寒冷氷床モデルの定式化

村田 泰洋

2002 年 07 月 20 日

目 次

1 考える系 **2**

2 氷床力学の基礎方程式系 **3**
2.1 基礎方程式 3
2.2 境界条件 5
2.2.1 運動学的境界条件 5
2.2.2 力学的境界条件 5
2.2.3 熱学的境界条件 5

3 浅氷近似 **6**
3.1 基礎方程式 6
3.1.1 連続の式 6
3.1.2 運動方程式 7
3.1.3 熱力学の式 8
3.1.4 構成方程式 9
3.2 浅氷近似を用いた境界条件 10
3.2.1 運動学的境界条件 10
3.2.2 力学的境界条件 10
3.2.3 熱力学的境界条件 11

4 基礎方程式からの置き換え **12**
4.1 速度場 12
4.2 氷厚の式 12
4.3 解くべき式と境界条件 13

1　考える系

図 1.1 のような水平方向に無限に広がる空間に年間涵養量 M_s で成長する氷床を考える. ここで氷床の温度は十分に低いものとして融解は考えない. このように全層において融点以下の氷床を寒冷氷床 ($cold\ ice\ sheet$) と呼ぶ. 寒冷氷床は Hutter 1983 に従って非圧縮非ニュートン流体として扱う. 氷床の水平スケール L は鉛直スケール H に比べて十分大きいものとする. また氷床の重みによる基盤地形の変形はないと考える. 水平方向を x, 鉛直方向を z の 2 次元直交直線座標を用いる.

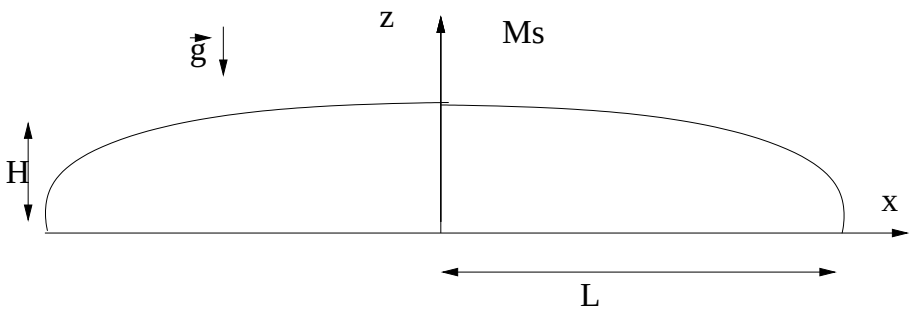

図 1.1: 系の設定

2　氷床力学の基礎方程式系

2.1　基礎方程式

寒冷氷床の基礎方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{v} &= 0 && (2.1)\\ 0 &= \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{g} && (2.2)\\ \rho\frac{dc_pT}{dt} &= -\mathrm{div}(k\mathrm{grad}T) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D}) && (2.3) \end{aligned}$$

である. 氷床の流動は非常にゆっくりなので加速度項は無視する (Hutter 1983). 記号の意味はそれぞれ次の通りである.

$\boldsymbol{v}$	速度ベクトル $=(u,v)$
ρ	氷の密度
$\boldsymbol{\sigma}$	応力テンソル
$\boldsymbol{g}$	重力加速度
T	氷温
$\boldsymbol{D}$	歪み速度テンソル
k	熱伝導度
c_p	氷の比熱

構成方程式は一般的に

$$\boldsymbol{D} = A\left(\frac{\tau}{\eta_0}\right)^{n-1}\boldsymbol{\sigma'} \qquad (2.4)$$

として表す (Glen 1955 [1]).

η_0 は氷の剛性率である. τ は偏差応力の 2 次の不変量で偏差応力テンソルで σ' を用いて次のように表す.

$$\tau^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma'}^2) \qquad (2.5)$$

偏差応力テンソル $\boldsymbol{\sigma'}$ は次のように表す.

$$\boldsymbol{\sigma'} = p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\sigma} \qquad (2.6)$$

[1] 従来の研究では氷の構成方程式は η_0 を含まない表記をしている. しかし, それだとべき乗数 n の値を変える度に粘性率の次元を変えなければならないので上述の表記を用いることにする.

$\boldsymbol{I}$ は単位行列であり, p は圧力である. 圧力 p は非圧縮であることから平均垂直応力で表せる[2].

$$p = -\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3} \tag{2.7}$$

式 (2.4) における n の値は応力実験や観測で定められる値である. パラメータ A は温度の関数でアレニウスの式,

$$A = A' \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \tag{2.8}$$

を用いる (Glen 1955). A' の値は構成する氷の異方性や不純物に依存する. ここでは A' は一定とする. Q はクリープ活性化エネルギー, R は気体定数である.

歪み速度テンソル $\boldsymbol{D}$ を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\boldsymbol{v} + (\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^T\right) \tag{2.9}$$

直線直交座標での表示

直線直交座標での書き表すと以下のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \tag{2.12}$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_p (\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})T + k\nabla^2 T + \sum_{i,j} D_{ij}\sigma_{ij} \tag{2.13}$$

$$\begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xz} \\ D_{zx} & D_{zz} \end{pmatrix} = A\left(\frac{\tau}{\eta}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{zx} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$\tau^2 = \frac{1}{2}({\sigma'_{xx}}^2 + {\sigma'_{zz}}^2) + {\sigma'_{zx}}^2 \tag{2.15}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \tag{2.16}$$

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \tag{2.17}$$

[2]Malvern 1969 によればニュートン粘性流体においてストークスの条件を満たす, もしくは非圧縮流体である場合は圧力は平均垂直応力であると言える. しかし非ニュートン流体の場合は必ずしも平均垂直応力で表せるとは限らない.

$$A = A' \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \tag{2.18}$$

$$\begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xz} \\ D_{zx} & D_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

2.2　境界条件

2.2.1　運動学的境界条件

氷床の底面 $(z = 0)$ では

$$w(0) = 0 \tag{2.20}$$

である. また表面 $(z = h)$ では, 年間涵養量 M_s による寄与により

$$w(h) = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{M_s}{\rho} \tag{2.21}$$

となる. ここで M_s は場所と時間に依存するとして $M_s = M_s(x, h)$ とし, 負の場合は年間消耗量を表す.

2.2.2　力学的境界条件

表面では表面に沿った応力は働かないので表面に対する法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = n_i$ とすると次のように表す.

$$(\sigma_{ij}n_j - \sigma_{kl}n_l n_k n_i)\big|_{z=h} = 0 \tag{2.22}$$

底面では滑べらず固定されているとするので

$$u(z = 0) = 0 \tag{2.23}$$

である.

2.2.3　熱学的境界条件

底面では地殻熱流量 γ を与える.

$$k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = -\gamma. \tag{2.24}$$

表面温度 T_s は場所と時間の関数として $T_s = T(x, h)$ とする.

3　浅氷近似

氷床の水平スケール L は鉛直スケール H に比べて十分小さい. [3] よって浅氷近似 (*shallow ice approximation*)(Hutter 1983) を用いて, 系の簡略化を行う.

3.1　基礎方程式

添字 $*$ を付した変数は無次元量として, この系の代表的なスケールはそれぞれ以下のように表す.

$$
\begin{aligned}
&(x, z) = (Lx_*, Hz_*)\\
&t = t_0 t_*\\
&(u, w) = (Uu_*, Ww_*)\\
&(\sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zz}) = (\Sigma_{xx}\sigma_{xx*}, \Sigma_{xz}\sigma_{xz*}, \Sigma_{zz}\sigma_{zz*})\\
&(\sigma'_{xx}, \sigma'_{xz}, \sigma'_{zz}) = (\Sigma'_{xx}\sigma'_{xx*}, \Sigma'_{xz}\sigma'_{xz*}, \Sigma'_{zz}\sigma'_{zz*})\\
&A = A_0 A_*\\
&\rho = \rho_0 \rho_*\\
&g = g_0 g_*\\
&T = T_0 T_*\\
&\tau = \tau_0 \tau_*\\
&\eta = \eta_0 \eta_*
\end{aligned}
$$

縦横比は $\varepsilon \equiv H/L$ とする.

3.1.1　連続の式

質量保存則 (2.10) を無次元化する.

$$\frac{U}{L}\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{W}{H}\frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0, \tag{3.25}$$

である. 各項のスケール $U/L, W/H$ は同程度なので

$$W = \varepsilon U \tag{3.26}$$

[3] ここでは縦横比を $H/L \sim O(10^{-3})$ 程度と考えている.

とする. 連続の式は

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0 \tag{3.27}$$

となる.

3.1.2　運動方程式

σ_{xx} は式 (2.17) から

$$\sigma_{xx} = 2\sigma'_{xx} + \sigma_{zz}$$

の関係をみたすので, 運動方程式は以下のように書き換えられる.

$$2\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g$$

これらの式を無次元化すると

$$2\varepsilon\Sigma'_{xx}\frac{\partial \sigma'_{xx*}}{\partial x_*} + \varepsilon\Sigma_{zz}\frac{\partial \sigma_{zz*}}{\partial x_*} + \Sigma_{xz}\frac{\partial \sigma_{xz*}}{\partial z_*} = 0, \tag{3.28}$$

$$\varepsilon\Sigma_{zx}\frac{\partial \sigma_{zx*}}{\partial x_*} + \Sigma_{zz}\frac{\partial \sigma_{zz*}}{\partial z_*} = \rho_* g_* H \rho g \tag{3.29}$$

となる.

Σ'_{xx} と Σ_{xz} の比は構成方程式 (2.14) を用いると

$$\frac{\Sigma'_{xx}}{\Sigma_{xz}} = O\left(\frac{D_{xx}}{D_{xz}}\right) \tag{3.30}$$

である. ここでせん断応力は $\sigma_{xz} = \sigma'_{xz}$ の関係を用いた. また歪み速度の定義式 (2.19) と式 (3.26) から

$$\begin{aligned}\frac{D_{xx}}{D_{xz}} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)} \\ &= O\left(\frac{U}{L}\Big/\left(\frac{U}{H} + \frac{W}{L}\right)\right) \\ &= O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.31}$$

であることがわかる. 式 (3.30), 式 (3.31) から

$$\Sigma'_{xx} = \varepsilon\Sigma_{xz} \tag{3.32}$$

とする. よって式 (3.28) は

$$2\varepsilon^2\Sigma_{xz}\frac{\partial\sigma'_{xx*}}{\partial x_*}+\varepsilon\Sigma_{zz}\frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial x_*}+\Sigma_{xz}\frac{\partial\sigma_{xz*}}{\partial z_*}=0 \tag{3.33}$$

となる. ここで式 (3.33) ががつりあうためには Σ_{xz}, Σ_{zz} のスケールは少なくとも

$$\frac{\Sigma_{xz}}{\Sigma_{zz}}=O(\varepsilon) \tag{3.34}$$

でなければならない. よって

$$\Sigma_{xz}=\varepsilon\Sigma_{zz} \tag{3.35}$$

とする. 以上より運動方程式は

$$2\varepsilon^2\frac{\partial\sigma'_{xx*}}{\partial x_*}+\frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial x_*}+\frac{\partial\sigma_{xz*}}{\partial z_*}=0 \tag{3.36}$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial\sigma_{zx*}}{\partial x_*}+\Sigma_{zz}\frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial z_*}=\rho_0 g_0 H\rho_* g_* \tag{3.37}$$

となる. ε^2 の項を無視し, $\Sigma_{zz}=\rho_0 g_0 H$ とすると運動方程式は

$$\frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial x_*}+\frac{\partial\sigma_{xz*}}{\partial z_*}=0 \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial z_*}=\rho_* g_* \tag{3.39}$$

となる. 運動方程式の鉛直成分 (3.39) から表面 ($z_*=h_*$) における σ_{zz*} を一定値 P_s とすると $\sigma_{zz*}=P_s-\rho_* g_*(h_*-z_*)$ である. これを水平成分の式 (3.38) へ代入すると, 運動方程式は

$$0=-\rho_* g_*\frac{\partial h_*}{\partial x_*}+\frac{\partial\sigma_{xz*}}{\partial z_*} \tag{3.40}$$

となる.

3.1.3　熱力学の式

熱力学の式 (2.13) を無次元化すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_*}{\partial t_*} &+ \frac{Ut_0}{L}u_*\frac{\partial T_*}{\partial x_*}+\frac{Wt_0}{H}w_*\frac{\partial T_*}{\partial z_*}\\ &= \frac{kt_0}{c_p\rho_0}\frac{1}{H^2}\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 T_*}{\partial {x_*}^2}+\frac{\partial^2 T_*}{\partial {z_*}^2}\right)\\ &+ \frac{gH}{c_pT_0}\frac{Ut_0}{L}\left(\varepsilon^2\left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*}\sigma_{xx*}+\frac{\partial w_*}{\partial z_*}\sigma_{zz*}\right)+\left(\frac{\partial u_*}{\partial z_*}+\varepsilon^2\frac{\partial w_*}{\partial x_*}\right)\sigma_{xz*}\right)\end{aligned} \tag{3.41}$$

ここで $t_0 = \frac{L}{U} = H^2 \frac{c_p \rho_0}{k} = \frac{L}{U} \frac{g_0 H}{c_p T_0}$ とする[4]. 各項において $O(\varepsilon^2)$ の項だけを無視すると

$$\frac{\partial T_*}{\partial t_*} = -\left(u_* \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \right) + \frac{k}{\rho_0 c_p} \frac{\partial^2 T_*}{\partial {z_*}^2} + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial u_0}{\partial z_*} \sigma_{xz*}$$

となる.

3.1.4　構成方程式

偏差応力の 2 次の不変量 τ は無次元化すると

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{1}{2} \left({\sigma'_{xx}}^2 + {\sigma'_{zz}}^2 \right) + {\sigma'_{xz}}^2 \\ {\tau_0}^2 \tau_* &= \frac{1}{2} \left({\Sigma'_{xx}}^2 {\sigma'_{xx*}}^2 + {\Sigma'_{zz}}^2 {\sigma'_{zz*}}^2 \right) + {\Sigma'_{xz}}^2 {\sigma'_{xz*}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^2 {\Sigma'_{xz}}^2 \left({\sigma'_{xx*}}^2 + {\sigma'_{zz*}}^2 \right) + {\Sigma'_{xz}}^2 {\sigma'_{xz*}}^2 \end{aligned}$$

となる. ε の項を無視して $\tau_0 = \Sigma'_{xz}$ とする. よって 2 次の不変量は

$$\tau_* = \sigma'_{xz*}$$

となる.

---

[4] 氷床の移流時間, 熱拡散時間, 粘性時間はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{移流時間} \quad t_0 &= \frac{L}{U} \\ &\sim \frac{10^6 \mathrm{m}}{10 \mathrm{m/a}} \\ &\sim 10^{12} \mathrm{s} \\ \text{熱拡散時間} \quad t_0 &= H^2 \frac{c_p \rho_0}{k} \\ &\sim (10^3 \mathrm{m})^2 \frac{2000 \mathrm{J/kgK} \cdot 10^3 \mathrm{kg/m^3}}{2 \mathrm{W/mK}} \\ &\sim 10^{12} \mathrm{s} \\ \text{粘性時間} \quad t_0 &= \frac{L}{U} \frac{g_0 H}{c_p T_0} \\ &\sim \frac{10^6 \mathrm{m}}{10 \mathrm{m/a}} \frac{10 \mathrm{kgm/s^2} \cdot 10^3 \mathrm{m}}{2000 \mathrm{J/kgK} \cdot 10 \mathrm{K}} \\ &\sim 10^{12} \mathrm{s} \end{aligned}$$

と同程度である.

構成方程式を無次元化すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_*}{\partial x_*} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_*}{\partial z_*}+\varepsilon^2\frac{\partial w_*}{\partial x_*}\right) \\ & \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \end{pmatrix} = A_0 A_* \left(\frac{\Sigma'_{xz}\sigma'_{xz*}}{\eta_0\eta_*}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{L}{U}\Sigma'_{xx}\sigma'_{xx*} & \frac{H}{U}\Sigma'_{xz}\sigma'_{xz*} \\ & \frac{H}{W}\Sigma'_{zz}\sigma'_{zz*} \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

となる. Σ'_{zz}, Σ'_{xz} の関係は式 (3.30), 式 (3.31) から $\Sigma'_{xx}=\varepsilon\Sigma'_{xz}$ としたのと同様に $\Sigma'_{zz}=\varepsilon\Sigma'_{xz}$ とする. そしてさらに ϵ^2 の項を無視すると構成方程式は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_*}{\partial x_*} & \frac{1}{2}\frac{\partial u_*}{\partial z_*} \\ & \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \end{pmatrix} = A_* \left(\frac{\sigma'_{xz*}}{\eta_*}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \sigma'_{xx*} & \sigma'_{xz*} \\ & \sigma'_{zz*} \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

となる. このとき A_0 は $A_0=\left(\frac{\Sigma'_{xz}}{\eta_0}\right)^{1-n}\Sigma_{xz}\frac{U}{H}$ とする.

3.2　浅氷近似を用いた境界条件

3.2.1　運動学的境界条件

浅氷近似によって変わらず

$$w(z=0) = 0 \tag{3.44}$$

$$w(z=h) = \frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{M_s}{\rho} \tag{3.45}$$

$$M_s = M_s(x,h) \tag{3.46}$$

である.

3.2.2　力学的境界条件

表面での条件である式 (2.22) を書き下す. $z=h$ において

$$\begin{aligned}&(\sigma_{xx}n_x+\sigma_{xz}n_z)\boldsymbol{e_1}+(\sigma_{zx}n_x+\sigma_{zz}n_z)\boldsymbol{e_3}\\ &\quad-[(\sigma_{xx}n_x+\sigma_{xz}n_z)n_x+(\sigma_{zx}n_x+\sigma_{zz}n_z)n_z](n_x\boldsymbol{e_1}+n_z\boldsymbol{e_3})=0\end{aligned}$$

である. $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3}$ はそれぞれ x,z 軸方向の単位ベクトルとする. 表面に対する法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の x,z 軸方向成分をそれぞれ n_x,n_z とする. $n_x^2+n_z^2=1$ を使ってまとめると次のように書き換えられる.

$$\left((\sigma_{xx}-\sigma_{zz})n_x{n_z}^2+\sigma_{xz}n_z(-n_x^2+n_z^2)\right)\boldsymbol{e_1}+\left((\sigma_{zz}-\sigma_{xx})n_x^2n_x+\sigma_{xz}n_x(n_x^2-n_z^2)\right)\boldsymbol{e_3}=0$$

表面に対する法線ベクトルは浅氷近似の元では $n_x/n_z << 1$ である. $n_x/n_z = \delta$ とすると.

$$\left(\delta n_z^3(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) + \sigma_{xz} n_z^3(-\delta^2 + 1)\right) \boldsymbol{e_1} + \left(\delta^2 n_z^3(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) + \sigma_{xz} n_z^3 \delta(\delta^2 - 1)\right) \boldsymbol{e_3} = 0$$

となる. $\delta, \delta^2, \delta^3$ の項を無視し, $z = h$ における接線応力の条件を

$$\sigma_{xz} \boldsymbol{e_1} = 0 \tag{3.47}$$

とする.

底面では変わらず

$$u(z = 0) \quad = \quad 0 \tag{3.48}$$

である.

3.2.3　熱力学的境界条件

浅氷近似によって変わらず

$$k \frac{\partial T}{\partial z}\bigg| \quad = \quad -\gamma \tag{3.49}$$

$$T_s \quad = \quad T_s(x, h) \tag{3.50}$$

である.

4　基礎方程式からの置き換え

浅氷近似下での 2 次元氷床の解くべき基礎方程式と境界条件を与えた. 氷床の基礎方程式は速度場 u, w, 氷厚 h の式, 熱力学の式で表される. ここでは速度場 u, w および氷厚 h の式を導出する.

4.1　速度場

速度場 u, w は氷厚 h の関数として書き換えられる. 運動方程式 (3.40) を h から z まで積分すると σ_{xz} は

$$\sigma_{xz} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x}(h - z) \tag{4.51}$$

となる. さらにこれを構成方程式 (3.43) の非対角成分に代入して 0 から z まで積分すると u が求まる.

$$u = -2\left(\frac{\rho g}{\eta}\right)^n \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^z A(h - z')^n \, dz' \tag{4.52}$$

w は連続 (3.27) の式を 0 から z まで積分する.

$$w(z) = -\int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} \, dz \tag{4.53}$$

4.2　氷厚の式

氷床の形 h を求めるために連続の式 (3.27) を 0 から h まで積分し, 運動学的境界条件 (3.44), (3.45) から氷厚の時間発展の式にする.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{M_s}{\rho} \tag{4.54}$$

ここで F は u のフラックスで

$$F \;=\; \int_0^h u \, dz \tag{4.55}$$

$$= \quad 2\left(\frac{\rho g}{\eta}\right)^n \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^n \int_0^h dz \int_0^z A(h-z)^n \, dz \tag{4.56}$$

とかける.

4.3　解くべき式と境界条件

以上の議論より解くべき式は氷厚の式 (4.54) と温度の式 (3.42) であり, この式を解くために f, u, w, σ_{xz} の式 (4.56), (4.52), (4.53), (4.51) が必要である. まとめて記述すると

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{M_s}{\rho} \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho c_p} A\sigma_{zx}^{n+1} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^h u \, dz \\ &= -2(\rho g)^n \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^h dz \int_0^z A(h-z)^n \, dz \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$u = -2(\rho g)^n \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^z A(h-z')^n \, dz' \tag{4.60}$$

$$w = -\int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} \, dz \tag{4.61}$$

$$\sigma_{xz} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x}(h-z) \tag{4.62}$$

そして境界条件は

$$M_s = M_s(x, h) \tag{4.63}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\gamma \tag{4.64}$$

$$T_s = T_s(x, h) \tag{4.65}$$

である.

参考文献

- Blatter, H. 1995. Velocity and stress fields in grounded glaciers: a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. *Journal of Glaciology* **41**(138), 333-344
- Glen, J.W. 1955. The creep of polycrystalline ice. *Proc.R.Soc. London*, Ser.A, **228**, 519-538
- Hutter, K. 1983. itshape Theoretical glaciology: material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets. D. Reidel Publishing Co./Tokyo, Terra Scintific Publishing Co.
- Huybrechts,P., T.Payne, and The EISMINT Intercomparison group. 1996. The EISMINT benchmarks for testing ice-sheet models. *Annals of Glaciology* **23**, 1–12
- Malvern, L.E. 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Perntice-Hall
- Paerson, W.S.B. 1994. *The Physics of glaciers(3rd ed.).* Pergamon, Oxford