

氷床流動の構成方程式依存性
に関する数値的研究

**A numerical study of the dependency
of ice sheet flow on the form of
constitutive equations**

村田 泰洋

Murata Yasuhiro

北海道大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻
地球流体力学研究室

2002 年 01 月 31 日

要旨

氷床流動の構成方程式パラメータ依存性を整理するために、必要な定式化と2次元氷床流動数値モデルの開発を行った。

従来の氷床流動数値シミュレーションにおいては現実的な氷床の振舞いを記述することに主要な目的がおかれ、氷床流動を非ニュートン流体の運動として理解することはあまり注目されてこなかった。本研究で開発された氷床流動数値モデルは、構成方程式のパラメータの変更が容易となるような定式化に基づいている。それゆえ、氷床流動を非ニュートン流体の運動として整理するのみならず、さまざまな地球惑星表層環境における氷床流動の記述に応用することが可能である。

開発した氷床数値モデルの妥当性を検討するために、構成方程式のパラメータを変更して流れ場の違いを見る数値実験を行った。この数値実験においては構成方程式の温度依存性は無視し、温度場の時間変化は水平移流だけで決まるとした。実験結果には、構成方程式における偏差応力のべき乗数に依存した氷床流動が再現された。このことから本研究で開発された2次元氷床モデルは当初の目的に沿った利用に対し十分な道具となることが確認された。

目次

1	はじめに	1
2	氷床流動モデルの定式化	4
2.1	考える系	4
2.2	氷床力学の基礎方程式系	5
2.2.1	支配方程式	5
2.2.2	境界条件	6
2.3	浅氷近似	8
2.3.1	支配方程式	8
2.3.2	浅氷近似を用いた境界条件	12
2.4	支配方程式の置き換え	12
2.4.1	氷厚の式	13
2.4.2	速度場の式	13
2.4.3	解くべき式と境界条件	14
3	氷床流動モデルの離散化	15
3.1	基本的な方針	15
3.2	速度場	16
3.3	氷厚の式	17
3.4	熱力学の式	18
4	数値実験	19
4.1	モデルの概要	19
4.2	構成方程式のパラメータの与え方	19
4.3	計算領域と空間分解能	19
4.4	初期条件	21
4.5	時間刻み	21
4.6	数値実験の結果	21
5	議論と今後の課題	31

1 はじめに

氷河・氷床における流動といった場合, 通常氷を剛体として見たときの底面すべりと氷を粘性流体として見たときの粘性流動の二つの運動を考える. この二つの運動のうち粘性流体としての氷に着目すると氷の構成方程式は Glen の流動則として知られている

$$D = A_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{n-1} \sigma' \quad (1.1)$$

が用いられる (Glen 1955). ここで D は歪み速度テンソル, A_0 は氷の物性に関する定数, Q はクリープ活性化エネルギー, R は気体定数, T は温度, τ は偏差応力の 2 次の不変量, τ_0 は 参照応力, σ' は偏差応力テンソルである.

この式は図 1.1 で示すような多結晶氷の偏差応力と歪み速度との関係を調べた実験結果 (前野, 黒田 1986) から求められた経験則である. この図からは

1. 構成方程式のべき乗数の値は応力とともに増加する.
2. 応力値が一定の場合, 歪み速度は温度とともに増加する.

ということが読み取れる. つまり考える環境 (応力値, 温度値) によって異なる構成方程式のパラメータを用いる必要がある.

従来の氷床流動数値モデルは EISMINT(Huybrechts *et al.*, 1996, Payne *et al.*, 2000)¹ で持ち寄られた氷床流動モデルを初めとして, 現在の地球の応力・温度幅での氷床の振舞いを調べるために作られた. そのため現在の地球の応力・温度幅における構成方程式のパラメータが用いられ, 図 1.1 のハッチのあてられた部分の構成方程式しか網羅されていない. これは氷を非ニュートン流体としてみたときにある特定の流動を記述したにすぎない. さまざまな応力値・温度値における氷床流動を記述することができれば現在の地球の環境とは異なる環境における氷床流動の理解にもつながる. 例えば,

- 過去に地球に存在した氷床 (温度値の違い) (Plteier *et al.*, 2000)
- 火星極冠に存在する H₂O 氷床 (重力の違いによる氷床にかかる応力の違い Nye *et al.*, 2000)

¹European Ice sheet Modelling Initiative. モデル相互比較のワークショップ. 1996 年から 1997 年にかけて行われた.

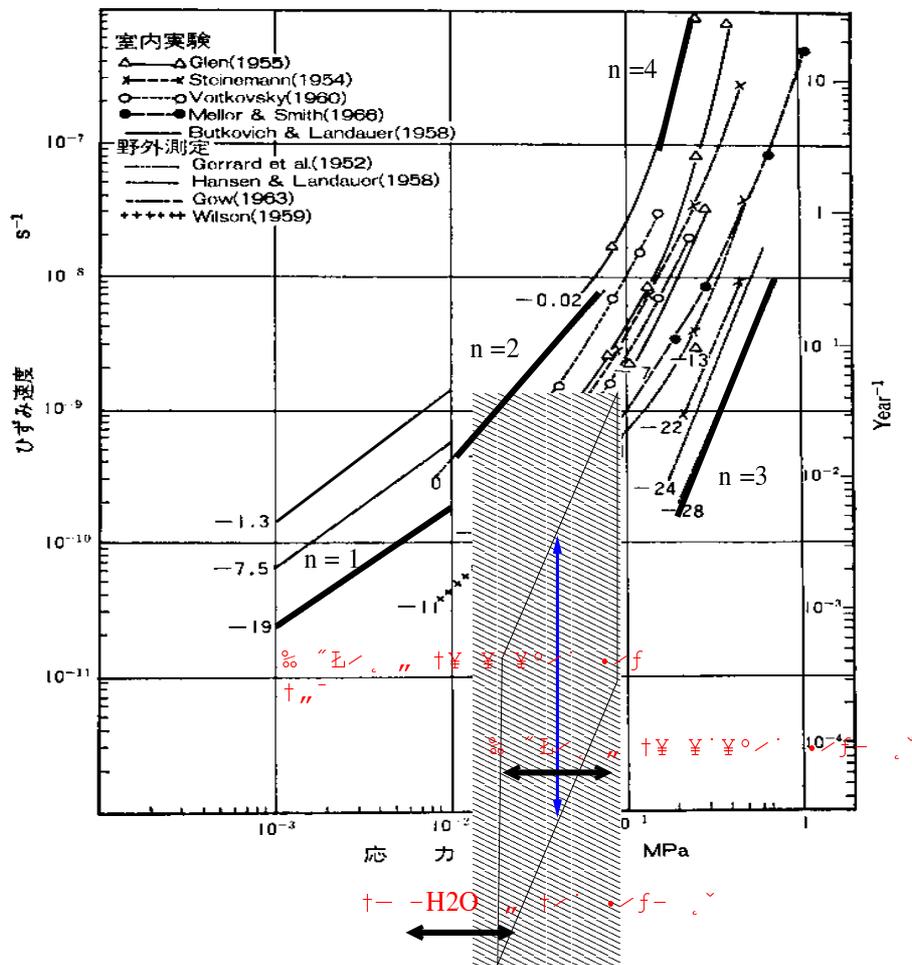


図 1.1: 偏差応力に対する歪み速度の関係を示す実験結果 (前野, 黒田, 1986 に加筆). 偏差応力とともにべき乗数 n は 1, 2, 3, 4 の値を取っている. ハッチで囲まれた場所は現在の地球の応力値, 温度値に対応した構成方程式の取る範囲.

- 火星極冠に存在する CO_2 氷床など (氷床を構成する物質の物性の違い Nye *et al.*, 2000)

の流動にも応用することができる.

以上より構成方程式のパラメータの違いによる氷床の形・速度・温度分布の整理を行うことは氷のような非ニュートン流体として振舞う物体の力学的な性質を理解する上でも重要である. そこで本研究では氷床の形・速度・温度分布を整理するための氷床流動数値モデルを開発する. そしてこの数値モデルに対して構成方程式のパラメータ依存性を確認するための数値実験を行う. 数値実験では熱力学過程と力学過程を結合しないとして計算を行い, パラメータの違いがどれほど流動に違い

を及ぼすのかを調べる.

本論文の構成は第 2 章では氷床流動モデルの定式化を行った. ここでの定式化は今後のモデル開発で必要な過程である熱力学過程を結合したモデルの定式化を行っている. 第 3 章はモデルの離散化を述べ, 第 4 章では数値モデルを簡単な条件に設定した場合の数値実験とその結果を述べた. 第 5 章では結論と今後の課題をまとめる.

2 氷床流動モデルの定式化

2.1 考える系

図 2.2 のような水平方向に無限に広がる空間に正味の質量収支 (年間涵養量 - 年間消費量) M_s で成長する氷体 (ice body) を考える. 氷体の温度は十分に低いものとして融解は起こらないとする. 融解が起こらない氷体は非ニュートン・非圧縮流体として扱う (Hutter, 1983). 氷体の水平スケール L は鉛直スケール H に比べて十分大きいものとする. また氷体の重みによる基盤地形の変形はないと考える. 水平方向を x , 鉛直方向を z の 2 次元直交直線座標を用いる.

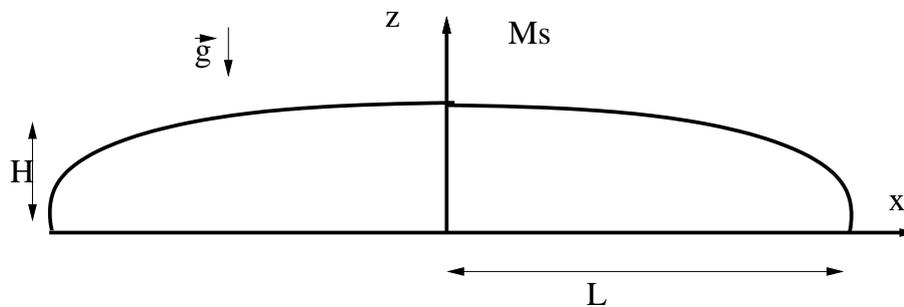


図 2.2: 系の設定

2.2 氷床力学の基礎方程式系

2.2.1 支配方程式

支配方程式は連続の式, 運動方程式, 熱力学の式および構成方程式からなる. 連続の式, 運動方程式, 熱力学の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{dc_p T}{dt} = -\nabla \cdot (k \nabla T) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \quad (2.4)$$

と書き表される. 氷体の流動は非常にゆっくりなので式 (2.3) の加速度の項は無視する (Paterson, 1994). 記号の意味は \mathbf{v} は速度ベクトル, ρ は氷の密度, $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル, \mathbf{g} は重力加速度, T は氷温, \mathbf{D} は歪み速度テンソル, k は熱伝導度, c_p は氷の比熱である. 歪み速度テンソル \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (2.5)$$

と定義される.

構成方程式は一般的に

$$\mathbf{D} = A(T) \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{n-1} \boldsymbol{\sigma}' \quad (2.6)$$

として表す (Glen, 1955). τ は偏差応力の 2 次の不変量. τ_0 は参照応力である. 偏差応力の 2 次の不変量は偏差応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}'$ を用いて次のように表す.

$$\tau^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}'^2) \quad (2.7)$$

偏差応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}'$ は

$$\boldsymbol{\sigma}' = p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad (2.8)$$

と定義される. \mathbf{I} は単位行列である. このとき圧力 p は

$$p = -\frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} \quad (2.9)$$

と決まる. 式 (2.6) における n の値は応力実験や観測で定められる値である (Paterson, 1994). パラメータ A は温度の関数でアレニウスの式,

$$A(T) = A_0 \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right) \quad (2.10)$$

を用いる (Glen, 1955). A_0 の値は構成する氷の異方性や氷に含まれる不純物濃度などによって決められる. ここでは A_0 は一定とする. Q はクリープ活性化エネルギー, R は気体定数である.

直線直交座標での表示

直線直交座標での書き表すと以下のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (2.13)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_p (\mathbf{v} \cdot \nabla) T + k \nabla^2 T + \sum_{i,j} D_{ij} \sigma_{ij} \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xz} \\ & D_{zz} \end{pmatrix} = A(T) \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xz} \\ & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\tau^2 = \frac{1}{2} (\sigma'_{xx}{}^2 + \sigma'_{zz}{}^2) + \sigma'_{zx}{}^2 \quad (2.16)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij} \quad (2.17)$$

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xz} \\ & D_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$A(T) = A_0 \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right) \quad (2.20)$$

2.2.2 境界条件

運動学的境界条件

氷体の底面 ($z = 0$) では

$$w(0) = 0 \quad (2.21)$$

である. 表面 ($z = h$) では, 正味の質量収支 M_s による寄与により

$$w(h) = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{M_s}{\rho} \quad (2.22)$$

となる. ここで M_s は

$$M_s = M_s(x, h) \quad (2.23)$$

である.

力学的境界条件

表面では表面に沿った応力は働かないので表面に対する法線ベクトルを $n = n_i$ とすると次のように表す.

$$(\sigma_{ij}n_j - \sigma_{kl}n_l n_k n_i)|_{z=h} = 0 \quad (2.24)$$

底面では滑べらず固定されているとするので

$$u(z=0) = 0 \quad (2.25)$$

熱学的境界条件

底面では地殻熱流量 γ を与える.

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -\gamma \quad (2.26)$$

とする. 表面温度 T_s は

$$T_s = T(x, h) \quad (2.27)$$

である.

2.3 浅氷近似

2.3.1 支配方程式

氷床の水平スケール L の鉛直スケール H 比べて十分小さい² ので浅氷近似 (shallow ice approximation) を施すことで簡略化される. 浅氷近似は Hutter, 1983 に従う. 縦横比は $\varepsilon \equiv H/L$ とする.

連続の式

連続の式 (2.11) の無次元化を行う. 水平速度スケール, および鉛直速度スケールを U, W とすると

$$\frac{U}{L} \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{W}{H} \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0 \quad (2.28)$$

である. 無次元量は添字に $*$ をつける.

水平方向の流れの時間スケールと鉛直方向の流れの時間スケールが等しいと考え

$$\frac{L}{U} = \frac{H}{W} \quad (2.29)$$

である. このとき無次元化された連続の式は

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0 \quad (2.30)$$

である.

運動方程式

運動方程式 (2.12), (2.13) の無次元化を行う. その前に x 軸方向の運動方程式 (2.12) を変形する. 右辺第 1 項の σ_{xx} は式 (2.18) から

$$\sigma_{xx} = 2\sigma'_{xx} + \sigma_{zz}$$

となり, 式 (2.12) は

$$2 \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.31)$$

²ここでは縦横比を $H/L \sim O(10^{-3})$ 程度と考えている.

となる.

$\sigma'_{xx}, \sigma'_{xz}, \sigma_{zz}$ のスケールをそれぞれ $\Sigma'_{xx}, \Sigma_{xz}, \Sigma_{zz}$, ρ, g のスケールを ρ_0, g_0 とすると次のようになる.

$$2\varepsilon\Sigma'_{xx}\frac{\partial\sigma'_{xx*}}{\partial x_*} + \varepsilon\Sigma_{zz}\frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial x_*} + \Sigma'_{xz}\frac{\partial\sigma'_{xz*}}{\partial z_*} = 0 \quad (2.32)$$

$$\varepsilon\Sigma'_{xz}\frac{\partial\sigma_{zx*}}{\partial x_*} + \Sigma_{zz}\frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial z_*} = \rho_0g_0H\rho_*g_* \quad (2.33)$$

スケール $\Sigma'_{xx}, \Sigma_{xz}$ の大きさの関係は構成方程式 (2.15) と歪み速度の定義式 (2.20) から求まる. Σ'_{xx} と Σ'_{xz} の比は

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'_{xx}}{\sigma'_{xz}} &= \frac{D_{xx}}{D_{xz}} \\ \frac{\Sigma'_{xx}}{\Sigma'_{xz}} &= \frac{\frac{W}{H}}{\frac{1}{2}\left(\frac{U}{H} + \frac{W}{L}\right)} \\ &\sim \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \end{aligned}$$

となる. これより Σ'_{xx} は

$$\Sigma'_{xx} = \varepsilon\Sigma'_{xz} \quad (2.34)$$

とおく. また $\Sigma'_{xz}, \Sigma_{zz}$ のスケールは

$$\Sigma'_{xz} = \rho_0g_0H\varepsilon \quad (2.35)$$

$$\Sigma_{zz} = \rho_0g_0H \quad (2.36)$$

であるとする. 無次元化された運動方程式は

$$2\varepsilon\frac{\partial\sigma'_{xx*}}{\partial x_*} + \frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial x_*} + \frac{\partial\sigma'_{xz*}}{\partial z_*} = 0 \quad (2.37)$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz*}}{\partial z_*} = \rho_*g_* \quad (2.38)$$

と書き表される.

z 軸方向の運動方程式 (2.38) を積分する. このとき氷床表面 h での σ_{zz} を一定値 (大気圧) P とすると

$$\sigma_{zz*} = P_* - \rho_*g_*(h_* - z) \quad (2.39)$$

となる. これを x 軸方向の運動方程式 (2.37) へ代入すると

$$0 = -\rho_* g_* \frac{\partial h_*}{\partial x_*} + \frac{\partial \sigma_{xz*}}{\partial z_*} \quad (2.40)$$

となる.

熱力学の式

時間 t のスケールを t_0 , 温度 T のスケールを T_0 として熱力学の式 (4.18) を無次元化すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + \frac{U t_0}{L} u \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + \frac{W t_0}{H} w \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \\ = \frac{k t_0}{c_p \rho} \frac{1}{H^2} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 T_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} \right) \\ + \frac{g H}{c_p T_0} \frac{U t_0}{L} \left(\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} \sigma_{xx*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \sigma_{zz*} \right) + \left(\frac{\partial u_*}{\partial z_*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_*}{\partial x_*} \right) \sigma_{xz*} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$t_0 = L/U$, $k t_0 / c_p \rho = H^2$, $g H = c_p T_0$ であるとする

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + u \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + w \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \\ = \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 T_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} \right) \\ + \left(\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} \sigma_{xx*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \sigma_{zz*} \right) + \left(\frac{\partial u_*}{\partial z_*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_*}{\partial x_*} \right) \sigma_{xz*} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

各項において ε^2 のオーダーの項を無視し, これによって無次元化した熱力学の式は

$$\frac{\partial T_*}{\partial t_*} + u \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + w \frac{\partial T_*}{\partial z_*} = \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} + \frac{\partial u_*}{\partial z_*} \sigma_{xz*} \quad (2.43)$$

となる.

構成方程式

偏差応力の 2 次の不変量 τ のスケール $\hat{\tau}$ は偏差応力のスケールを用いて表すと

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \left(\sigma'_{xx}{}^2 + \sigma'_{zz}{}^2 \right) + \sigma'_{xz}{}^2 \\ \hat{\tau}^2 \tau_* &= \frac{1}{2} \left(\Sigma'_{xx}{}^2 \sigma'_{xx*}{}^2 + \Sigma'_{zz}{}^2 \sigma'_{zz*}{}^2 \right) + \Sigma'_{xz}{}^2 \sigma'_{xz*}{}^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Sigma'_{xz}{}^2 \left(\sigma'_{xx*}{}^2 + \sigma'_{zz*}{}^2 \right) + \Sigma'_{xz}{}^2 \sigma'_{xz*}{}^2 \end{aligned}$$

となる. ε^2 の項を無視して $\hat{\tau} = \Sigma'_{xz}$ とおく. よって 2 次の不変量は

$$\tau_* = \sigma'_{xz*}$$

となる. よって構成方程式は

$$\begin{pmatrix} D_{xx*} & D_{xz*} \\ & D_{zz*} \end{pmatrix} = A(T) \left(\frac{\sigma'_{xz*}}{\tau_0} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} \sigma'_{xx*} & \sigma'_{xz*} \\ & \sigma'_{zz*} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

となる.

浅氷近似を用いた支配方程式

浅氷近似によって支配方程式は以下ようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.45)$$

$$0 = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{zx} \quad (2.47)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = A(T) \left(\frac{\sigma'_{xz}}{\tau_0} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xz} \\ & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$A(T) = A_0 \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right) \quad (2.49)$$

2.3.2 浅氷近似を用いた境界条件

2.2.2 節で与えた境界条件 (2.24), (2.25), (2.21), (2.22) (2.26), (2.23), (2.27) のうち浅氷近似によって形が変わるのは式 (2.24) だけである.

式 (2.24) を書き下す. $z = h$ において

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xz}n_z)\mathbf{e}_1 + (\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zz}n_z)\mathbf{e}_3 \\ & - [(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xz}n_z)n_x + (\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zz}n_z)n_z](n_x\mathbf{e}_1 + n_z\mathbf{e}_3) = 0 \end{aligned}$$

である. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ はそれぞれ x, z 軸方向の単位ベクトルとする. 表面に対する法線ベクトル \mathbf{n} の x, z 軸方向成分をそれぞれ n_x, n_z とする. $n_x^2 + n_z^2 = 1$ を使ってまとめると次のように書き換えられる.

$$(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xz}n_z)n_x^2\mathbf{e}_1 + (\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zz}n_z)n_z^2\mathbf{e}_3 = 0$$

表面に対する法線ベクトルは浅氷近似の元では $n_x/n_z \ll 1$ である. $n_x/n_z = \delta$ とすると.

$$(\sigma_{xx}\delta + \sigma_{xz})\mathbf{e}_1 + (\sigma_{zx}\delta^3 + \sigma_{zz}\delta^3)\mathbf{e}_3 = 0$$

となる. $\delta, \delta^2, \delta^3$ の項を無視すると $z = h$ における接線応力の条件は

$$\sigma_{xz} = 0 \quad (2.50)$$

となる. 以下に浅氷近似によって形が変わらない境界条件と一緒に書き下す.

$$w(z=0) = 0 \quad (2.51)$$

$$w(z=h) = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{M_s}{\rho} \quad (2.52)$$

$$M_s = M_s(x, h) \quad (2.53)$$

$$u(z=0) = 0 \quad (2.54)$$

$$\sigma_{xz}|_{z=h} = 0 \quad (2.55)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\gamma \quad (2.56)$$

$$T_s = T_s(x, h) \quad (2.57)$$

2.4 支配方程式の置き換え

浅氷近似下での 2 次元氷床の解くべき支配方程式と境界条件を与えた. しかし境界条件 (2.52) に時間発展の式が現れてしまうためここからさらに氷厚 h の式を求めて, 支配方程式を氷厚の式・熱力学の式の 2 つの時間発展方程式として置き換える.

2.4.1 氷厚の式

氷厚の関数 $h(x, t)$ を求めるために連続の式 (2.45) を 0 から h まで積分し, 運動学的境界条件 (2.51), (2.52) から氷厚の時間発展の式にする.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{M_s}{\rho} \quad (2.58)$$

ここで F は質量フラックスで

$$F = \int_0^h u \, dz \quad (2.59)$$

である.

2.4.2 速度場の式

速度場 u, w は診断的に求めることができ, 氷厚 h の関数で書き表される.

運動方程式 (2.46) を h から z まで積分すると σ_{xz} は

$$\sigma_{xz} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} (h - z) \quad (2.60)$$

となる. これを構成方程式 (2.48) に代入する. 歪み速度の定義式は $D = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z}$ だったので u は以下のように表される.

$$u = -2 \frac{(\rho g)^n}{\tau_0^{n-1}} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^z A(T) (h - z')^n \, dz' \quad (2.61)$$

w は u と連続の式から求まる.

$$w(z) = - \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} \, dz \quad (2.62)$$

2.4.3 解くべき式と境界条件

以上の議論より解くべき式は氷厚の式 (2.58) と温度の式 (2.64), およびこれらの式を解くために必要な F, u, w, σ_{xz}, A の式 (2.61), (2.62), (2.60), (2.10) である。以下にまとめて記述する。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{M_s}{\rho} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho c_p \tau_0^{n-1}} \frac{A(T)}{\sigma_{zx}^{n+1}} \quad (2.64)$$

$$F = \int_0^h u dz \quad (2.65)$$

$$u = -2 \frac{(\rho g)^n}{\tau_0^{n-1}} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^z A(T) (h - z')^n dz' \quad (2.66)$$

$$w = -\int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} dz \quad (2.67)$$

$$\sigma_{xz} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} (h - z) \quad (2.68)$$

$$A(T) = A_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad (2.69)$$

そして境界条件は

$$M_s = M_s(x, h)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\gamma$$

$$T_s = T_s(x, h)$$

である。

3 氷床流動モデルの離散化

3.1 基本的な方針

座標変換

数値的に計算する際には鉛直座標はその場所の氷厚で引き延ばされた無次元座標 ζ を用いて表す (Jenssen, 1977).

$$\zeta = \frac{z}{h(x, t)}$$

このようにすると氷床上部境界が常に格子点上にあるので上部境界の数値誤差を減らすことができる. しかし水平境界の扱い方が非常に難しくなる. ζ 座標を用いることで微分, 積分は以下のように変換される. 関数 f は変数 $x, z(\zeta), t$ の任意の関数とし, r は x, t のいずれかである.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_z &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_\zeta - \frac{\zeta}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \\ \int f(z) dz &= h \int f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

空間差分

各物理量の格子点は図 (3.3)) のようにとり, 有限差分によって離散化する. 水平および鉛直方向の格子点値はそれぞれの記号の下つき添字 i, j で表す. 半格子点上の座標値は線形補間を用いて求める. 空間格子間隔は水平方向に Δx , 鉛直方向に $\Delta \zeta_j$ とする. 鉛直格子間隔は以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \Delta \zeta_j &= \zeta_{j+1} - \zeta_j \\ \Delta \zeta_{j+\frac{1}{2}} &= \zeta_{j+\frac{1}{2}} - \zeta_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

氷厚の式, 速度場は前進差分を用いて離散化する. 熱力学の式は鉛直方向に中心差分, 水平方向に風上差分を用いて離散化する. 鉛直方向の積分は台形公式を用いて行った.

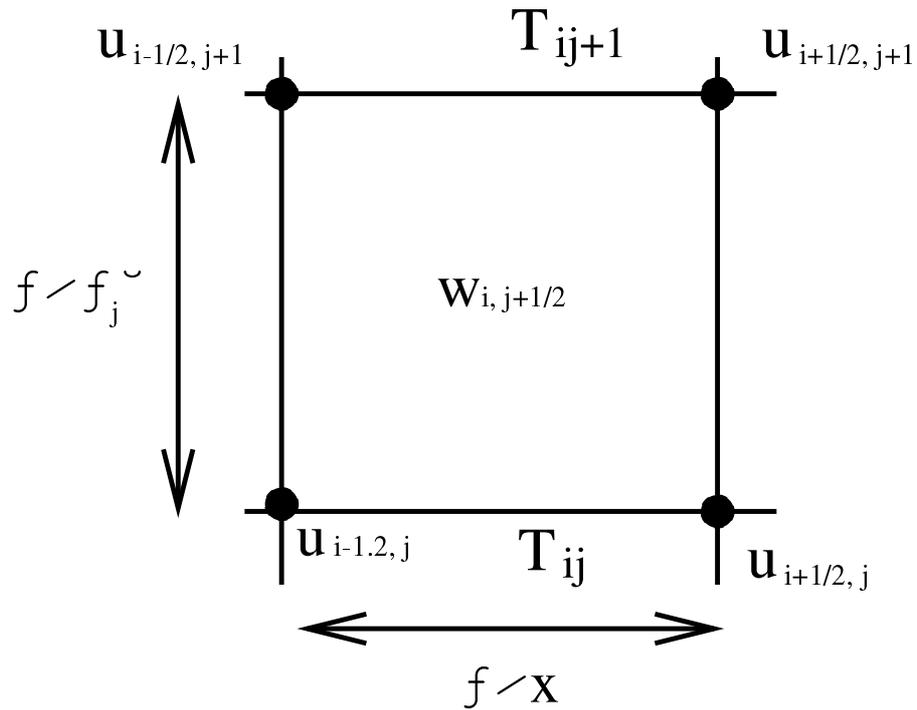


図 3.3: 格子点の位置

時間差分

時間差分は氷厚の式は陽解法で、熱力学の式は鉛直方向に関して陰解法で積分する。時間格子間隔は Δt とする。

3.2 速度場

速度場は ζ 座標変換によって以下のように書き換えられる。

$$u = -2(\rho g)^n \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} h^{n+1} \int_0^\zeta A(T) (1 - \zeta')^n d\zeta' \quad (3.70)$$

$$w = -h \int_0^\zeta \frac{\partial u}{\partial x} d\zeta + \frac{\partial h}{\partial x} u \zeta + \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^\zeta u d\zeta \quad (3.71)$$

速度場の式 (3.70), (3.71) を以下のように差分化する。

$$\begin{aligned}
u_{i+\frac{1}{2},j}^k &= -2(\rho g)^n \left| \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} \right|^{n-1} \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} (h_{i+\frac{1}{2}}^k)^{n+1} \\
&\quad \times \int_{\zeta_0}^{\zeta_j} A(T)(1 - \zeta')^n d\zeta' \tag{3.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{i,j+\frac{1}{2}}^k &= -h(i) \int_{\zeta_0}^{\zeta_{j+\frac{1}{2}}} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^k - u_{i-\frac{1}{2},j}^k}{\Delta x} d\zeta \\
&\quad + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^k - h_{i-\frac{1}{2}}^k}{\Delta x} u_{i,j+\frac{1}{2}}^k \zeta_{j+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^k - h_{i-\frac{1}{2}}^k}{\Delta x} \int_{\zeta_0}^{\zeta_{j+\frac{1}{2}}} u_{i,j+\frac{1}{2}}^k d\zeta \tag{3.73}
\end{aligned}$$

ここで鉛直方向の積分は台形公式を用いて以下のように表す.

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_{j'}} f d\zeta = \sum_{j=1}^{j'} \frac{\Delta\zeta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (f_j - f_{j-1})$$

3.3 氷厚の式

氷厚の式は ζ 座標変換によって以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{M_s}{\rho} \\
F &= h \int_0^1 u d\zeta
\end{aligned}$$

これを空間方向, 時間方向ともに前進差分を用いて離散化する.

$$h_i^{k+1} = h_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+\frac{1}{2}}^k - f_{i-\frac{1}{2}}^k) \tag{3.74}$$

ここで $f_{i+\frac{1}{2}}^k$ は

$$\begin{aligned}
f_{i+\frac{1}{2}}^k &= -2(\rho g)^n \left| \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} \right|^{n-1} \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} (h_{i+\frac{1}{2}}^k)^{n+2} \\
&\quad \times \int_{\zeta_0}^{\zeta_{jmax}} d\zeta \int_{\zeta_0}^{\zeta_j} A(T)(1 - \zeta')^n d\zeta' \tag{3.75}
\end{aligned}$$

と書ける.

3.4 熱力学の式

熱力学の式は ζ 座標変換によって次のように置き換えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\zeta}{h} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial h}{\partial x} &= - \left(u \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\zeta}{h} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{w}{h} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \\ &\quad + \frac{k}{\rho c_p h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \frac{2}{\rho c_p} A(T) \sigma_{zx}^{n+1} \\ \sigma_{xz} &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} h(1 - \zeta) \end{aligned}$$

これを鉛直方向には中心差分, 水平方向には風上差分を用いる. また時間方向には前進差分として鉛直方向に関しての完全陰解法で解く.

$$\begin{aligned} &\frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} - \frac{V^{k+1}}{h_i^{k+1}} \left(\frac{T_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - T_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta \zeta_{j+\frac{1}{2}}/2} \right) \\ &\quad - \frac{k}{\rho c_p} \frac{1}{(h_i^{k+1})^2} \frac{1}{\Delta \zeta_{j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{\Delta \zeta_j} - \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta \zeta_{j-1}} \right) \\ &= -u_{i,j} \frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{\Delta x} + \frac{1}{\rho c_p} A(T) \sigma_{xz}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.76)$$

左辺第 2 項の V^{k+1} は

$$V^{k+1} = \zeta_j \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t} + u_{i,j}^{k+1} \zeta_j \frac{h_{i+1}^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} - w_{i,j}^{k+1} \quad (3.77)$$

とする. 以上を整理すると

$$\begin{aligned} &T_{i,j+1}^{k+1} \left\{ \frac{-\Delta t V^{k+1}}{h_i^{k+1}} \frac{2}{\Delta \zeta_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{k}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{(h_i^{k+1})^2} \frac{1}{\Delta \zeta_j} \frac{1}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}} \right\} \\ &+ T_{i,j}^{k+1} \left\{ 1 + \Delta t \frac{k}{\rho c_p} \frac{1}{(h_i^{k+1})^2} \frac{1}{\Delta \zeta_{j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\Delta \zeta_j} + \frac{1}{\Delta \zeta_{j-1}} \right) \right\} \\ &+ T_{i,j-1}^{k+1} \left\{ \frac{\Delta t V^{k+1}}{h_i^{k+1}} \frac{2}{\Delta \zeta_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{k}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{(h_i^{k+1})^2} \frac{1}{\Delta \zeta_{j+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta \zeta_{j-1}} \right\} \\ &= -u_{i,j} \frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{\Delta x} + T_{i,j}^k + \frac{1}{\rho c_p} A(T) \sigma_{xz}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.78)$$

となる.

4 数値実験

4.1 モデルの概要

この章では構築した氷床モデルの数値実験を行うために 2 章で示した定式化に対して

- 温度依存関数 $A(T)$ は一定値 A_0 とする
つまり熱力学の式 (2.64) と速度場の式 (2.66, 2.67) は結合しない
- 熱力学の式はここでは水平移流の項のみを考慮にいたした式とする

として初期氷床の時間発展計算を行う. 以下に数値実験で扱う式を示した.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -u\frac{\partial T}{\partial x} \\ F &= \int_0^h u dz \\ u &= -2\frac{(\rho g)^n}{\tau_0} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^z A_0(h-z')^n dz' \\ w &= -\int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} dz\end{aligned}$$

4.2 構成方程式のパラメータの与え方

構成方程式のパラメータの与え方として次に述べる値を用いる. A_0 の値はここでは温度が低い場合として $A_{263\text{K}}$ の値を, 高い場合として $A_{273\text{K}}$ の値を用いる. 表 4.1 に具体的な数値をまとめ, 用いた構成方程式の分布は図 4.4 に表した.

4.3 計算領域と空間分解能

計算領域は水平方向に 1500 km とし, 数万年計算しても境界に到達しない程度に取った. 水平格子間隔は 50 km とした. 鉛直方向には Huybrechts(1990) に従った.

表 4.1: 構成方程式のパラメータ A_0 とそれに対応する n .

n	A_{263K}	A_{273K}
3	4.375×10^{-25}	3.17×10^{-24}
4	4.375×10^{-30}	3.17×10^{-29}
2	4.375×10^{-20}	3.17×10^{-19}

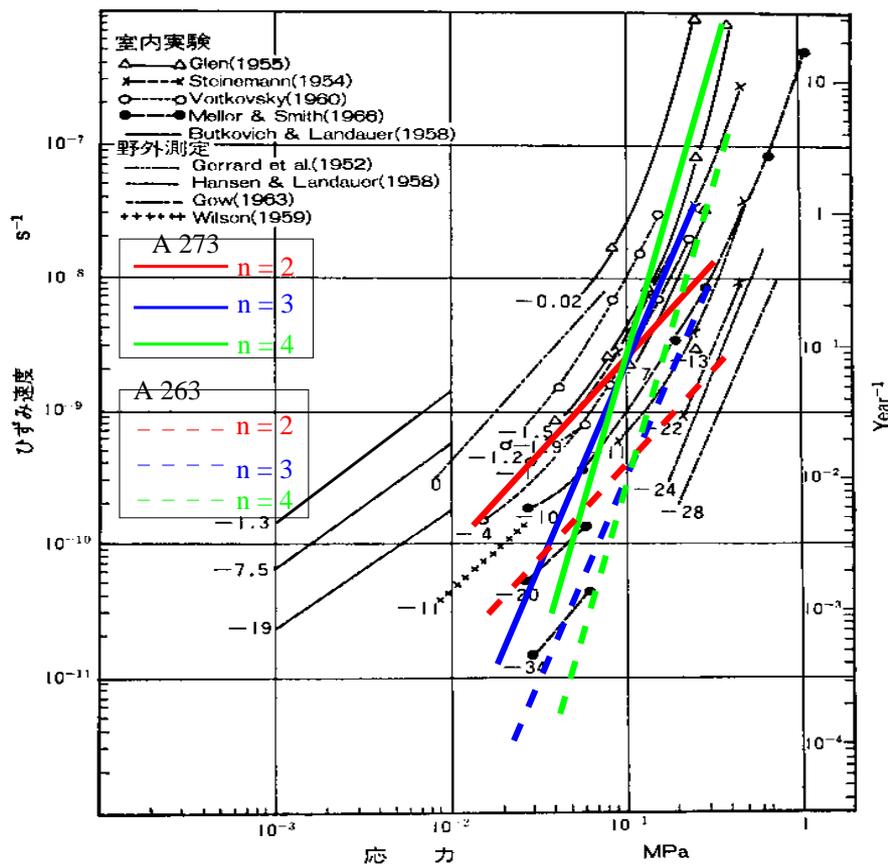


図 4.4: 用いた構成方程式の分布. 実線が A_{273K} のとき, 点線が A_{263K} のときの構成方程式. 前野, 黒田 1986 に加筆.

ζ 座標空間で 10 層, 格子点位置は氷床下部から表面に向けて 0.0, 0.02, 0.05, 0.10, 0.17, 0.25, 0.40, 0.55, 0.70, 0.85, 1.0 とした.

4.4 初期条件

初期氷厚分布として水平方向に 600 km, 鉛直方向に 3000 m の矩形氷床を与える. 初期氷床の温度分布は地殻熱流量 γ , 表面温度 T_s から決まる定常熱伝導解を与える ($T = T_s - \frac{\gamma}{k}(h - z)$). ここで氷床表面温度 T_s は氷床全領域で融解温度に達しないように与える.

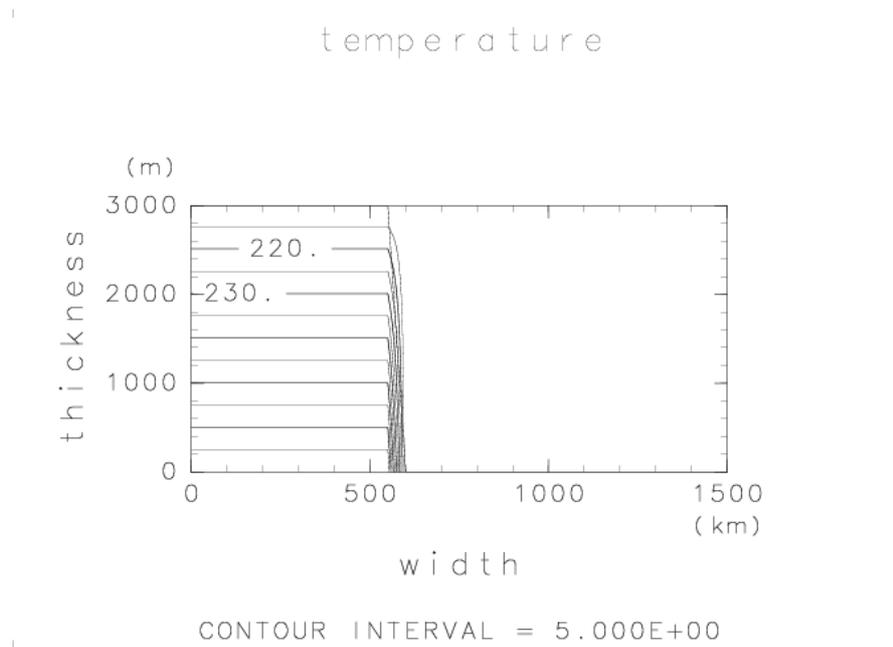


図 4.5: モデルの初期条件. 表面温度を $T_s = 210\text{K}$, としたときの値.

4.5 時間刻み

時間刻みは CFL 条件から 1 年とした. 計算時間は計算領域の右境界に達しない程度に行い, 20000 年とする.

4.6 数値実験の結果

以下の図 4.6 から図 4.21 に得られた結果を示す. 図 4.6, 4.7 は n の違いによる氷厚の違いを表した. n が小さい程, 流れていることがわかる. このことは図 4.4 では用いた構成方程式の分布を示したとおり用いた構成方程式は偏差応力が 10^{-1}MPa 以

下ではべき乗数が小さいほど歪み速度が小さい。本数値実験の設定では偏差応力はオーダーで $10^{-2} - -10^{-1}$ MPa の範囲に入るので妥当である。

図 4.8, 図 4.9 はべき乗数 $n = 3$ のときの 20000 年間の氷厚変化を表している。どちらも最初の 1000 年でかなり流れている。

A_{263K} , A_{273K} による違いが顕著に現れている。20000 万年後には水平移動距離で 150 km 違う。 A_{263K} , A_{273K} では水平速度のオーダーが一桁違うことに起因している。

図 4.10 から図 4. 21 までは各々のべき乗数に対する A_{263K} , A_{273K} の速度場, 温度場を表している。温度場は水平方向で新しく氷床が成長した領域に氷厚上部の粒子が落ち込み氷床下部で巻き込まれている様子が見られる。巻き込まれている位置は初期氷床の水平境界である。これは水平速度が底面速度が 0 としていることから説明がつく。速度場は A_{273K} の方が大きい値を持っていることがわかる。水平速度は氷厚, 氷厚の勾配, 温度依存関数から成り立っていることは方程式系から導き出した。どの n に対しても氷厚および氷厚の勾配は A_{263K} の方が大きいものにも関わらず速度場小さいということはこのような氷厚分布においては温度依存関数に依存していることがわかる。

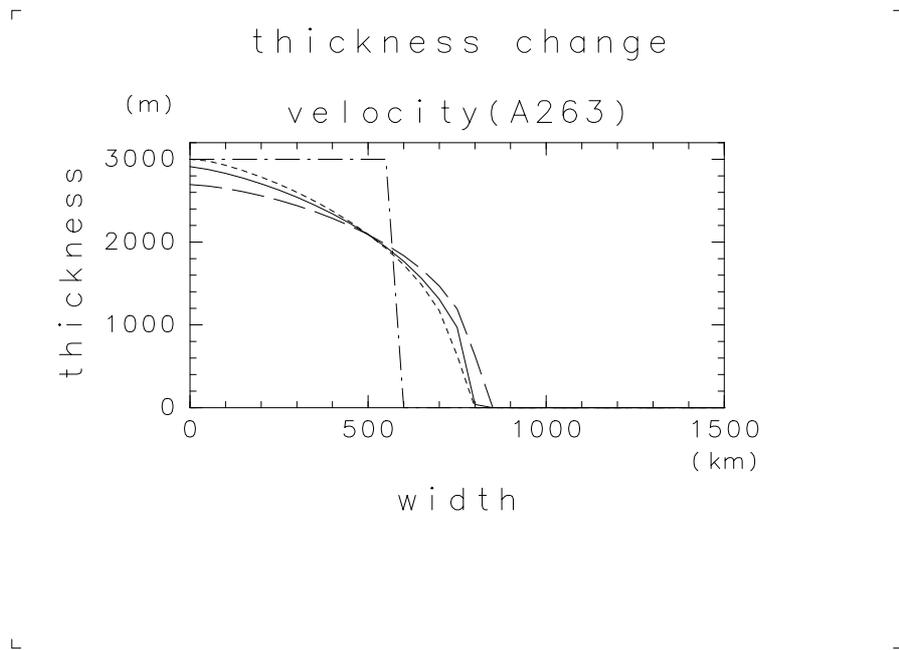


図 4.6: n の違いによる氷厚分布の違い (A_{263K} の場合). 初期氷床は一点破線. $n = 3$ は実線. $n = 2$ は破線, $n = 4$ は点線

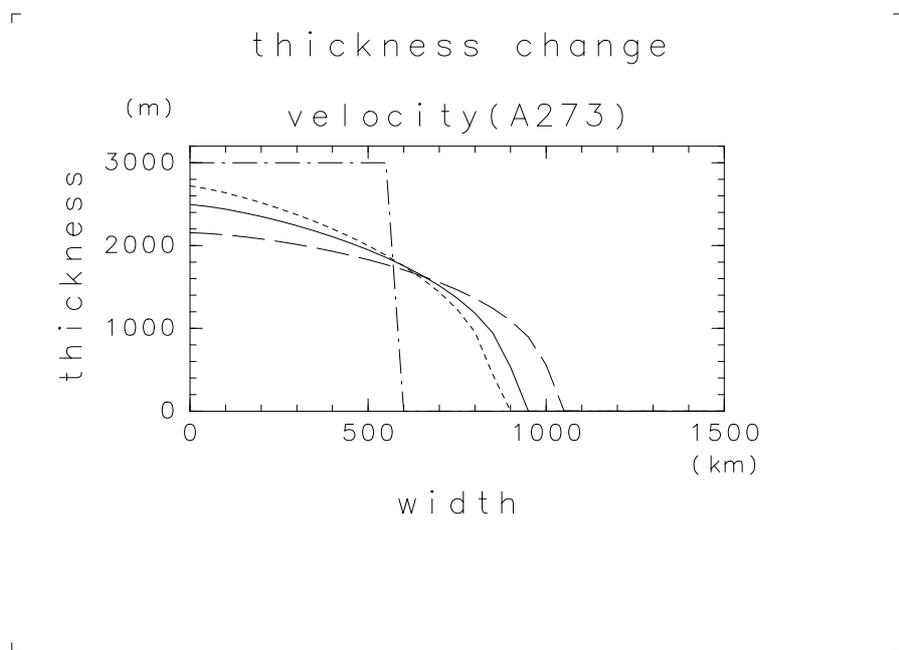


図 4.7: n の違いによる氷厚分布の違い (A_{273K} の場合). 初期氷床は一点破線. $n = 3$ は実線. $n = 2$ は破線, $n = 4$ は点線

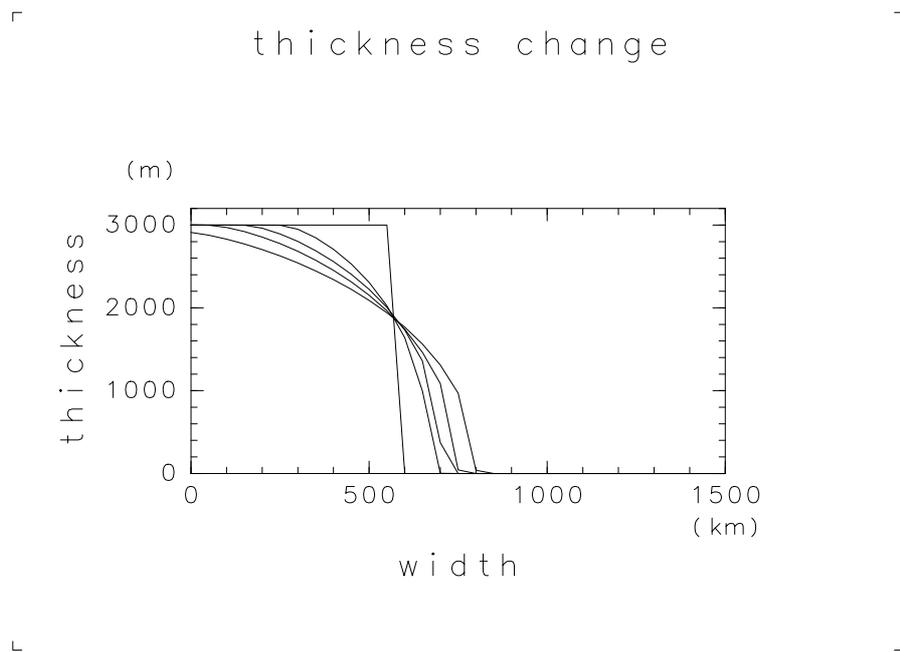


図 4.8: $n = 3, A_{263K}$ における氷厚の時間変化. 各ラインは初期氷床, 1000 年, 3000 年, 7000 年, 20000 年. 時間ステップ毎の様子

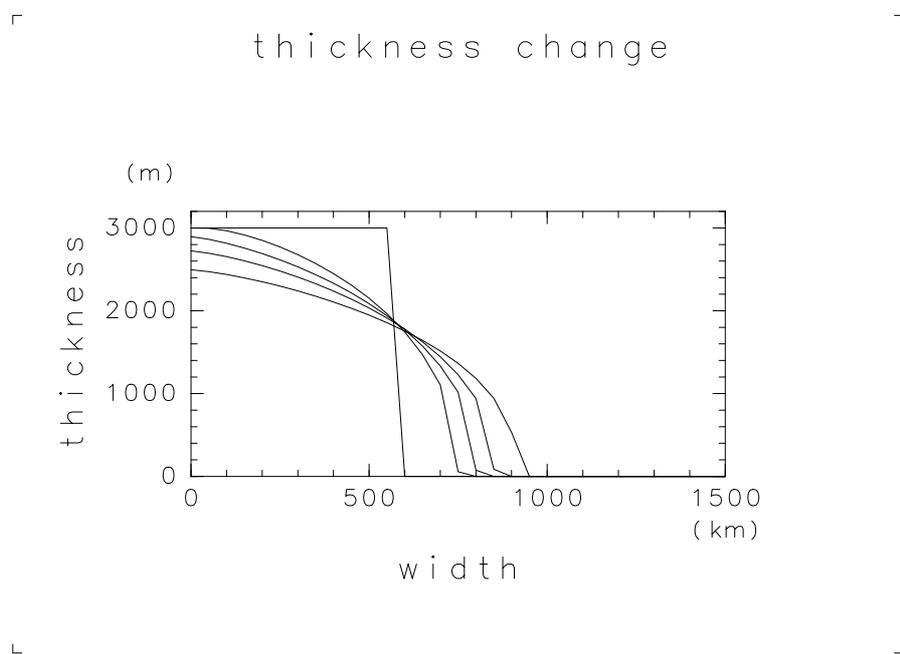


図 4.9: $n = 3, A_{273K}$ における氷厚の時間変化. 各ラインは初期氷床, 1000 年, 3000 年, 7000 年, 20000 年. 時間ステップ毎の様子

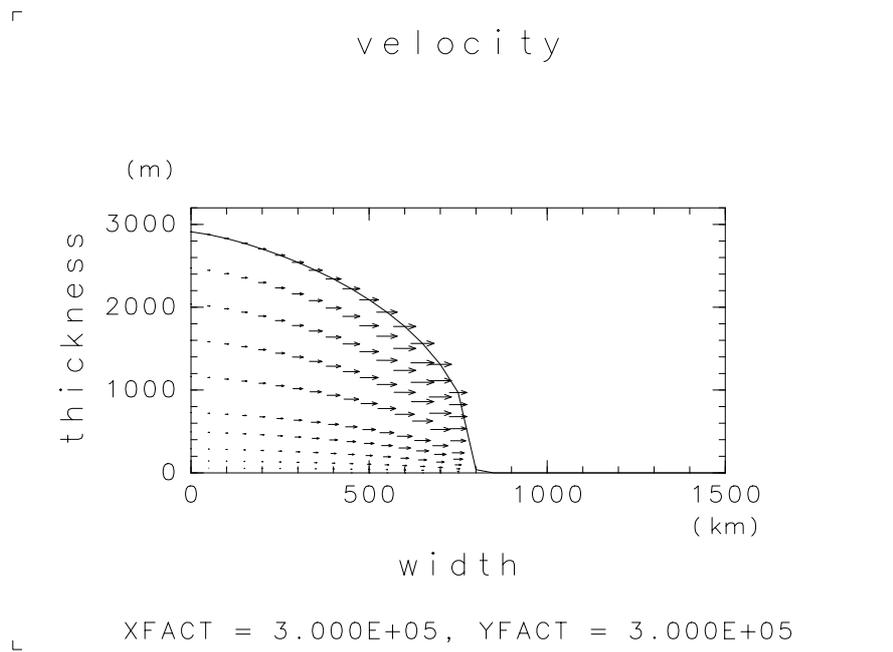


図 4.10: $n = 3$ における 20000 年後の氷床内部の速度場 (A_{263K} の場合)

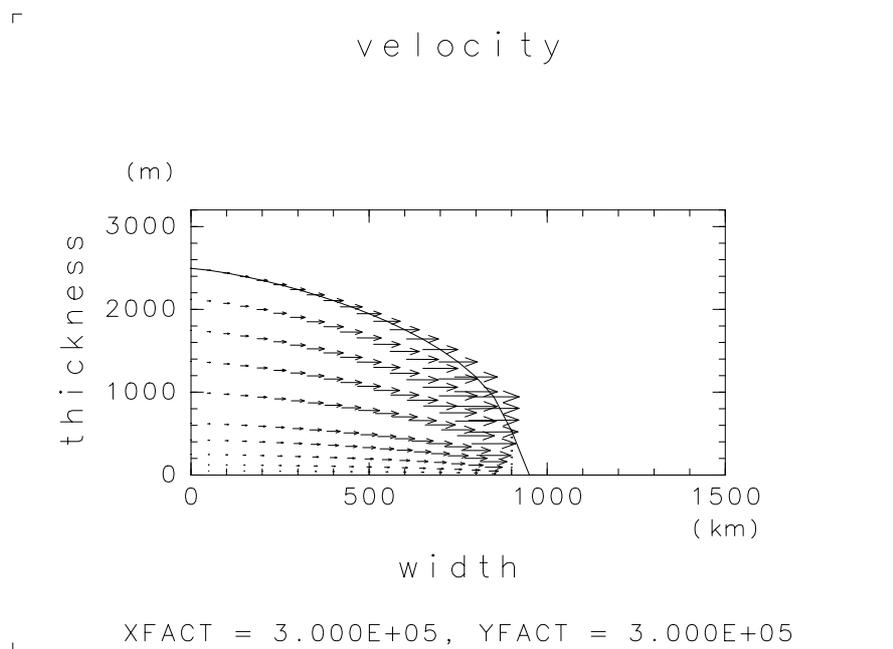


図 4.11: $n = 3$ における 20000 年後の氷床内部の速度場 (A_{273K} の場合)

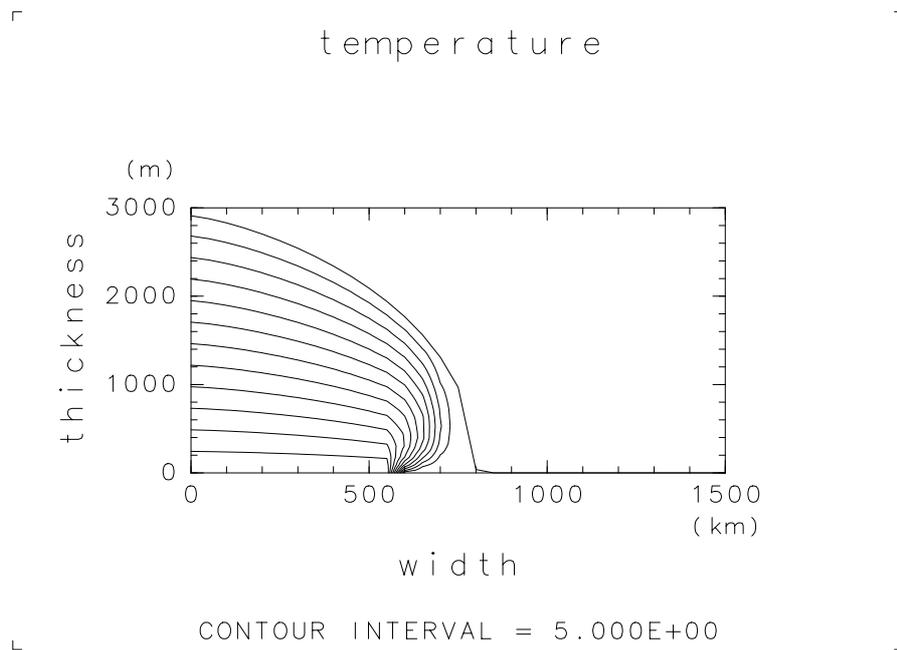


図 4.12: 20000 年後の氷床内部の温度場 (A_{263K} の場合)

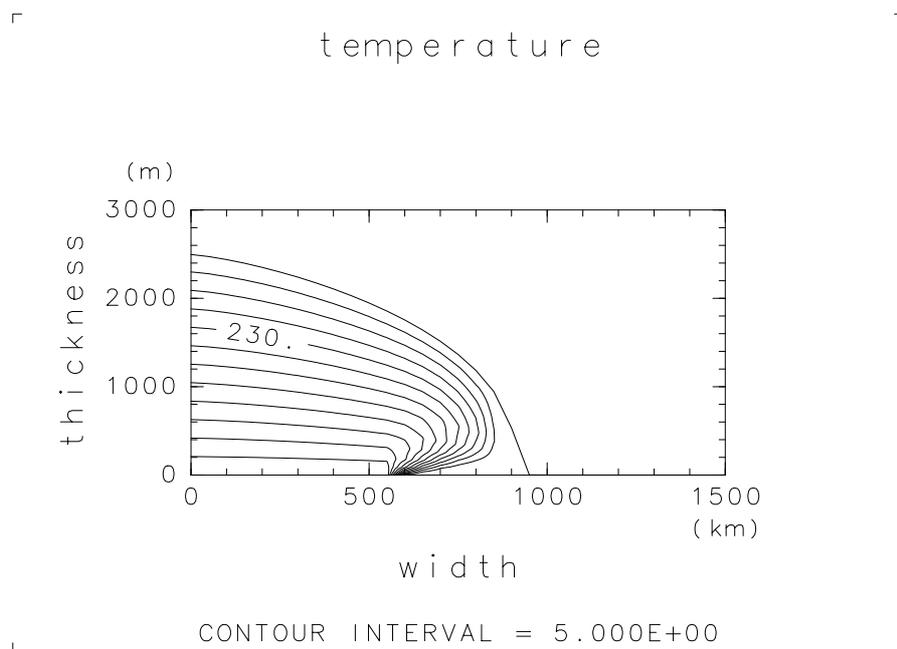


図 4.13: 20000 年後の氷床内部の温度場 (A_{273K} の場合)

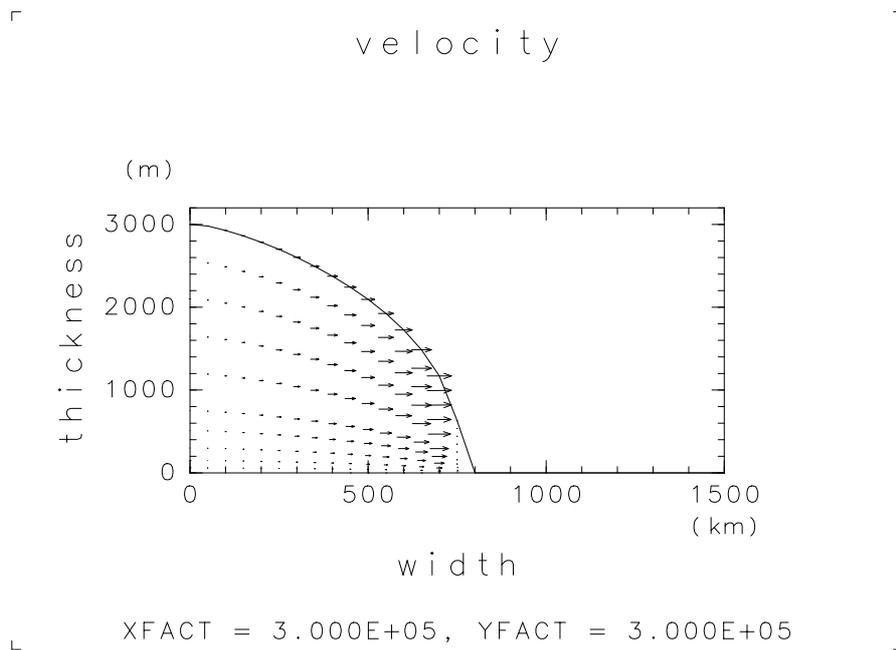


図 4.14: $n = 4$ における 20000 年後の氷床の速度場 (A_{263K} の場合)

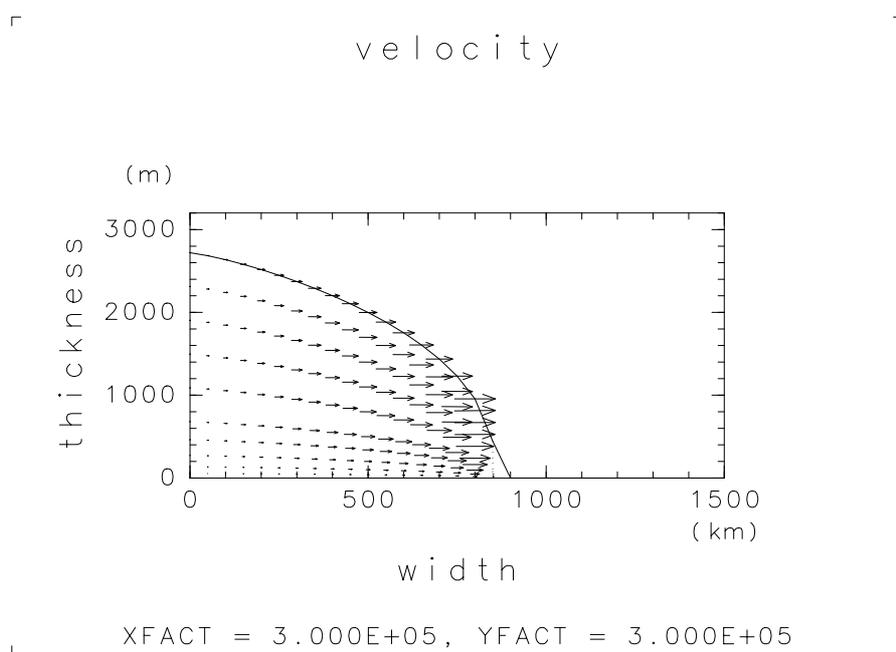


図 4.15: $n = 4$ における 20000 年後の氷床の速度場 (A_{273K} の場合)

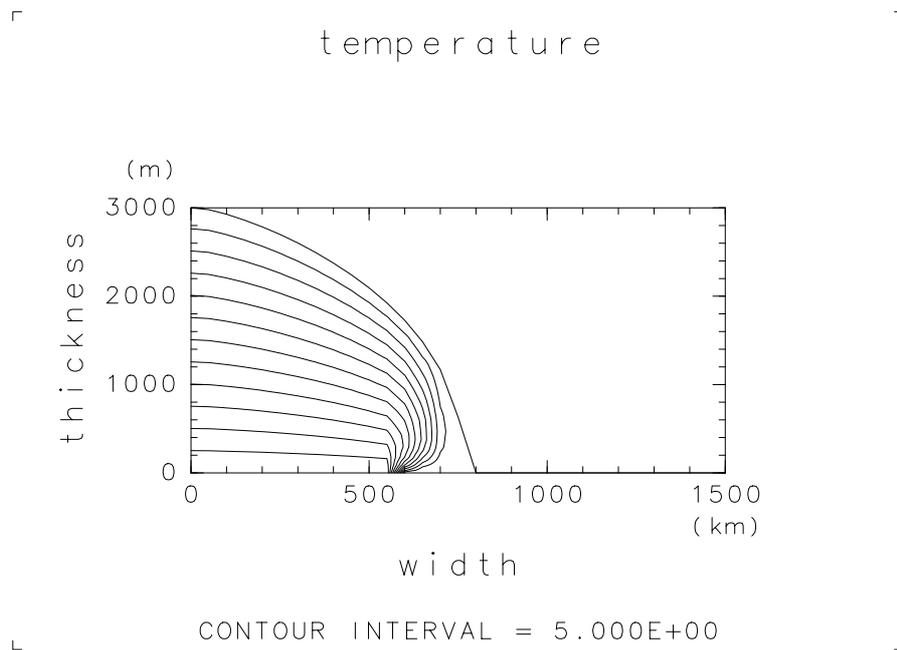


図 4.16: $n = 4$ における 20000 年後の氷床の温度場 (A_{263K} の場合)

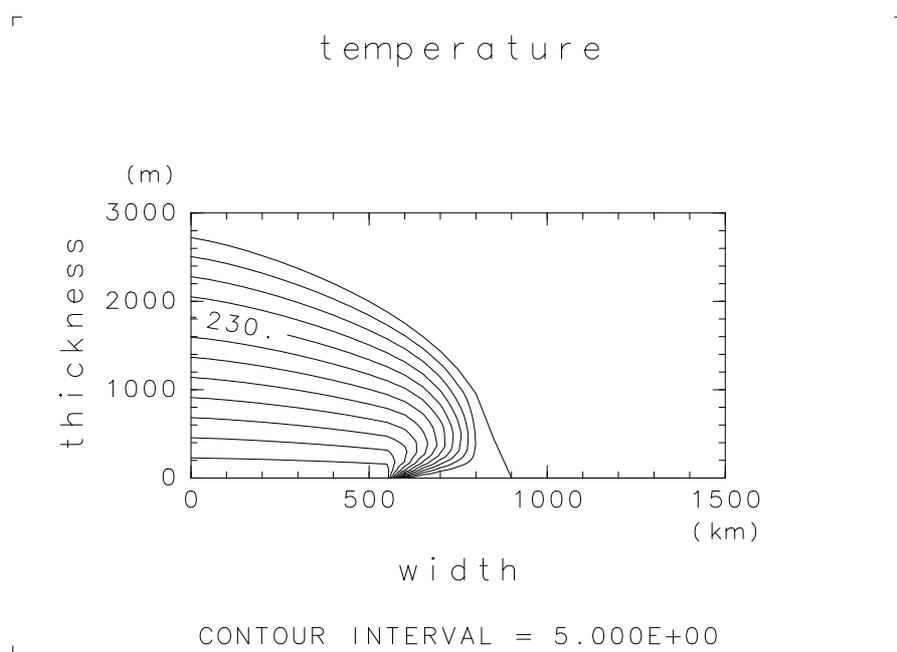


図 4.17: $n = 4$ における 20000 年後の氷床の温度場 (A_{273K} の場合)

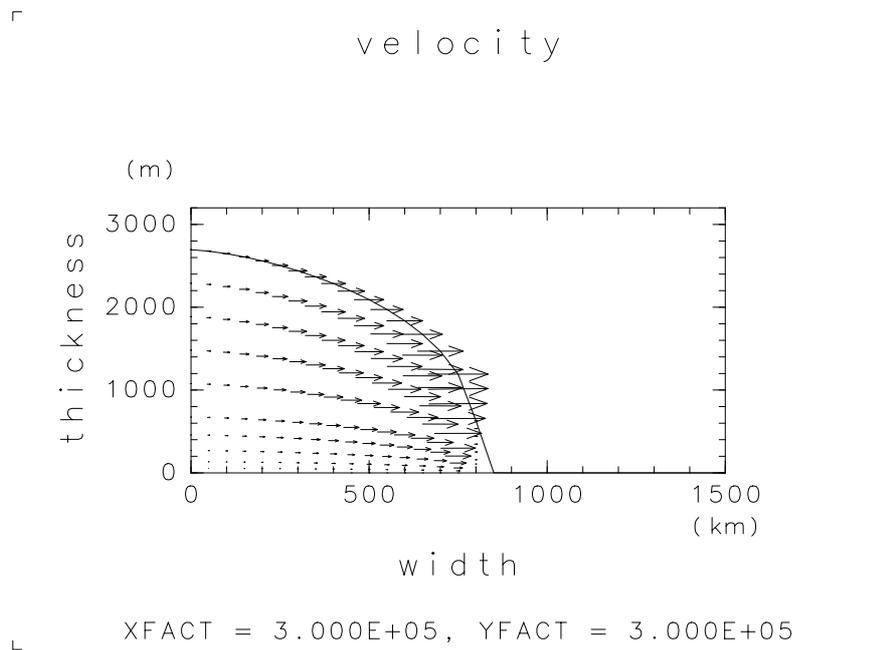


図 4.18: $n = 2$ における 20000 年後の氷床の速度場 (A_{263K} の場合)

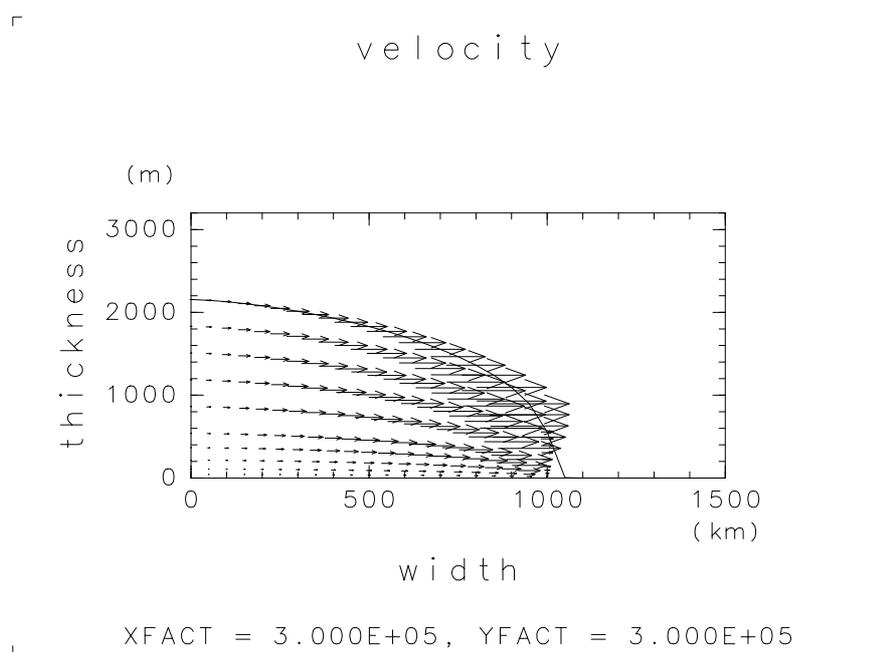


図 4.19: $n = 2$ における 20000 年後の氷床の速度場 (A_{273K} の場合)

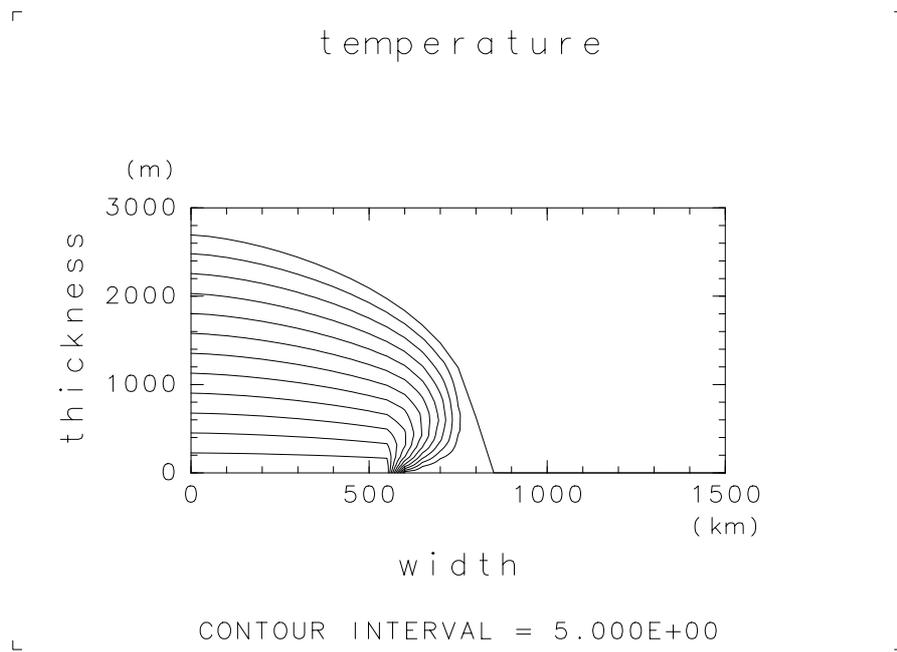


図 4.20: $n = 2$ における 20000 年後の氷床の温度場 (A_{263K} の場合)

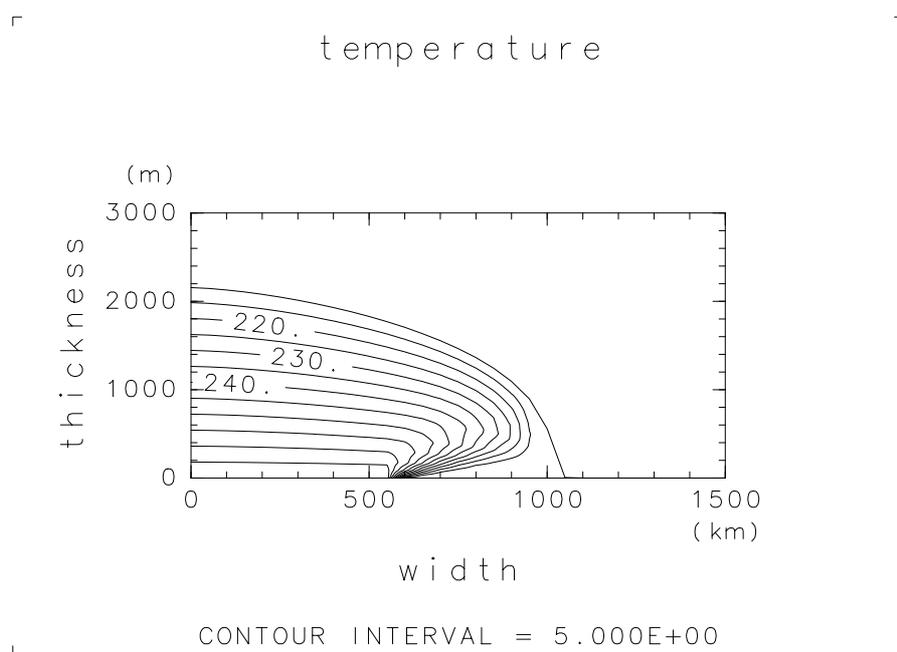


図 4.21: $n = 2$ における 20000 年後の氷床の温度場 (A_{273K} の場合)

5 議論と今後の課題

力学過程を考慮した氷床流動数値モデルを開発し, 構成方程式のべき乗数 n を実際に変えて計算を行った. 計算結果からべき乗数 n の違いに対する流れ場の違いが反映される結果が得られた.

本モデルの計算結果の信憑性について質量保存, エネルギー保存に関する検証がされていない. 保存量の妥当性について, 今後の早急な課題である. 本研究では構成方程式の温度依存に関するパラメータは一定値として用いた. 今後は熱力学過程を結合したモデルの開発に着手する必要がある.

また今後の研究は地球流体電脳倶楽部 (<http://www.gfd-dennou.org>) における氷河・氷床モデルプロジェクト (<http://dennou-h.gfd-dennou.org/arch/omochi/>) へ引き継いでいく.

謝辞

本研究をするにあたって多くの助言をして頂いたたくさんの方々に深く感謝します。

指導教官の林祥介教授にはモデルの定式化を行う際に流体力学的な記述に対する助言を頂きました。小高正嗣助手には正月明け早々からプログラムソースのチェック論文チェックとさまざまな助言および指導をしていただきました。倉本圭助教授には氷の物性に関する助言および指導をしていただきました。現博士過程の東京大学気候システム研究センター、斎藤冬樹さんには学位審査直前という忙しい時期にもかかわらず氷床モデルの先駆者としていろいろな助言を頂きました。

そのほか、分野が違って分からない内容にも辛抱強くつき合って頂きました林・渡部研究室の院生の方々にもまとめて恐縮ですが、大変感謝しています。ありがとうございました。

また本研究で計算結果を描写させるために地球流体電脳倶楽部の地球流体電脳ライブラリ DCL (<http://www.gfd-dennou.org/arch/dcl/>) を使用しました。開発者の皆様、ありがとうございました。

参考文献

- Blatter, H. 1995. Velocity and stress fields in grounded glaciers: a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. *J. Glaciol.* **41**(138), 333-344
- Hutter, K. 1983. Theoretical glaciology: material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets. *D. Reidel Publishing Co./Tokyo, Terra Scientific Publishing Co.*
- Huybrechts, P. 1990. A 3-D model for the Antarctic ice sheet: a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast. *Climate Dynamics* **5**, 79–92
- Huybrechts, P., T. Payne, and The EISMINT Intercomparison group. 1996. The EISMINT benchmarks for testing ice-sheet models. *Annals of Glaciology* **23**, 1–12
- A. J. Payne, P. Huybrechts, A. Abe-Ouchi, R. Calov, J. L. Fastook, R. Greve, S. J. Marshall, I. Marsiat, C. Ritz, L. Tarasov, M. P. A. Thmassen. 2000. Results from the EISMINT model intercomparison: the effects of thermomechanical coupling. *J. Glaciol.* **46**(153), 227 – 238
- J. D. Jenson, D. 1977. A three-dimensional polar ice-sheet model. *J. Glaciol.* **18**, 373 – 389
- J. F. Nye, W. B. Durham, P. M. Schenk, and J. M. Moore, 2000. The instability of a South Polar Cap on Mars Composed of Carbon Dioxide. *Icarus.* **144**, 449–455
- Paterson, W. S. B. 1994. The Physics of glaciers (3rd ed.). *Pergamon, Oxford*
- Steineman, S. 1954. Results of preliminary experiments on the plasticity of ice crystals. *J. Glaciology*, **2**, 404–412
- W. Richard Peltner, David L. Goldsby, David L. Kuhlstedt, Lev Tarasov, 2000. Ice-age ice-sheet reology: constraints from the Last Glacial Maximum form of the Laurentide ice sheet. *Ann of Glaciol.* **30**, 163 – 176
- 前野紀一, 黒田登志雄, 1986. 基礎雪氷学講座第 I 巻, 雪氷の構造と物性. 古今書院.