha}{\rho_0 f} + imf & 0 \\ -imf & i\omega(l^2 + m^2) & ilg/\rho_0 \\ 0 & -im\Gamma \cot \alpha - il\Gamma & -i\omega \end{vmatrix} = 0.$$

これを計算すると,

$$\omega = 0, \quad \omega^2 = \frac{N^2 l^2 + 2N^2 l m \cot \alpha + f^2 m^2}{l^2 + m^2}. \quad (20)$$

ここで  $N^2 = g\Gamma/\rho_0$  は鉛直方向の密度傾度から見積もられるプラントバイサラ振動数である.  $\omega = 0$  のモードはポテンシャル渦度が非零の場合に対応する.

$\omega \neq 0$  のモードについては,

$$\omega^2 = \frac{N^2(l + m \cot \alpha)^2 + (f^2 - N^2 \cot^2 \alpha)m^2}{l^2 + m^2},$$

と変形できるので,  $f^2 - N^2 \cot^2 \alpha > 0$  すなわち

$$\frac{f}{N} |\tan \alpha| \geq 1 \quad (21)$$

であれば安定である. このとき初期に与えた擾乱は慣性内部重力波として伝播していくだけである.

たとえば地球大気の中緯度での傾圧帯を考えてみる. 幅を 1000km, (ポテンシャル) 温度差 10K 程度と見積もると  $\Delta T/\Delta y \sim 10^{-5}$  K/m. 高さ方向には温度傾度が 6.5K/km に対して, 乾燥断熱減率が 10K/km 程度であるから, ポテンシャル温度傾度はだいたい 3K/km  $\sim 3 \times 10^{-3}$  K/m. したがって, 等ポテンシャル温度面 (密度面に対応) の傾きは

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} / \frac{\partial \theta}{\partial y} \sim \frac{3 \times 10^{-3}}{10^{-5}} = 300.$$

一方で

$$N \sim 10^{-2} 1/s, \quad f = 10^{-4} 1/s.$$

なので  $f/N \sim 0.01$ . したがって安定のための十分条件を満たしている.