AGCM5

第1部　数理モデル化

地球流体電脳倶楽部

2002年06月20日 (AGCM5-3.4)

目 次

1 座標系 **1**

1.1 座標系 1

2 支配方程式・力学過程 **2**

2.1 はじめに 2

2.2 支配方程式 3

2.2.1 連続の式 3

2.2.2 静水圧の式 3

2.2.3 運動方程式 3

2.2.4 熱力学の式 3

2.2.5 水蒸気の式 3

2.2.6 境界条件 4

2.3 力学過程 6

2.4 水平拡散項 6

2.4.1 波数依存型 6

2.4.2 波数非依存型 6

3 雲 **7**

3.1 はじめに 7

3.2 対流調節 8

3.3 クオスキーム 8
3.4 荒川シューバートスキーム 8
3.5 浅い積雲 8
3.6 大規模凝結 8

4 放射 9

4.1 はじめに 9
4.2 短波放射 10
4.2.1 短波放射フラックス 10
4.2.2 入射フラックス 10
4.3 長波放射 12

5 鉛直輸送 13

5.1 はじめに 13
5.2 Yamada-Mellor のクロージャーモデル 14
5.2.1 Yamada-Mellor レベル 1 14
5.2.2 Yamada-Mellor レベル 2 14
5.2.3 Yamada-Mellor レベル 3 15
5.2.4 Yamada-Mellor レベル 4 15
5.3 バルク法 16

6 地表面過程 17

6.1 はじめに 17

7 重力波抵抗 18

7.1 はじめに 18

7.2 McFarlane (1987) のパラメタリゼーション 18

7.3 文献 21

A 支配方程式系の導出 1

A.1 設定 1

A.2 基礎方程式系の導出 2

A.2.1 状態方程式 2

A.2.2 連続の式 2

A.2.3 水蒸気の式 3

A.2.4 運動方程式 3

A.2.5 熱力学の式 3

A.3 回転系への変換 5

A.3.1 回転系への変換公式 5

A.3.2 スカラーの変換公式 5

A.3.3 ベクトルの変換公式 5

A.3.4 回転系への変換 6

A.4 球座標への変換 7

A.4.1 直交曲線座標系における微分 7

A.4.2 球座標系における微分 7

A.4.3 球座標への変換 8

A.5 z-座標プリミティブ方程式 10

A.5.1 静力学平衡近似 10

A.5.2 薄い球殻近似 10

A.6 σ-座標プリミティブ方程式 12

A.6.1 σ-座標変換公式 12

A.6.2 σ-座標プリミティブ方程式系 13

A.6.3 境界条件 15

A.6.4 傾向方程式 15

A.7 モデル支配方程式 16

A.7.1 渦度方程式と発散方程式 16

A.7.2 変数変換 17

B 地球定数 **20**

B.1 飽和比湿 20

B.2 地球大気の物理定数 21

C 謝辞 **22**

第1章　座標系

1.1　座標系

座標系は, 水平方向には緯度 ϕ, 経度 λ を, 鉛直方向には σ をとる.

手順は,

1. 地球中心, 北極の向き, 赤道面内の経度 0 度の方向を決めて, 極座標系 (r, λ, ϕ) をとる[1].
2. 各緯度経度において, 地表面気圧 p_s をとる位置 r を決める.
3. 鉛直座標軸をとり直す. 気圧を p として, $\sigma = \dfrac{p}{p_s}$ を鉛直座標とする.

である.

91/10/31 保坂征宏

[1] 数学での極座標系は緯度でなく余緯度をとる.

第2章　支配方程式・力学過程

2.1　はじめに

ここでは支配方程式を記し, 特に力学過程[1]について詳細を記す.

まず支配方程式の中で力学過程と認知される部分・項を示す. ついで各々の詳細を述べる.

91/12/10 沼口敦・保坂征宏

[1]力学過程という単語が適切かどうかは不明である. 実態は, モデルにおいて各格子点で計算されない部分を指す.

2.2　支配方程式

ここでは支配方程式を順に示す.

2.2.1　連続の式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi = -\nabla_\sigma \cdot \boldsymbol{v}_H - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \tag{2.1}$$

2.2.2　静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT_v}{\sigma} \tag{2.2}$$

2.2.3　運動方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial VA}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial UA}{\partial \mu} + \mathcal{D}(\zeta) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UA}{\partial \lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial VA}{\partial \mu} - \nabla_\sigma^2(\Phi + R\bar{T}\pi + KE) + \mathcal{D}(D) \tag{2.4}$$

2.2.4　熱力学の式

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial \mu} + T'D \\ &\quad -\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T\left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) + \frac{Q}{C_p} + \mathcal{D}(T) + \mathcal{D}'(\boldsymbol{v})\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2.5　水蒸気の式

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial Uq}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial Vq}{\partial \mu} + qD \\ &\quad -\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial \sigma} + S_q + \mathcal{D}(q)\end{aligned} \tag{2.6}$$

93/06/16 沼口敦・保坂征宏

ここで,

$$\theta \equiv T\left(p/p_0\right)^{-\kappa} \tag{2.7}$$

$$\kappa \equiv R/C_p \tag{2.8}$$

$$\Phi \equiv gz \tag{2.9}$$

$$\pi \equiv \ln p_S \tag{2.10}$$

$$\dot{\sigma} \equiv \frac{d\sigma}{dt} \tag{2.11}$$

$$\mu \equiv \sin\varphi \tag{2.12}$$

$$T_v \equiv T(1+\epsilon_v q) \tag{2.13}$$

$$U \equiv u\cos\varphi \tag{2.14}$$

$$V \equiv v\cos\varphi \tag{2.15}$$

$$\zeta \equiv \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial V}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial\mu} \tag{2.16}$$

$$D \equiv \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu} \tag{2.17}$$

$$UA \equiv (\zeta+f)V - \dot{\sigma}\frac{\partial U}{\partial\sigma} - \frac{RT'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + \mathcal{F}_\lambda\cos\varphi \tag{2.18}$$

$$VA \equiv -(\zeta+f)U - \dot{\sigma}\frac{\partial V}{\partial\sigma} - \frac{RT'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu} + \mathcal{F}_\varphi\cos\varphi \tag{2.19}$$

$$KE \equiv \frac{U^2+V^2}{2(1-\mu^2)} \tag{2.20}$$

$$T \equiv \bar{T}(\sigma) + T' \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_H\cdot\nabla &\equiv \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)_\sigma \\ &= \frac{U}{a(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{V}{a}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_\sigma\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\nabla_\sigma^2 \equiv \frac{1}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right]. \tag{2.23}$$

ただし , $\mathcal{D}(\zeta),\mathcal{D}(D),\mathcal{D}(T),\mathcal{D}(q)$ は水平拡散項であり , 2.4 で説明される. $\mathcal{F}_\lambda,\mathcal{F}_\varphi$ は小規模運動過程による力である. Q は放射, 凝結, 小規模運動過程等による加熱・温度変化, S_q は凝結, 小規模運動過程等による水蒸気ソース項, $\mathcal{D}'(\boldsymbol{v})$ は摩擦熱である.

2.2.6 境界条件

鉛直流に関する境界条件は

$$\dot{\sigma} = 0 \quad at \quad \sigma = 0,\ 1. \tag{2.24}$$

である. よって (2.1) から, 地表気圧の時間変化式と σ 系での鉛直速度 $\dot{\sigma}$ を求める診断式

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} = -\int_0^1 \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi d\sigma - \int_0^1 D d\sigma, \tag{2.25}$$

$$\dot{\sigma} = -\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t} - \int_0^\sigma D d\sigma - \int_0^\sigma \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi d\sigma, \tag{2.26}$$

が導かれる.

ただし熱的境界条件については 6 章において記述する.

2.3 力学過程

2.4 水平拡散項

2.4.1 波数依存型

水平拡散項は, 次のように ∇^{N_D} の形で計算されるのが普通である.

$$\mathcal{D}(\zeta) = -K_{HD}\left[(-1)^{N_D/2}\nabla^{N_D} - \left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_D/2}\right]\zeta, \tag{2.27}$$

$$\mathcal{D}(D) = -K_{HD}\left[(-1)^{N_D/2}\nabla^{N_D} - \left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_D/2}\right]D, \tag{2.28}$$

$$\mathcal{D}(T) = -(-1)^{N_D/2}K_{HD}\nabla^{N_D}T, \tag{2.29}$$

$$\mathcal{D}(q) = -(-1)^{N_D/2}K_{HD}\nabla^{N_D}q. \tag{2.30}$$

この水平拡散項は計算の安定化のための意味合いが強い. 小さなスケールに選択的な水平拡散を表すため, N_D としては, 4~16 を用いる.

2.4.2 波数非依存型

水平拡散を波数に依存しない一様な値にすることもできる. 詳細省略.

93/06/16 沼口敦・保坂征宏

第3章　雲

3.1　はじめに

大気大循環モデルにおいては積雲を様に表現するだけの分解能を持たないので, 雲の発生する条件並びに雲が大気大循環に与える影響については何らかの方法で評価せざるを得ない. 雲が発生する条件および雲が大気大循環に与える影響のうちの熱・運動量輸送効果については[1], 大規模場の速度や熱力学的諸量から評価することが多い. この評価方法は一般に積雲パラメタリゼーションと呼ばれ, 特に以下の型のものが良く用いられる.

- 湿潤対流調節
- クオスキーム
- 浅い積雲[2]
- 荒川シューバートスキーム[3]

また, そもそも大気が過飽和状態にあれば降水が起こる. これを大規模凝結という.

以下では各種パラメタリゼーション並びに大規模凝結について解説する.

93/03/18 保坂征宏
97/02/13 堀之内武

[1] 雲が大気大循環に与える他の効果として放射が知られる.
[2] dennou モデルには Tiedtke による, 係数を増やす形のものがある.
[3] dennou モデルには現在存在しない.

3.2 対流調節

3.3 クオスキーム

3.4 荒川シューバート スキーム

3.5 浅い積雲

3.6 大規模凝結

第4章　放射

4.1　はじめに

放射過程としては太陽から射出された短波放射と地球において射出された長波放射とに分けてとり扱う.

93/03/18 保坂征宏

4.2 短波放射

4.2.1 短波放射フラックス

短波放射過程においては, 水蒸気とそれ以外の大気による吸収のみを考慮し多重散乱は考慮しない. 吸収係数の異なった N_S 個の波長帯を考える (k-distribution method). F_S は,

$$\begin{aligned} F_S(z) &= \sum_i^{N_S} a_i \left[(1-\alpha_A) F_S^I \exp\left(-\tau_{S,i}(z)\sec\zeta\right) \right. \\ &\quad \left. -\alpha_g (1-\alpha_A) F_S^I \exp\left(-\tau_{S,i}(0)\sec\zeta\right) \exp\left(-(\tau_{S,i}(0)-\tau_i(z))\sec\zeta_0\right) \right] \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで, F_S^I は大気上端からの入射, ζ は入射角, ζ_0 は散乱光の相当入射角で, $\sec\zeta_0 = 1.66$ とする. α_A は大気の散乱によるアルベドであり, 一定値を与える. α_g は地表面のアルベドである.

$\tau_{S,i}(z)$ は, 大気上端を 0 とした光学的厚さであり,

$$\tau_{S,i}(z) = \int_z^\infty k_{S,i}\rho q dz + \int_z^\infty \bar{k}_{S,i}\rho dz \tag{4.2}$$

$k_{S,i}$ は波長帯 i の水蒸気に対する吸収係数, $\bar{k}_{S,i}$ は波長帯 i の水蒸気以外の大気に対する吸収係数である. これら吸収係数は z 等に依存しない一定値を与える. a_i は波長帯 i の放射エネルギーの全体に対する割合である.

地表面での吸収は,

$$F_S(0) = \sum_i^{N_S} a_i (1-\alpha_g)(1-\alpha_A) F_S^I \exp(-\tau_{S,i}(0)\sec\zeta), \tag{4.3}$$

で与えられる.

4.2.2 入射フラックス

入射フラックス F_S^I は, 太陽定数を S_0, 太陽地球間の距離の, その時間平均値との比を r_S, 入射角を ζ とすると,

$$F_S^I = -S_0 r_S^{-2} \cos\zeta. \tag{4.4}$$

ζ は次の式で与えられる.

$$\cos\zeta = \cos\varphi\cos\delta_S\cos H + \sin\varphi\sin\delta_S \tag{4.5}$$

δ_S は太陽の赤経, H は時角 (地方時から π を引いたもの) である.

93/03/18 沼口敦・保坂征宏

地球の年平均入射量および年平均入射角は, 近似的に, 次のようになる.

$$\overline{F_S^I} \simeq -S_0(0.127 + 0.183\cos^2\varphi), \tag{4.6}$$

$$\overline{\cos\zeta} \simeq 0.410 + 0.590\cos^2\varphi. \tag{4.7}$$

4.3 長波放射

長波放射過程においては, 水蒸気とそれ以外の大気による吸収と射出のみを考慮する. 吸収係数の異なった N_R 個の波長帯を考える (k-distribution method). F_R は,

$$F_R(z) = (\pi B(T_g) - \pi B(T_s))\,\mathcal{T}^f(z,0) + \pi B(T(z_T))\mathcal{T}^f(z,z_T) - \int_0^{z_T} \frac{d\pi B}{d\xi}\mathcal{T}^f(z,\xi)d\xi \qquad (4.8)$$

ここで, $\mathcal{T}^f(z_1,z_2)$ は, $z=z_1,z_2$ 間のフラックス透過関数, $\pi B \equiv \sigma_{SB}T^4$ は放射源関数である.

フラックス透過関数,$\mathcal{T}^f(z_1,z_2)$ は,

$$\mathcal{T}^f(z_1,z_2) = \sum_{i=1}^{N_R} b_i \exp\left(-\delta_R|\tau_{R,i}(z_1) - \tau_{R,i}(z_2)|\right) \qquad (4.9)$$

$\tau_i(z)$ は, 大気上端を 0 とした光学的厚さであり,

$$\tau_{R,i}(z) = \int_z^\infty k_{R,i}\rho q dz + \int_z^\infty \bar{k}_{R,i}\rho dz \qquad (4.10)$$

$k_{R,i}$ は波長帯 i の水蒸気に対する吸収係数, $\bar{k}_{R,i}$ は波長帯 i の水蒸気以外の大気に対する吸収係数である. これら吸収係数は z 等に依存しない一定値を与える. b_i は波長帯 i の放射エネルギーの全体に対する割合であり, 一定値をとると近似する. また, $\delta_R = 1.5$ を用いる.

93/03/18 沼口敦・保坂征宏

第5章　鉛直輸送

5.1　はじめに

分解能よりも小さいスケールの運動にともなう大気中の運動量や熱, 水蒸気の輸送は大気の大規模場の量によって評価せざるを得ない. この評価方法としては, Yamada-Mellor のクロージャーモデルが良く知られる. また, 地表面からの諸量の輸送量の評価も別途おこなう必要がある. この評価にはバルク法がよく用いられる. 以下ではそれらの解説を行なう.

93/03/18 保坂征宏

5.2 Yamada-Mellor のクロージャーモデル

Yamada-Mellor のクロージャーモデルとは, 格子点間隔以下のスケールの運動による運動量・熱・水蒸気の鉛直方向の輸送を以下のように評価するモデルである.

- 大規模場の量の鉛直拡散で評価する.
- 鉛直拡散係数も大規模場の量から決定する. 係数の決め方は基本的には乱流理論に基づく. その際に高次の相関係数を低次の相関係数で評価し[1], さらに地球大気近似を行なう.
- 鉛直拡散係数の評価方法として簡易な『レベル 1』 から複雑な『レベル 4 』までの 4 種類が存在する.

以下では各レベルの鉛直拡散係数の決定法を記す.

5.2.1 Yamada-Mellor レベル 1

5.2.2 Yamada-Mellor レベル 2

拡散係数 K_M, K_T, K_q は成層状態に依存し, u, v, T の関数として次のように与えられる[2].

$$K_M = l^2 \frac{\Delta|\boldsymbol{v}|}{\Delta z} S_M \tag{5.1}$$

$$K_T = K_q = l^2 \frac{\Delta|\boldsymbol{v}|}{\Delta z} S_H \tag{5.2}$$

l は混合距離であり, Blakadar(1962) に従って,

$$l = \frac{kz}{1 + kz/l_0} \tag{5.3}$$

ととる. l_0 =300m である.

S_M, S_H は Richardson 数の関数として求められる. まず, バルク Richardson 数 R_{iB} は

$$R_{iB} = \frac{\dfrac{q}{\theta_s}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta z}}{\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta z}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta v}{\Delta z}\right)^2} \tag{5.4}$$

で定義される. ここで, $(\Delta A)_{k-1/2}$ は $A_k - A_{k-1}$ を表す.

93/03/18 沼口敦・保坂征宏

[1] 一般にある次数の相関係数を計算するためにはより高次の相関係数が必要である. したがって, 相関係数を厳密に乱流理論に基づいて決定することはできない. 高次の相関係数を低次の相関係数で評価することによってある次数で係数の計算を打ち切る (クロージャー) ことができる.

[2] 数理モデルと離散化とが混在している.

これから, フラックス Ricahrdson 数 R_f は,

$$R_f = \frac{1}{2\beta_2}\left[\beta_1 + \beta_4 R_{iB} - \sqrt{(\beta_1 + \beta_4 R_{iB})^2 - 4\beta_2\beta_3 R_{iB}}\right], \tag{5.5}$$

ただし,

$$\alpha_1 = 3A_2\gamma_1 \tag{5.6}$$
$$\alpha_2 = 3A_2(\gamma_1 + \gamma_2) \tag{5.7}$$
$$\beta_1 = A_1 B_1(\gamma_1 - C_1) \tag{5.8}$$
$$\beta_2 = A_1[B_1(\gamma_1 - C_1) + 6A_1 + 3A_2] \tag{5.9}$$
$$\beta_3 = A_2 B_1 \tag{5.10}$$
$$\beta_4 = A_2[B_1(\gamma_1 + \gamma_2) - 3A_1], \tag{5.11}$$

$$(A_1, B_1, A_2, B_2, C_1) = (0.92, 16.6, 0.74, 10.1, 0.08), \tag{5.12}$$
$$\gamma_1 = \frac{1}{3} - \frac{2A_1}{B_1}, \ \ \gamma_2 = \frac{B_2}{B_1} + 6\frac{A_1}{B_1}. \tag{5.13}$$

さらに,

$$\widetilde{S_H} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 R_f}{1 - R_f} \tag{5.14}$$
$$\widetilde{S_M} = \frac{\beta_1 - \beta_2 R_f}{\beta_3 - \beta_4 R_f}\widetilde{S_H}, \tag{5.15}$$

を用いて,

$$S_M = B_1^{1/2}(1 - R_f)^{1/2}\widetilde{S_M}^{3/2} \tag{5.16}$$
$$S_H = B_1^{1/2}(1 - R_f)^{1/2}\widetilde{S_M}^{1/2}\widetilde{S_H}. \tag{5.17}$$

5.2.3 Yamada-Mellor レベル 3

5.2.4 Yamada-Mellor レベル 4

5.3 バルク法

ここでは地表面から大気への運動量, 熱, 水蒸気のフラックスのバルク法による評価方法を記す.

$$
\begin{aligned}
(F_\lambda)_{1/2} &= -\rho_s K_{M,s} u_1 = -\rho_s C_M |\boldsymbol{v}_1| u_a && (5.18)\\
(F_\varphi)_{1/2} &= -\rho_s K_{M,s} v_1 = -\rho_s C_M |\boldsymbol{v}_1| v_1 && (5.19)\\
(F_T)_{1/2} &= \rho_s C_p K_{T,s} \left(T_g - \left(\frac{T}{\Pi} \right)_1 \right) = \rho_s C_p C_H |\boldsymbol{v}_1| \left(T_g - \left(\frac{T}{\Pi} \right)_1 \right) && (5.20)\\
(F_q)_{1/2} &= \rho_s \beta K_{q,s} \left(q^*(T_g, p_s) - q_1 \right) = \rho_s \beta C_E |\boldsymbol{v}_1| \left(q^*(T_g, p_s) - q_1 \right) && (5.21)
\end{aligned}
$$

バルク係数 C_M, C_H, C_E は Louis(1979), Louis *et al.*(1982) に従って,

$$
C_M = \begin{cases} C_{M0} \left(1 + 10 R_{iB} / \sqrt{1 + 5 R_{iB}} \right)^{-1} & R_{iB} \geq 0 \\ C_{M0} \left[1 - 10 R_{iB} \left(1 + 75 C_{M0} \sqrt{\frac{z_1}{z_{M0}} |R_{iB}|} \right)^{-1} \right] & R_{iB} < 0 \end{cases} \qquad (5.22)
$$

$$
C_H = C_E = \begin{cases} C_{H0} \left(1 + 15 R_{iB} \sqrt{1 + 5 R_{iB}} \right)^{-1} & R_{iB} \geq 0 \\ C_{H0} \left[1 - 15 R_{iB} \left(1 + 75 C_{H0} \sqrt{\frac{z_1}{z_{H0}} |R_{iB}|} \right)^{-1} \right] & R_{iB} < 0 \end{cases} . \qquad (5.23)
$$

ここで, R_{iB} はバルク Richardson 数で,

$$
R_{iB} = \frac{\frac{g}{\theta_s} (\theta_1 - \theta_g) / z_1}{(u_1 / z_1)^2} = \frac{g}{\theta_s} \frac{T_1 (p_s / p_1)^\kappa - T_g}{u_1^2 / z_1} . \qquad (5.24)
$$

C_{M0}, C_{H0} は中立時のバルク係数であり,

$$
\begin{aligned}
C_{M0} &= \left(\frac{k}{\ln \left(\frac{z_1}{z_{M0}} \right)} \right)^2 , && (5.25)\\
C_{H0} &= \left(\frac{k}{\ln \left(\frac{z_1}{z_{H0}} \right)} \right)^2 . && (5.26)
\end{aligned}
$$

z_{M0}, z_{H0} は地表面の粗度長である.

93/03/18 沼口敦・保坂征宏

第6章　地表面過程

6.1　はじめに

ここでは地表面モデルについてまとめる.

大気大循環モデルにおける地表面のモデルにはいろいろな種類がある. しかし土壌モデル等を含まない現 AGCM5 において, 地表面での過程と言えるものはバルク法による熱や運動量等のやり取りくらいしかない. それでも, 地表面における諸量は幾つもあり, 放射や重力波抵抗等の大気中の現象にも影響を与える. 地表面における諸量には温度, アルベド, 粗度, 熱容量, 湿潤度 (蒸発のしやすさ), 高度分散 (重力波抵抗パラメタリゼーション用) などがある. これらの多くはファイルなどの形でモデルの外から与える必要がある. 地表面の温度は, 海面の場合外から与えられるが, 陸面の場合予報変数である.

93/03/18 保坂征宏
97/02/13 堀之内武

第7章　重力波抵抗

7.1　はじめに

大循環モデルでは分解できない小規模な重力波による運動量輸送は, 対流圏ジェットと成層圏極夜ジェットの分離や中間圏弱風層の形成に寄与していると考えられている. このようなサブグリッドスケールの重力波のうち山岳波の効果を表すものとして McFarlane (1987) のパラメタリゼーションがある[1].

7.2　McFarlane (1987) のパラメタリゼーション

サブグリッドスケールの山岳波の砕波による加速・減速効果をパラメタライズする. 停滞波を仮定し, 水平波長を適当に仮定する (100km 程度) と, その運動量フラックスは, 地表面の起伏 (地表面高度の分散として与える) と大気最下層の風速で決まる. この波が鉛直に伝播し, 近似的に対流不安定の条件を満たすときに砕波するとして, 砕波による運動量の収束・発散を見積もり, 運動方程式の強制項として取り入れる. 以下では McFarlane (1987) に沿ってパラメタリゼーションの解説を行う.

[単色波の場合で解説]

まず, 単色波の場合を考えてパラメタリゼーションの原理を説明する. 簡単のために x-z 平面で考える (x は水平, z は鉛直座標). 地形

$$h\cos(kx) \tag{7.1}$$

上の停滞内部重力波を考える. 地球回転の効果を無視し線形化した非弾性方程式系での停滞波における各物理量の擾乱間の関係は以下のようになる.

$$w' = \overline{U}\frac{\partial \psi'}{\partial x}, \tag{7.2}$$

$$u' = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\,\overline{U}\psi'), \tag{7.3}$$

$$\theta' = -\psi'\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}. \tag{7.4}$$

96/01/22 堀之内武

[1]現在 AGCM5 では McFarlane のパラメタリゼーションのみを提供している

ここで, 上に線のついた量は平均量 (グリッド平均) を, ダッシュのついた量は擾乱を表す. u (または U), w, ρ, θ はそれぞれ水平風速, 鉛直風速, 密度, 温位を表す. $\psi'(x,z)$ は変位で, $z=0$ では

$$\psi'(x,0) = h\cos(kx) \tag{7.5}$$

である. 停滞重力波の分散関係式は,

$$m = \overline{N}/\overline{U}, \tag{7.6}$$

(N はブラントバイサラ振動数), $\psi'(x,z)$ の解は

$$\psi'(x,z) = A(z)\cos(kx + \int_0^z m dz), \tag{7.7}$$

$$A(z) = h\left[\frac{\overline{\rho}(0)\overline{N}(0)\overline{U}(0)}{\overline{\rho}(z)\overline{N}(z)\overline{U}(z)}\right]^{1/2}, \tag{7.8}$$

である. (7.2), (7.3), (7.5), (7.6) より重力波の運動量フラックスは,

$$\begin{aligned} \tau &= \overline{\rho}\overline{u'w'} \\ &\simeq -\frac{kh^2}{2}\overline{\rho}(0)\overline{N}(0)\overline{U}(0) \end{aligned} \tag{7.9}$$

と近似できる.

砕波は対流不安定により起き, 砕波の起きる領域では重力波はちょうど「飽和」した状態を保つとする. これは Lindzen (1981) により導入された方法である.

対流不安定の条件,

$$\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\theta} + \theta') < 0 \tag{7.10}$$

に (θ は温位), 重力波の解を代入すると, 近似的に,

$$-F(z)\sin(kx + \int_0^z m dz) > 1, \tag{7.11}$$

$$F(z) \equiv \frac{\overline{N}(z)\,h}{\overline{U}(z)}\left[\frac{\overline{\rho}(0)\overline{N}(0)\overline{U}(0)}{\overline{\rho}(z)\overline{N}(z)\overline{U}(z)}\right]^{1/2}, \tag{7.12}$$

となる. ここで F はフルード数と捉えることが出来る. (7.11) より, 高さ z において砕波が起きる x が存在する条件は,

$$|F(z)| > 1 \tag{7.13}$$

である. (7.9), (7.12) より,

$$\begin{aligned} F(z)^2 &= \frac{h^2\overline{\rho}(0)\overline{N}(0)\overline{U}(0)}{\overline{\rho}(z)\overline{N}(z)^{-1}\overline{U}(z)^3}, \\ &= \frac{-\tau}{\frac{k}{2}\overline{\rho}(z)\overline{N}(z)^{-1}\overline{U}(z)^3}, \end{aligned} \tag{7.14}$$

と書ける. (7.12) は高さ z まで砕波がない場合にのみあてはまるが, (7.14) の形にすれば伝播途中で砕波が起るため $|\tau|$ が高さとともに減少する場合にも使える. これを用いて, 高さ z で砕波する条件式 (7.13) を,

$$|\tau| > \frac{k}{2}\overline{\rho}(z)\overline{N}(z)^{-1}|\overline{U}(z)^3| \tag{7.15}$$

と表せる. (7.13) では,「臨界フルード数」が 1 ということになるが, 単色波でない場合やシアー不安定を考慮した場合は 1 よりも小さくなる. そこで 1 以下の定数 F_c を越えたら不安定になるという形に一般化すると上式は

$$|\tau| > \frac{k}{2} F_c^2 \overline{\rho}(z) \overline{N}(z)^{-1} |\overline{U}(z)^3| \tag{7.16}$$

となる.

(7.16) が成り立たない場合 τ は z に関し一定であるとし, (7.16) が成り立つ場合は砕波が起きるとする. その場合, 右辺を越える分は砕波により削られ, 両辺がちょうど等しい状態, 即ち重力波が「飽和」した状態が実現するとする. 削られたことによる運動量の収束 $(-\partial\tau/\partial z)$ により平均風が加速される.

[GCM のための定式化]

(7.9) にならって山岳波の運動量フラックスを

$$\tau = -\frac{Ekh_e^2}{2} \overline{\rho}(0) \overline{N}(0) \overline{U}(0), \tag{7.17}$$

$$h_e \equiv \min(2S_d\,, \frac{\overline{U}}{\overline{N}}), \tag{7.18}$$

とする. ここで E は "efficiency" で, 経験的に決められる 1 以下の定数である. また, S_d はサブグリッドスケール (かつ回転の影響が小さい 500km 以下程度) の地形の標準偏差である[2]. McFarlane は S_d を合衆国海軍の標高の 10 分刻のデータセットから作成した. h_e の定義で $\overline{U}/\overline{N}$ との min をとっているのは, 最下層から飽和条件を満たす場合に備えてのことである ($\because$ (7.12) で $z = 0$ のとき $F = \overline{N}h/\overline{U}$ になる).

砕波の条件式 (7.16) も E 倍する:

$$|\tau| > \frac{Ek}{2} F_c^2 \overline{\rho}(z) \overline{N}(z)^{-1} |\overline{U}(z)^3|\,. \tag{7.19}$$

これによって E は砕波の条件を変えずに重力波抵抗の大きさのみを変えるパラメターとなる. τ は下層から計算していき, (7.19) を満たさないところでは z に関し一定とし, (7.19) を満たすところでは (7.19) の両辺が等しくなるようにする. なお, $\overline{U}(z)$ の符合が入れ替わる一番下の z (クリティカルレベル) で $\tau = 0$ となることに注意.

F_c, E, k の値は経験的に決める. McFarlane は

$$F_c^2 = 0.5 \tag{7.20}$$

$$Ek/2 = 8 \times 10^{-6} m^{-1} \tag{7.21}$$

を採用した. AGCM5 のデフォルトもこれならっている. E と k は独立に定める必要がないことに注意. これは, 例えば水平波長を 100 km ($k = 6.28 \cdot 10^{-6}$ m^{-1}) と仮定すると, $E = 0.127$ に相当する.

[2] $\sin^2$ の標準偏差は $2^{-1/2}$ であるから, (7.18) では, $2S_d$ より $2^{1/2}S_d$ とするほうが良いように思えるが, McFarlane は (NCAR CCM3 も) こうしている. 強いてこじつければ, ノコギリ型の地形を考えればこうなるが. なお, AGCM5 で「地表高度分散」としているグリッド値 `GRZSD` はこの $2S_d$ に対応することに注意.

ここまで無視してきた風の向きも考えねばならない. 運動量フラックスは,

$$\boldsymbol{\tau} = \tau \boldsymbol{e}_0, \tag{7.22}$$

$$\boldsymbol{e}_0 \equiv \frac{1}{(\overline{u}(0)^2 + \overline{v}(0)^2)^{1/2}} (\overline{u}(0), \overline{v}(0)), \tag{7.23}$$

と表せる. ここで τ は (7.17) と同様

$$\tau = -\frac{Ekh_e^2}{2} \overline{\rho}(0) \overline{N}(0) \overline{U}(0), \tag{7.24}$$

であるが, $\overline{U}(0)$ は改めて $z = 0$ での水平風速の絶対値として定義する:

$$\overline{U}(0) \equiv (\overline{u}(0)^2 + \overline{v}(0)^2)^{1/2}. \tag{7.25}$$

さらに高さ z での $\overline{U}$ を地表風速に平行な風速成分,

$$\overline{U}(z) \equiv (\overline{u}(z), \overline{v}(z)) \cdot \boldsymbol{e}_0, \tag{7.26}$$

とすると, 砕波の条件には風向きの変化を考慮していなかった (7.19) をそのまま用いることができる.

パラメタライズされた重力波の効果は, 運動方程式の強制項 $-\partial \boldsymbol{\tau}/\partial z$ で表される.

7.3 文献

McFarlane, N.A., 1987: The effect of orographically excited gravity wave drag on the general circulation of the lower stratosphere and troposphere. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1775–1800.

Lindzen, R.S., 1981: Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J. Geophys. Res.*, **86**, 9707–9714.

第 A 章　支配方程式系の導出

A.1　設定

全大気は, ともに理想気体である乾燥空気および水蒸気から成る混合大気とする. 雲水量は無視する. また, 水蒸気量が全大気に占める割合は小さいと仮定し, 全大気の定圧比熱を乾燥大気の値で近似する.

水蒸気量の保存については, 凝結および蒸発による生成消滅を考慮する. しかし, この量が全大気に与える効果は小さいとし, 全大気の質量保存則, 運動エネルギー保存則, 全エネルギー保存則に影響を及ぼさないとする.

重力加速度は地球中心に向いていると仮定する. また, 運動の水平スケールが鉛直スケールよりもかなり大きい運動を想定し, 静力学平衡近似を行なう. さらに, 運動は地球表面付近に限られることを仮定して近似を行なう.

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

A.2　基礎方程式系の導出

方程式系は 6 本の予報方程式と 1 本の診断方程式からなる. 予報方程式は, 全質量の連続の式, 水蒸気量の式, 運動方程式 (3 成分), 熱力学の式からなる. これらは, それぞれ, 全質量保存則, 水蒸気量の保存則, 全質量に関する運動量保存則, 全質量に関する全エネルギー保存則から導出する. 診断方程式には, 理想気体の状態方程式を用いる. [1]

!! 注意: この Appendix 中では導出の都合上, 乾燥空気の気体定数を R^d 定圧比熱を c_p^d とし, 全大気の気体定数を R とおいた. しかし, 本文中では, 乾燥空気の気体定数を R, 定圧比熱を c_p と表記している.

A.2.1　状態方程式

乾燥空気, 水蒸気の状態方程式はそれぞれ

$$p^d = \rho^d R^d T, \tag{A.1}$$

$$p^v = \rho^v R^v T, \tag{A.2}$$

である. ここで $\bullet^d$, $\bullet^v$ はそれぞれ乾燥空気および水蒸気に関する量であることを示す. したがって, 全圧 $p = p^d + p^v$ は,

$$p = (\rho^d R^d + \rho^v R^v) T \tag{A.3}$$

$$= \rho R^d (1 + \epsilon_v q) T, \tag{A.4}$$

となる. ここで, $q = \rho_v/\rho$ は比湿, であり, $\epsilon_v \equiv 1/\epsilon - 1$, $\epsilon \equiv R^d/R^v (= 0.622)$ である. したがって, 全大気の状態方程式は,

$$p = \rho R T. \tag{A.5}$$

ただし, $R \equiv R^d(1 + \epsilon_v q)$ である. あるいは, 仮温度 $T_v \equiv T(1 + \epsilon_v q)$ を用いれば,

$$p = \rho R^d T_v. \tag{A.6}$$

A.2.2　連続の式

全大気の質量保存則は, 水蒸気の生成消滅を無視すれば, [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0. \tag{A.7}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

[1] 乾燥空気と水蒸気は, 同じ速度と温度をもつことを暗黙のうちに仮定している. したがって, 水蒸気に関する運動量保存則および全エネルギー保存則および状態方程式を考慮する必要がない.

[2] 次で示すように水蒸気式では生成消滅を含めている. したがって, 全大気の質量保存則は, 水蒸気の生成消滅が起きても全質量が保存するように, 乾燥大気量が変化することを要請していることになる.

あるいは, ラグランジュ形式で記述すれば,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{A.8}$$

A.2.3　水蒸気の式

水蒸気密度 ρ^v に対する質量保存則は, 単位時間単位体積あたりの生成消滅量を S とすれば,

$$\frac{\partial\rho^v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^v v_j) = S. \tag{A.9}$$

比湿 $q = \rho^v/\rho$ に関する式は, 原理的には式 (A.7) と式 (A.9) から得ることができる. しかし, 今の場合, 式 (A.7) で水蒸気の生成消滅を無視したので, 正しくは得られない. そこで比湿の生成消滅に関する項を改めて S_q と定義する.

$$\frac{dq}{dt} = S_q. \tag{A.10}$$

A.2.4　運動方程式

運動量保存則は, 水蒸気の生成消滅にともなう運動量変化を無視すれば次のように書ける.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_i} = F_i'. \tag{A.11}$$

ここで, p は圧力, σ_{ij} は粘性応力テンソル, Φ^* は地球の引力によるポテンシャル[3] , F_i' はその他の外力項である. あるいは連続の式を用いてラグランジュ形式で記述すると

$$\rho\frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_i} = F_i', \tag{A.12}$$

となる. ここで, 粘性項と外力項を F_i とおき, さらにベクトル表示する

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \nabla p + \rho\nabla\Phi^* = \boldsymbol{F}. \tag{A.13}$$

A.2.5　熱力学の式

単位質量あたりの全エネルギーは, 運動エネルギー $\boldsymbol{v}/2$ と内部エネルギー ε およぼポテンシャルエネルギー Φ^* の和で表現される. この時間変化率の式は, 水蒸気の生成消滅による影響を無視すれば,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \varepsilon + \Phi^*\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \varepsilon + \Phi^*\right)v_j + pv_j - \sigma_{ij}v_i\right] = \rho Q + F_i'v_i, \tag{A.14}$$

[3] これは遠心力を考慮しない地球の質量にのみ起因したポテンシャル.

である. ここで, Q は外界からの加熱率である. 一方, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の保存式は, 運動量保存式 (A.11) に v_i をかけ連続の式を用いて変形することで得られる. 変形の際には $\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = 0$ であるとしている. [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2 + \rho\Phi^*\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho v_j \boldsymbol{v}^2 + \rho\Phi^* v_j + p v_j - \sigma_{ij} v_i\right) = p\frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + F_i' v_i, \quad \text{(A.15)}$$

となる. 式 (A.14) から式 (A.15) を引き去ると, 次のように内部エネルギーの式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon v_j) = -p\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho Q. \quad \text{(A.16)}$$

連続の式を用いてラグランジュ形式に書き直せば

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \rho Q. \quad \text{(A.17)}$$

ここで, 外界からの加熱の項と粘性による加熱の項をまとめて Q^* とおいた.

内部エネルギーを温度を用いて表現すると $\varepsilon = c_v T$ である. さらに状態方程式 (A.5) を用いて式 (A.17) を変形する. $c_p = c_v + R$ であることに注意すれば

$$\frac{dc_pT}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} + Q^*, \quad \text{(A.18)}$$

となる. ここで, c_p を乾燥空気の定圧比熱 c_p^d (定数) で近似すると[5] 次の熱力学の式を得る.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p^d\rho}\frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{c_p^d}. \quad \text{(A.19)}$$

[4]導出の過程を示す. 左辺第 1 項と第 2 項は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
v_i\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + v_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i) &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i^2) - \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right) - \rho v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i^2) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\rho v_j\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{2}v_i^2\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho v_j v_i^2) + \frac{1}{2}v_i^2\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho v_j v_i^2).
\end{aligned}$$

また, 左辺第 4 項は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
v_i\rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_i} &= \Phi^*\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)\right\} + \rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial t} + v_i\rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi^*) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\Phi^* v_i).
\end{aligned}$$

[5]この近似には疑問が残る. 状態方程式においては, 気体定数 R を R^d とする近似は (仮温度 T_v を導入することで) 行なわなかった. c_p についてだけ近似するのは近似のレベルに一貫性がないように思われる.

A.3　回転系への変換

A.3.1　回転系への変換公式

方程式系を, 一定の自転角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する回転系に変換する.

A.3.2　スカラーの変換公式

慣性系における時間微分を添字 a で, 回転系を添字 r で表現する. このとき, 任意のスカラー ψ に対して,

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\mathrm{a}} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\mathrm{r}}, \tag{A.20}$$

が成りたつ. [6]

A.3.3　ベクトルの変換公式

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対する慣性系および回転系での微分は次の関係をもつ.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{a}} = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}. \tag{A.21}$$

(証明)　　任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ を, 慣性系および回転系でそれぞれ次のように表す.

$$\text{慣性系} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}A_x + \boldsymbol{j}A_y + \boldsymbol{k}A_z, \tag{A.22}$$

$$\text{回転系} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}'A'_x + \boldsymbol{j}'A'_y + \boldsymbol{k}'A'_z. \tag{A.23}$$

時間微分をとると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{a}} &= \boldsymbol{i}\left(\frac{dA_x}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{j}\left(\frac{dA_y}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{k}\left(\frac{dA_z}{dt}\right)_{\mathrm{a}} \\
&= \boldsymbol{i}'\left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{j}'\left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{k}'\left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_{\mathrm{a}} + \left(\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt}\right)_{\mathrm{a}}A'_x + \left(\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt}\right)_{\mathrm{a}}A'_y + \left(\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}\right)_{\mathrm{a}}A'_z \\
&= \boldsymbol{i}'\left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{j}'\left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{k}'\left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}'A'_x + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{j}'A'_y + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{k}'A'_z \\
&= \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

[6] これは自明のこととしたい. スカラー ψ の座標変換は座標変換テンソルに依存しない (で同じ値をとる) からである. なお, Pedlosky (1987) では, ベクトルの変換公式を使ってスカラーの変換を証明している. ところがベクトルの変換公式ではスカラーの変換公式を使っているので, 何がなんだかわからない.
一方, ベクトルの座標変換は, 座標変換テンソルとの積で表現される. したがって, 座標変換テンソル自体が時間変化する場合, 当然ベクトルの時間微分は座標変換テンソルの時間微分の影響を受ける.

(証明終り)

ここで $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル) とおけば慣性系での速度 $\boldsymbol{v}_a \equiv (d\boldsymbol{r}/dt)_{\rm a}$ (これまでの $\boldsymbol{v}$) は回転系での速度 $\boldsymbol{v} \equiv (d\boldsymbol{r}/dt)_{\rm r}$ を用いて次のように表すことができる.

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{A.25}$$

さらに, 式 (A.21) で $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}_{\rm a}$ とおけば, 速度の時間微分項は

$$\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}), \tag{A.26}$$

と変換できる.

A.3.4　回転系への変換

変換の式 (A.26) を用いて運動方程式を回転系で記述する.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \nabla\Phi^* + \boldsymbol{F}. \tag{A.27}$$

ここで, 重力加速度 $\boldsymbol{g} \equiv \nabla\Phi^* - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v})$ を定義すれば, 運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}, \tag{A.28}$$

となる.

連続の式および熱力学の式においては, ラグランジュ微分が作用している密度および温度は座標変換に無関係なスカラーであるため, その時間微分の形は変わらない. 連続の式は, 速度場の発散を含むが, これは座標変換によっても値は変わらない. したがって, これらの式は形を変えない. [7]

[7] ここで私が気になっているのは, 運動エネルギー保存の式が, 回転系への移行によって形を変えることである.

A.4　球座標への変換

A.4.1　直交曲線座標系における微分

一般の直交曲線座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) において, スカラー $\bullet$ およびベクトル $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ は次のように表現される. なお, h_i は各軸方向の規模因子であり, 各軸方向の基底ベクトルは $\boldsymbol{e}_i$ とする.

$$\nabla\bullet = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_3}\right), \tag{A.29}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1h_2A_3)\right], \tag{A.30}$$

$$\nabla^2\bullet = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_3}\right)\right], \tag{A.31}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(h_2A_2)}{\partial\xi_3}\right], \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial(h_1A_1)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(h_3A_3)}{\partial\xi_1}\right], \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(h_1A_1)}{\partial\xi_2}\right]\right), \tag{A.32}$$

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_1} + \frac{v_2}{h_2}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_2} + \frac{v_3}{h_3}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_3}, \tag{A.33}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{e}_k\left[\frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{v_k}{h_k}\frac{\partial v_k}{\partial\xi_j} + \left(-\frac{v_j}{h_j}\frac{1}{h_k}\frac{\partial h_j}{\partial\xi_k} + \frac{v_k}{h_k}\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_k}{\partial\xi_j}\right)v_j\right]. \tag{A.34}$$

A.4.2　球座標系における微分

重力加速度 $\boldsymbol{g}$ が地球中心を向いているとみなして, 方程式系を球座標 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\lambda, \varphi, r)$ に変換する. 回転系に固定した直交直線座標 (x_1, x_2, x_3) との関係は

$$x_1 = r\cos\varphi\cos\lambda, \tag{A.35}$$

$$x_2 = r\cos\varphi\sin\lambda, \tag{A.36}$$

$$x_3 = r\sin\varphi, \tag{A.37}$$

である. ここで, λ は緯度, φ は経度, r は鉛直座標である. また, 基底ベクトルを $(\boldsymbol{e}_\lambda, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_r)$, 速度ベクトルを (u, v, w) で表す.

各方向の規模因子 (scale factor) は

$$h_\lambda = r\cos\varphi, \quad h_\varphi = r, \quad h_r = 1. \tag{A.38}$$

したがって, スカラー $\bullet$ およびベクトル $\boldsymbol{A} = (A_\lambda, A_\varphi, A_r)$ に関する微分表現は次のようになる.

$$\nabla\bullet = \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\bullet}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_r\frac{\partial\bullet}{\partial r}, \tag{A.39}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[r\frac{\partial A_\lambda}{\partial\lambda} + r\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi A_\varphi) + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)\right], \tag{A.40}$$

$$\nabla^2\bullet = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\bullet}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cos\varphi\frac{\partial\bullet}{\partial r}\right)\right], \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi A_\lambda) - \frac{\partial A_r}{\partial\lambda}\right] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi A_\lambda)\right],\end{aligned} \tag{A.42}$$

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial\bullet}{\partial\varphi} + w\frac{\partial\bullet}{\partial r}, \tag{A.43}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} &= \boldsymbol{e}_\lambda\left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\varphi} + w\frac{\partial A_\lambda}{\partial r} + \frac{u}{r}A_r - \frac{u\tan\varphi}{r}A_\varphi\right] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_\varphi\left[\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + w\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{v}{r}A_r + \frac{u\tan\varphi}{r}A_\lambda\right] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_r\left[\frac{\partial A_r}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_r}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + w\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{v}{r}A_\varphi - \frac{u}{r}A_\lambda\right].\end{aligned} \tag{A.44}$$

A.4.3 球座標への変換

自転角速度ベクトルの表現は次のようになる.

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = 2\Omega(\boldsymbol{e}_\varphi\cos\varphi + \boldsymbol{e}_r\sin\varphi)\times(u\boldsymbol{e}_\lambda + v\boldsymbol{e}_\varphi + w\boldsymbol{e}_r) \tag{A.45}$$

$$= (2\Omega\cos\varphi w - 2\Omega\sin\varphi v)\boldsymbol{e}_\lambda + 2\Omega\sin\varphi u\boldsymbol{e}_\varphi - 2\Omega\cos\varphi u\boldsymbol{e}_r. \tag{A.46}$$

したがって, 運動方程式は

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + 2\Omega v\sin\varphi - 2\Omega w\cos\varphi + \frac{uv}{r}\tan\varphi - \frac{uw}{r} + F_\lambda, \tag{A.47}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} - 2\Omega u\sin\varphi - \frac{u^2}{r}\tan\varphi - \frac{vw}{r} + F_\varphi, \tag{A.48}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u\cos\varphi + \frac{u^2}{r} + \frac{v^2}{r} + F_r. \tag{A.49}$$

連続の式は

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(u) + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi v) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 w) = 0. \tag{A.50}$$

熱力学の式は

$$\frac{d}{dt}T = \frac{1}{c_p^d\rho}\frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{c_p^d}. \tag{A.51}$$

状態方程式は

$$p = \rho RT. \tag{A.52}$$

水蒸気の式は

$$\frac{dq}{dt} = S_q. \tag{A.53}$$

ここで,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + w\frac{\partial}{\partial r}, \tag{A.54}$$

である.

A.5 z-座標プリミティブ方程式

A.5.1 静力学平衡近似

鉛直方向の運動方程式に対し, 静力学平衡近似を行なう.

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g. \tag{A.55}$$

このとき, 運動エネルギーの保存則を考慮して, 水平方向の運動方程式に対しても近似を施す. 運動エネルギーの式は, 運動方程式の各成分にそれぞれ u, v, w をかけることで得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) &= u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt} \\
&= u\left\{-\frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + \underbrace{2v\Omega\sin\varphi}_{(1)} - \underbrace{2w\Omega\cos\varphi}_{(2)} + \underbrace{\frac{uv}{r}\tan\varphi}_{(3)} - \underbrace{\frac{uw}{r}}_{(4)} + F_\lambda\right\} \\
&\quad + v\left\{-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \underbrace{2\Omega u\sin\varphi}_{(1)} - \underbrace{\frac{u^2}{r}\tan\varphi}_{(3)} - \underbrace{\frac{vw}{r}}_{(5)} + F_\varphi\right\} \\
&\quad + w\left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g + \underbrace{2\Omega u\cos\varphi}_{(2)} + \underbrace{\frac{u^2}{r}}_{(4)} + \underbrace{\frac{v^2}{r}}_{(5)} + F_r\right\} \\
&= -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}\nabla p - gw - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}.
\end{aligned} \tag{A.56}$$

コリオリの力およびメトリック項は同じ番号のもの同士で打ち消しあって, 運動エネルギーの時間変化に寄与しないことがわかる.[8] したがって, 静力学平衡近似の際に鉛直成分の式から落とした項 (2),(4),(5) に対応した水平成分の式の項も取り除く. これにより, 運動方程式の水平成分は次のようになる.

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv\tan\varphi}{r} + fv - \frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \tag{A.57}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2\tan\varphi}{a} - fu - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi. \tag{A.58}$$

ここで, f はコリオリパラメータ $f \equiv 2\Omega\sin\varphi$ である.

A.5.2 薄い球殻近似

大気の層が地球半径に比べて薄いことを仮定し, 方程式中の r を, 代表的な地球半径 a でおきかえる. また, r による微分はすべて海抜高度 z による微分でおきかえる. このとき基礎方程式は次のようになる.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{A.59}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

[8] 遠心力を重力加速度から分離してエネルギーの式で考慮すると, この寄与はキャンセルすることなく残る.

$$\frac{dq}{dt} = S_q, \tag{A.60}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv\tan\varphi}{a} + fv - \frac{1}{\rho a\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + F_\lambda, \tag{A.61}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2\tan\varphi}{a} - fu - \frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + F_\varphi, \tag{A.62}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \tag{A.63}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p^d\rho}\frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{c_p^d}, \tag{A.64}$$

$$p = \rho R^d T_v. \tag{A.65}$$

ここで,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \dot\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}, \tag{A.66}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} \equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}(v\cos\varphi) + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{A.67}$$

A.6 σ-座標プリミティブ方程式

静力学平衡のもとでは, 気圧 p は鉛直座標 z に対し 単調減少する関数である. そこで, 鉛直座標を z から, 地表面気圧 p_s で規格化した気圧座標,

$$\sigma \equiv \frac{p}{p_s}, \tag{A.68}$$

に変換する. σ と z の関係は, 静力学平衡の式を変形して得られる.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{g\sigma}{R^d T_v}. \tag{A.69}$$

A.6.1 σ-座標変換公式

z- 座標から σ- 座標への変換公式を示す..

鉛直微分

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bullet}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}. \end{aligned} \tag{A.70}$$

水平微分

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma, \end{aligned} \tag{A.71}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma. \end{aligned} \tag{A.72}$$

時間微分

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma. \end{aligned} \tag{A.73}$$

ラグランジュ微分はこれらを用いて,

$$\left(\frac{d \bullet}{dt}\right)_z = \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_z + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_z + w\left(\frac{\partial \bullet}{\partial z}\right)_z$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma + w\left(\frac{\partial \bullet}{\partial z}\right)_\sigma \\
&\quad + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma - w\right\}\frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \\
&= \left(\frac{d \bullet}{dt}\right)_\sigma . \qquad \text{(A.74)}
\end{aligned}
$$

ここで, σ-座標鉛直速度 $\dot{\sigma}$ を定義する.

$$
\dot{\sigma} \equiv \frac{g\sigma}{R^d T_v}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma - w\right\}. \qquad \text{(A.75)}
$$

A.6.2　σ-座標プリミティブ方程式系

静力学平衡の式

式 (A.69) を重力ポテンシャル $\Phi = gz$ を用いて書けば,

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{R^d T_v}{\sigma}. \qquad \text{(A.76)}
$$

運動方程式

水平の圧力勾配は, 式 (A.71) および式 (A.72) を p に対して適用し, 式 (A.68) を用いれば次のように変換される.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_z &= \frac{1}{\rho}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial p}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma\right\} \\
&= \frac{R^d T_v}{p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{R^d T_v}{p}\frac{g\sigma}{R^d T_v}p_s\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma \\
&= R^d T_v\left(\frac{\partial \pi}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \qquad \text{(A.77)}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)_z = R^d T_v\left(\frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\right)_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \qquad \text{(A.78)}
$$

ここで $\pi \equiv \ln p_s$ である. したがって, 運動方程式の水平成分は,

$$
\frac{du}{dt} - fv - \frac{uv}{a}\tan\varphi = -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{R^d T_v}{a\cos\varphi}\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + F_\lambda, \qquad \text{(A.79)}
$$

$$
\frac{dv}{dt} + fu + \frac{u^2}{a}\tan\varphi = -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{R^d T_v}{a}\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + F_\varphi. \qquad \text{(A.80)}
$$

連続の式

速度の発散は,

$$
(\nabla\cdot\boldsymbol{v})_z = \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v}\frac{\partial u}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma\right]
$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^dT_v}\frac{\partial}{\partial\sigma}(v\cos\varphi)\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_\sigma\right] - \frac{g\sigma}{R^dT_v}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{dz}{dt}\right)_\sigma \\
= & \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^dT_v}\frac{\partial u}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_\sigma\right] \\
& + \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^dT_v}\frac{\partial}{\partial\sigma}(v\cos\varphi)\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_\sigma\right] \\
& - \frac{g\sigma}{R^dT_v}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)_\sigma + \dot\sigma\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right] \\
= & \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right)_\sigma + \frac{\partial\dot\sigma}{\partial\sigma} \\
& - \frac{g\sigma}{R^dT_v}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)_\sigma + \dot\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)\right] \\
= & (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H)_\sigma + \frac{\partial\dot\sigma}{\partial\sigma} + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)_\sigma . \qquad \text{(A.81)}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H \equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)_\sigma + \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right)_\sigma . \qquad \text{(A.82)}
$$

ゆえに, z- 座標連続の式は次のように変換される.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_z + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})_z &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_\sigma + (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H)_\sigma + \frac{\partial\dot\sigma}{\partial\sigma} + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)_\sigma \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_\sigma + (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H)_\sigma + \frac{\partial\dot\sigma}{\partial\sigma} + \frac{\rho}{p_s}\left(\frac{d}{dt}\frac{p_s}{\rho}\right)_\sigma \\
&= \left(\frac{d\ln p_s}{dt}\right)_\sigma + (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_H)_\sigma + \frac{\partial\dot\sigma}{\partial\sigma}. \qquad \text{(A.83)}
\end{aligned}
$$

したがって $\pi \equiv \ln p_s$ を用いて記述すれば次のようになる.

$$
\frac{d\pi}{dt} + \nabla\cdot\boldsymbol{v}_H + \frac{\partial\dot\sigma}{\partial\sigma} = 0. \qquad \text{(A.84)}
$$

熱力学の式

式 (A.64) の右辺第 1 項は次のように変換される.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_p^d\rho}\frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p^d\rho}\left\{\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma p + \dot\sigma\frac{\partial p}{\partial\sigma}\right\} \\
&= \frac{1}{c_p^d\rho}\left\{\sigma\frac{\partial p_s}{\partial t} + \sigma\boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma p_s + \dot\sigma p_s\right\} \\
&= \frac{R^dT_v}{c_p^d}\left\{\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi + \frac{\dot\sigma}{\sigma}\right\}. \qquad \text{(A.85)}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma = \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad \text{(A.86)}
$$

したがって, 熱力学の式はつぎのようになる.

$$
\frac{dT}{dt} = \frac{R^dT_v}{c_p^d}\left\{\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi + \frac{\dot\sigma}{\sigma}\right\} + \frac{Q^*}{c_p^d}. \qquad \text{(A.87)}
$$

A.6.3　境界条件

ここで, σ 座標における境界条件について述べる.

地表面高度

$$\Phi = \Phi_s(\lambda, \varphi) \quad \text{at} \quad \sigma = 1. \tag{A.88}$$

すなわち, Φ_s は表面地形を表す. この境界条件を用いて, 静力学平衡の式を鉛直積分することで, 任意の σ における高度 Φ を求めることができる.

σ 座標鉛直速度

$$\dot{\sigma} = 0 \quad at \quad \sigma = 0,\ 1. \tag{A.89}$$

水平流および熱力学変数

ここでは述べない.

A.6.4　傾向方程式

連続の式を鉛直方向に $\sigma = 0$ から $\sigma = 1$ まで積分し, $\dot{\sigma}$ に関する境界条件を用いれば, 傾向方程式とよばれる π の時間変化に関する式が得られる.

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\int_0^1 \boldsymbol{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi d\sigma - \int_0^1 D d\sigma. \tag{A.90}$$

この式を用いれば, $\dot{\sigma}$ の情報がなくても地表面気圧の時間変化を求めることができる. なお, ここでは後のことを考えて $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_H$ を D と表現している. D については次節で改めて定義する.

鉛直速度 $\dot{\sigma}$ は, 連続の式を鉛直方向に $\sigma = 0$ から $\sigma = \sigma$ まで積分することで診断的に得られる.

$$\dot{\sigma} = -\sigma \frac{\partial \pi}{\partial t} - \int_0^\sigma D d\sigma - \int_0^\sigma \boldsymbol{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi d\sigma. \tag{A.91}$$

A.7 モデル支配方程式

A.7.1 渦度方程式と発散方程式

渦度:

$$\zeta \equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(u\cos\varphi). \tag{A.92}$$

発散:

$$D \equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(v\cos\varphi). \tag{A.93}$$

渦度方程式

運動方程式の u の式に $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi$ を作用し, v の式に $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}$ を作用し差をとって変形すれば次の渦度方程式を得る.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\zeta v\cos\varphi) - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta u) \\ &\quad -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\dot\sigma\frac{\partial v}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{ap_s}\frac{\partial p_s}{\partial\varphi} - F_\varphi + fu\right] \\ &\quad -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[-\cos\varphi\dot\sigma\frac{\partial u}{\partial\sigma} - \frac{R^dT_v}{ap_s}\frac{\partial p_s}{\partial\lambda} + F_\lambda\cos\varphi + fv\cos\varphi\right].\end{aligned} \tag{A.94}$$

発散方程式

運動方程式の u の式に $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}$ を作用し, v の式に $\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi$ を作用し和をとって変形すると次の発散方程式を得る.

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta v) - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\zeta u\cos\varphi) \\ &\quad -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\dot\sigma\frac{\partial u}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{a\cos\varphi p_s}\frac{\partial p_s}{\partial\lambda} - F_\lambda - fv\right] \\ &\quad -\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\dot\sigma\frac{\partial v}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{ap_s}\frac{\partial p_s}{\partial\varphi}\cos\varphi - F_\varphi\cos\varphi + fu\cos\varphi\right] \\ &\quad -\nabla^2_\sigma(\Phi + KE).\end{aligned} \tag{A.95}$$

ここで,

$$\nabla^2_\sigma = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}), \tag{A.96}$$

$$KE = \frac{u^2+v^2}{2}. \tag{A.97}$$

94/04/13 石渡正樹
97/04/15 赤堀浩司

A.7.2　変数変換

支配方程式系における変数を, モデル内部で用いている変数に変換する. まず, $\mu \equiv \sin\varphi$ を導入する. また速度場 u, v は $U \equiv u\cos\phi$, $V \equiv \cos\phi$ に変換する. [9] このとき, 水平風の渦度 ζ と発散 D は次のように変換され, この表現をあらためて ζ および D と定義する.

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\cos\varphi) \\
&= \frac{1}{a\cos^2\varphi}\frac{\partial v\cos\phi}{\partial\lambda} - \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\cos\varphi) \\
&= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial V}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial\mu},
\end{aligned} \tag{A.98}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi) \\
&= \frac{1}{a\cos^2\varphi}\frac{\partial u\cos\phi}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi) \\
&= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu}.
\end{aligned} \tag{A.99}$$

水平風による移流は次のように変換される.

$$\begin{aligned}
\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial\bullet}{\partial\phi} &= \frac{1}{a\cos^2\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\cos\phi\bullet) - \bullet\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\cos\phi)\right\} \frac{1}{a\cos\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}(v\cos\phi\bullet) - \bullet\frac{\partial}{\partial\phi}(v\cos\phi)\right\} \\
&= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(U\bullet) - \frac{\bullet}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\mu}\frac{\partial}{\partial\phi}(V\bullet) - \frac{\bullet}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu} \\
&= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(U\bullet) + \frac{1}{a\mu}\frac{\partial}{\partial\phi}(V\bullet) + \bullet D.
\end{aligned} \tag{A.100}$$

水平風による移流のもうひとつの記述を連続の式の変換のために示す.

$$\begin{aligned}
\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial\bullet}{\partial\phi} &= +\frac{u\cos\phi}{a\cos^2\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{v\cos\phi}{a\cos\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\phi} \\
&= +\frac{U}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + \frac{V}{a}\frac{\partial\bullet}{\partial\mu} \\
&\equiv \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\bullet.
\end{aligned} \tag{A.101}$$

これらを用いて, 方程式系を次のように変数変換する.

連続の式[10]

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi = -\nabla_\sigma\cdot\boldsymbol{v}_H - \frac{\partial\dot\sigma}{\partial\sigma}. \tag{A.102}$$

渦度方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}(\zeta V) - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta U) \\
&\quad -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\dot\sigma\frac{\partial V}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu} - F_\varphi\cos\varphi + fU\right] \\
&\quad -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\dot\sigma\frac{\partial U}{\partial\sigma} - \frac{R^dT_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + F_\lambda\cos\varphi + fV\right].
\end{aligned} \tag{A.103}$$

[9] u, v のままでも渦度や発散にすれば極での特異性を回避できるのではないか?
[10] 発散はすべて D を用いて表現すべきだろう.

発散方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta V) - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}(\zeta U)\\ &\quad -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\dot\sigma\frac{\partial U}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} - F_\lambda\cos\varphi - fV\right]\\ &\quad -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\dot\sigma\frac{\partial V}{\partial\sigma} + \frac{R^dT_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu} - F_\varphi\cos\varphi + fU\right]\\ &\quad -\nabla^2_\sigma(\Phi + KE). \end{aligned} \tag{A.104}$$

熱力学の式

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT}{\partial\mu} + TD\\ &\quad -\dot\sigma\frac{\partial T}{\partial\sigma} + \kappa T\left(\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi + \frac{\dot\sigma}{\sigma}\right) + \frac{Q^*}{C_p}. \end{aligned} \tag{A.105}$$

水蒸気の式

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial Uq}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial Vq}{\partial\mu} + qD\\ &\quad -\dot\sigma\frac{\partial q}{\partial\sigma} + S_q. \end{aligned} \tag{A.106}$$

仮温度 T_v を次のように σ のみに依存する場 $\bar T_v(\sigma)$ と, そこからのずれ成分 T'_v にわけて記述する.

渦度方程式で T_v を含む項は次のように変形される。

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^dT_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^dT_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\ =\ &-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^d\bar T_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right] - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^dT'_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\ &-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^d\bar T_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^dT'_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\ =\ &-\frac{1}{a}\frac{R^d\bar T_v}{a}\frac{\partial^2\pi}{\partial\lambda\partial\mu} - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^dT'_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\ &+\frac{1}{a}\frac{R^d\bar T_v}{a}\frac{\partial^2\pi}{\partial\mu\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^dT'_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\ =\ &-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[+\frac{R^dT'_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{R^dT'_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]. \end{aligned} \tag{A.107}$$

発散方程式で T_v を含む項は次のように変形される.

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^dT_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^dT_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\ =\ &-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^d\bar T_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right] - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^dT'_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right]\\ &-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^d\bar T_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^dT'_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]\\ =\ &-\frac{1}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(R^d\bar T_v\pi) - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^dT'_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}(R^d\bar{T}_v\pi)\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^dT'_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right] \\
= \quad & -\nabla^2_\sigma(R^d\bar{T}_v\pi) - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{R^dT'_v}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{R^dT'_v}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right]. \quad \text{(A.108)}
\end{aligned}
$$

熱力学の式の右辺第 1–3 項は次のように変形される.

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT}{\partial\mu} + TD \\
= \quad & -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U\bar{T}}{\partial\lambda} - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial V\bar{T}}{\partial\mu} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial\mu} + \bar{T}D + T'D \\
= \quad & -\frac{\bar{T}}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} - \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial\lambda} - \frac{\bar{T}}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial\mu} + \bar{T}\left[\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{\bar{1}}{a}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right] + T'D \\
= \quad & -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial\mu} + T'D. \quad \text{(A.109)}
\end{aligned}
$$

以上を用いて程式系を記述すれば次のようになる.

連続の式

$$
\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi = -\nabla_\sigma\cdot\boldsymbol{v}_H - \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma}. \quad \text{(A.110)}
$$

静水圧の式

$$
\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = -\frac{R^dT_v}{\sigma}. \quad \text{(A.111)}
$$

運動方程式

$$
\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial VA}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial UA}{\partial\mu}, \quad \text{(A.112)}
$$

$$
\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UA}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VA}{\partial\mu} - \nabla^2_\sigma(\Phi + R\bar{T}_v\pi + KE). \quad \text{(A.113)}
$$

ここで,

$$
UA \equiv (\zeta+f)V - \dot{\sigma}\frac{\partial U}{\partial\sigma} - \frac{RT'}{a}\frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + F_\lambda\cos\varphi \quad \text{(A.114)}
$$

$$
VA \equiv -(\zeta+f)U - \dot{\sigma}\frac{\partial V}{\partial\sigma} - \frac{RT'}{a}(1-\mu^2)\frac{\partial\pi}{\partial\mu} + F_\varphi\cos\varphi. \quad \text{(A.115)}
$$

熱力学の式

$$
\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial UT'}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial VT'}{\partial\mu} + T'D - \dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial\sigma} + \kappa T\left(\frac{\partial\pi}{\partial t} + \boldsymbol{v}_H\cdot\nabla_\sigma\pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) + \frac{Q^*}{C^d_p} \quad \text{(A.116)}
$$

水蒸気の式

$$
\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial Uq}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial Vq}{\partial\mu} + qD - \dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial\sigma} + S_q. \quad \text{(A.117)}
$$

式 (A.17) で導入した Q^* から粘性による寄与 $c_pD(\boldsymbol{v})$ を再び分離し, $Q^* = Q + c_pD(\boldsymbol{v})$ とする. 一般に粘性は運動方程式において適当なパラメタリゼーションによって表現する. また, 渦度, 発散, 温度, 水蒸気の式に対してそれぞれ水平拡散項 $D(\zeta)$, $D(D)$, $D(T)$, $D(q)$ をつける. この項の付加は主に数値的安定性の要請によるものであるが, 物理的には後で行なう離散化のスケール以下の運動を表現していると解釈できる. 最後に, 乾燥大気の気体定数および定圧比熱 R^d, c_p をそれぞれ R, c_p のようにあらためて置きなおせば, 支配方程式系 (2.1) — (2.6) を得る.

第Ｂ章　地球定数

B.1　飽和比湿

飽和比湿 $q^*(T,p)$ は飽和蒸気圧 $e^*(T)$ を用いて近似的に,

$$q^*(T,p) = \frac{\epsilon e^*(T)}{p}. \tag{B.1}$$

ここで, $\epsilon = 0.622$ であり,

$$\frac{1}{e_v^*}\frac{\partial e_v^*}{\partial T} = \frac{L}{R_v T^2} \tag{B.2}$$

よって, 蒸発の潜熱 L, 水蒸気の気体定数 R_v を一定とすれば,

$$e^*(T) = e^*(T = 273\mathrm{K}) \exp\left[\frac{L}{R_v}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{T}\right)\right], \tag{B.3}$$

$e^*(T = 273\mathrm{K}) = 611$ [Pa] である.

(B.2) より,

$$\frac{\partial q^*}{\partial T} = \frac{L}{R_v T^2} q^*(T,p). \tag{B.4}$$

93/03/20 沼口敦・保坂征宏

B.2　地球大気の物理定数

地球大気の基本的な物理定数を以下に示す.

地球半径	a	m	6.37×10^6
重力加速度	g	ms^{-2}	9.8
大気定圧比熱	C_p	J kg^{-1} K^{-1}	1004.6
大気気体定数	R	J kg^{-1} K^{-1}	287.04
蒸発潜熱	L	J kg^{-1}	2.5×10^6
水蒸気定圧比熱	C_v	J kg^{-1} K^{-1}	1810.
大気気体定数	R_v	J kg^{-1} K^{-1}	461.
液体水の密度	d_{H_2O}	J kg^{-1} K^{-1}	1000.
0° での飽和蒸気	$e^*(273\mathrm{K})$	Pa	611
Stefan Bolzman 定数	σ_{SB}	W m^{-2} K^{-4}	5.67×10^{-8}
Kálman 定数	k		0.4
水蒸気分子量比	ϵ_v		0.622
仮温度の係数	$\delta_v = \epsilon_v^{-1} - 1$		0.606
比熱と気体定数の比	$\kappa = R/C_p$		0.286

93/03/20 沼口敦・保坂征宏

第C章　謝辞

資源

agcm5

プログラム製作

沼口敦

プログラム製作協力

保坂征宏, 竹広真一, 石渡正樹, 堀之内武

文章

保坂征宏, 竹広真一, 石渡正樹, 堀之内武, 余田成男

版権と引用

本資源の版権は地球流体電脳倶楽部に属する. 地球流体電脳倶楽部の英語名は'GFD-DENNOU Club' である.

資源の利用にあたっては地球流体電脳倶楽部の定める規定にしたがっていただきたい. 原則として, 教育的目的の場合には自由に使用・改変して良いものとしている. 詳細は心得を参照されたい. 地球流体電脳倶楽部の定める規定は地球流体電脳倶楽部サーバー (dennou) 上の

```
ftp://dennou-k.gaia.h.kyoto-u.ac.jp/saloon/dennou/To.Users
```

というファイルに収められている. 電脳サーバーは次の 4 箇所におかれている.

```
dennou-h.ees.hokudai.ac.jp
dennou-t.ms.u-tokyo.ac.jp
dennou-k.gaia.h.kyoto-u.ac.jp
dennou-q.geo.kyushu-u.ac.jp
```

agmc5 を用いて作成された著作物等には, 英語では例えば "The calculations were performed by agcm5, GFD-DENNOU Club." 日本語では例えば「計算は地球流体電脳倶楽部の agcm5 をもちいた.」のように明記していただければ幸いである. 「著者」に対応するものとしては地球流体電脳倶楽部 (GFD-DENNOU Club) をあげていただければ幸いである.

沿革

agcm5 は, 気象庁数値予報課の全球現業予報モデル (1985 年に住明正・増田耕一両氏が気象庁から東大理学部地球物理学科気象研究室に移植した) を参考に, 沼口敦氏が開発した大気大

93/07/09 林祥介
97/03/11 余田成男

循環モデルである. agcm5 の 5 は氏の開発の第 5 版を意味する数字であり, 1988 年 の作業開始以来, 5 回にわたる大きな変更を経たものである. この間, 地球流体電脳ライブラリ (dcl) との整合性をも考慮し, 大学等での研究・教育用に利用できる形に整理がなされてきた. 残念ながら, agcm5 は現実大気のシミュレーションモデルとしてのチューンがなされていないモデルであり, 若干の水過程と若干の放射過程を含むものの, その実体は単なる球面プリミティブモデルといったほうが正しい.

国立環境研究所, 並びに, 東京大学気候システム研究センターでは, 沼口敦氏が製作の中心となり agcm5 をベースとして気候シミュレーションモデル, CCSR/NIES モデルが作成された.

地球流体電脳倶楽部版 agcm5 は沼口氏によって提供された資源に, マニュアルの整備, インストール道具の整備, バグフィックスを行なったものである.