

# 高・低気圧の発達に関する理論的研究

北野 太郎

神戸大学理学部地球惑星科学科  
地球および惑星大気科学研究室

2009年2月28日

## 要旨

本論文は高低気圧の発生・発達について流体力学的に解明した初期の研究である Eady(1949) のレビューを行った。

まず高低気圧を平均場からのゆらぎとみなして定式化を行った。その後、系の設定を簡略化した Eady(1949) に基づいて、ゆらぎがどのような状況で発達するのか、また発達したときにどのような空間構造を持つのか、ということに注目して調べた。

# 目次

第1章	はじめに	2
第2章	支配方程式系	3
2.1	支配方程式	3
2.2	境界条件	4
第3章	エネルギー論から見た不安定条件	6
3.1	エネルギー方程式	6
3.2	順圧不安定	7
3.3	傾圧不安定	8
第4章	傾圧不安定	9
4.1	傾圧不安定の基本的な構造	9
第5章	Eady's Model	12
5.1	Eady's Model とは	12
5.2	ゆらぎの形	12
5.3	固有値問題の定式化	13
5.4	成長率が最大となるときの波数	16
5.5	ゆらぎの空間構造	17
第6章	まとめ	21
	謝辞	22
	参考文献	23
	付録	24

# 第1章 はじめに

地球の中高緯度では水平方向に数千 km の規模を持ち, かつ 2 ~ 3 日で変化する大気現象が支配的である. これらは高低気圧によってもたらされることが知られている. 高低気圧の発生・発達について流体力学的に解明した初期の研究は Charney(1947) と Eady(1949) によって行われた.

ここでは, まず第 2 章で高低気圧を平均場からのゆらぎとみなし, 不安定問題として定式化を行った. 第 3 章では, そのゆらぎのもつエネルギーからゆらぎが成長するための条件を考えた. 第 4 章では, 中高緯度で不安定が発生する構造を物理的に考えた. 第 5 章では, 系の設定を簡略化した Eady(1949) に基づいて, ゆらぎがどのような状況で発達するのか, また発達したときにどのような空間構造を持つのか, ということに注目して調べた. 第 6 章はまとめである.

## 第2章 支配方程式系

### 2.1 支配方程式

最初に、場を「平均場」と「ゆらぎ場」に分けて考えることにする。そして高気圧・低気圧は、平均場からの「ゆらぎ」として捉えることにする。流線関数により、流れ場を  $\psi$ 、平均場を  $\Psi$ 、ゆらぎ場を  $\phi$  と表して、以下のように書くことにする。

$$\psi(x, y, z, t) = \Psi(y, z) + \phi(x, y, z, t). \quad (2.1.1)$$

また、その他の物理量についても同様のことを行う。東西方向の速度  $u (= -\partial\phi/\partial y)$  は

$$u(x, y, z, t) = U_0(y, z) + u'(x, y, z, t), \quad (2.1.2)$$

南北方向の速度  $v (= \partial\phi/\partial x)$  は

$$v(x, y, z, t) = v'(x, y, z, t), \quad (2.1.3)$$

温位  $\theta (= \partial\phi/\partial z)$  は

$$\theta(x, y, z, t) = \Theta_0(y, z) + \theta'(x, y, z, t), \quad (2.1.4)$$

とする。ここで、 $U_0$ 、 $\Theta_0$  はそれぞれ平均場の東西方向の速度、温位を表す。 $u'$ 、 $v'$ 、 $\theta'$  はそれぞれゆらぎの東西方向の速度、南北方向の速度、温位を表す。

回転系上の流体力学の基礎方程式に対して、中緯度での数千 km のスケールで数日程度で変動する大気現象を記述するため、2 つの近似を考える。準地衡風近似と静水圧近似である。準地衡風近似とは、

- ・ 移流の効果は無視する。
- ・ 摩擦の効果も無視する。
- ・ 水平方向の気圧傾度力とコリオリ力が釣り合っている。

という近似である。静水圧近似とは、

- ・ 鉛直方向の気圧傾度力と重力がつりあっている。
- ・ 水平スケールは、鉛直スケールより十分大きいとする。

という近似である。これらの近似を行うと準地衡風のポテンシャル渦度方程式が得られる。これは中緯度の場の状況をよく表しているため、これを支配方程式と

考える.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \beta y \right] = 0. \quad (2.1.5)$$

ここで,  $\rho_s$  は大気の密度,  $S$  は静的安定度とする. いまは  $\beta$  平面で考えている. (2.1.1) を準地衡風のポテンシャル渦度方程式の解として代入すると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) q + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0 \quad (2.1.6)$$

となる<sup>\*1</sup>. ここではゆらぎのポテンシャル渦度を

$$q = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \quad (2.1.7)$$

平均場のポテンシャル渦度を

$$\Pi_0 = \beta y + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (2.1.8)$$

としている. ここで, 非線形項について議論しておく. (2.1.6) はそのままでは扱いにくい. 任意の振幅に対する初期条件の安定性を調べることができれば望ましいが, (2.1.6) は非線形なので, このままでは解析的取り扱いが難しい. そこで, 少なくとも初期においてゆらぎの振幅が

$$\phi \ll 1 \quad (2.1.9)$$

と十分小さいときを考える.  $O(\phi)$  の項を無視することにより線形化を行うと,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) q + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0 \quad (2.1.10)$$

となる. 以後, この式をここでの支配方程式とする.

## 2.2 境界条件

続いて境界条件を考える. 南側と北側に  $y$  軸に垂直な剛体壁が存在し, 地表面と上部境界面には  $z$  軸に垂直な剛体壁が存在すると考える. そのため, それぞれの境界では以下の条件が成り立つとする.

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad y = \pm 1, \quad (2.2.1a)$$

$$w = 0, \quad z = 0, \quad z = 1. \quad (2.2.1b)$$

<sup>\*1</sup>導出は付録 1 を参照.

つまり、境界においては流れの出入りはないものとする。またここでは剛体壁における摩擦は無視するとして話を進める。水平方向に広がる境界で、熱力学方程式

$$\frac{d_0}{dt}\theta + wS = \mathcal{H} \quad (2.2.2)$$

を適用して考える。ここで  $\mathcal{H}$  は非断熱加熱を表すが、いまは無視して考えることにする。すると熱力学方程式は変形、線形化することで、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial U_0}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.2.3)$$

となる<sup>\*2</sup>。

---

<sup>\*2</sup>導出は付録 2 を参照。

## 第3章 エネルギー論から見た不安定条件

### 3.1 エネルギー方程式

この節では、エネルギーについて着目することで、ゆらぎがどのように成長するかを考えることにする。ゆらぎ場のエネルギー方程式は、(2.1.10) に  $\rho_0\phi$  をかけ、流量を積分することで得られる。  $x$  方向のゆらぎ場の周期性と、  $y = \pm 1, z = 0, 1$  での境界条件を使うと、部分積分をすることで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 dy dz \frac{\rho_s}{S} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + S^{-1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ = \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 dy dz \left[ \rho_s \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y}} + \rho_s S^{-1} \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z}} \right] \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

が得られる。ここで、

$$\overline{(\quad)} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X (\quad) dx \quad (3.1.2)$$

とする。(3.1.1) の左辺の積分量は、ゆらぎ場の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの合計の時間変化率を表している。このゆらぎのエネルギーの成長、減衰は右辺の項によって与えられる。右辺第一項は、

$$\int_0^{z_T} \int_{-1}^1 \rho_s \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y}} dy dz = - \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 \rho_s \overline{u_0 v_0} \frac{\partial U_0}{\partial y} dy dz \quad (3.1.3)$$

と書ける。これは右辺をみて分かるように東西風の水平シア  $\partial U_0 / \partial y$  とゆらぎ場のレイノルズ応力  $-\rho_s \overline{u_0 v_0}$  をかけて、子午面で積分したものである。

右辺第二項は、

$$\int_0^{z_T} \int_{-1}^1 \rho_s \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} S^{-1} \frac{\partial U_0}{\partial z}} dy dz = - \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 \rho_s \overline{\theta_0 v_0} S^{-1} \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} dy dz \quad (3.1.4)$$

これは、温度風の関係を用いると、水平温度勾配  $-\frac{\partial \Theta_0}{\partial y}$  と北向き熱フラックス  $-\rho_s \overline{\theta_0 v_0}$  の積を子午面で積分したものを表している。



したがって、ゆらぎエネルギーが生じる源は、(3.1.3), (3.1.4) で表される項であり、 $U_0$  の水平シアーと鉛直シアーに依存していることが分かる。ここで、 $E(\phi)$  をゆらぎの全エネルギーとして、

$$E(\phi) \equiv \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 dy dz \frac{\rho_s}{S} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{S} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.1.5)$$

と表すと、

$$\frac{\partial E(\phi)}{\partial t} = - \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 dy dz \rho_s \left[ \overline{v_0 u_0} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\overline{v_0 \theta_0}}{S} \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right] \quad (3.1.6)$$

となる。また平均流のエネルギーを  $\overline{E}$  とすると、

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = - \int_0^{z_T} \int_{-1}^1 dy dz \rho_s \left[ \overline{v_0 u_0} \frac{\partial \overline{u_0}}{\partial y} + \frac{\overline{v_0 \theta_0}}{S} \frac{\partial \overline{\theta_0}}{\partial y} \right] \quad (3.1.7)$$

と書くことができる<sup>\*1</sup>。(3.1.6) を (3.1.7) と比較すると、それは 東西方向の基本場の流れのエネルギーとゆらぎのエネルギーが保存するという証拠である。それゆえ、平均流の勾配 ( $\partial U_0 / \partial y$ ,  $\partial \theta_0 / \partial y$ ) に影響を与えるゆらぎの運動量フラックスと熱フラックスは、平均流とゆらぎの流れの間でエネルギーを変換するメカニズムを表している。したがって、ゆらぎ場によって得られるエネルギーは不安定過程を通り、平均場から失わなければならない。

## 3.2 順圧不安定

平均流に水平シアーがあることに依存する不安定過程は順圧不安定と呼ばれている。それは均質流体で鉛直シアーがない場合に起こり得る。順圧不安定過程において、ゆらぎにエネルギーが輸送されるためには、(3.1.1) から、子午面における平均場で

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y} \quad (3.2.1)$$

が正でなくてはならない。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial y} &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} / \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial U_0}{\partial y} \\ &= - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_\phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial U_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

<sup>\*1</sup>導出は付録 3 を参照。

であるから、 $\phi$  の等値線は北西から南東に傾いていなければならない。ここで、傾圧不安定が擾乱のエネルギーを増大させるならば、 $\partial U_0/\partial y > 0$  である。 $\phi$  の等値線が逆向きに傾いていたならば、ゆらぎは平均流にエネルギーを与えることになるだろう。そのエネルギーの変換速度は平均の水平シアーの大きさに依存する。もし  $\partial U_0/\partial y < 0$  ならば、当然  $\phi$  というエネルギーを放出する流線の方法は逆になる。

### 3.3 傾圧不安定

もう一つの不安定過程は平均流に鉛直シアーがあることに依存している。(温度風の関係から) 鉛直シアーは水平温度勾配があることを暗に意味しているので、この過程を傾圧不安定と呼んでいる。水平温度勾配の存在は基本流においてポテンシャルエネルギーが存在することを暗に意味している。そしてこれが、傾圧不安定のエネルギー源になっている。傾圧変換項が正であるための条件は、平均場で

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial z} = - \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_\phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial U_0}{\partial z} > 0 \quad (3.3.1)$$

である。結果として  $\partial U_0/\partial z > 0$  では、傾圧変換項が正であるためには  $\phi$  の等値線は上向き、西向きに傾いていなければならない。このようにゆらぎ場がエネルギーを得るためには、等値線の方法  $\phi$  がシアー流によって傾けられる方法と逆向きになる。

## 第4章 傾圧不安定

### 4.1 傾圧不安定の基本的な構造

前章のゆらぎのエネルギー方程式 (3.1.6) から, 平均流には 2 つの潜在的なエネルギー源があることが分かる.  $U_0$  の鉛直シアーと水平シアーである. 鉛直シアーとはすなわち水平温度勾配を表すから, それはゆらぎによってポテンシャルエネルギーが輸送されることを示している.

大気における流れは一般に鉛直シアーと水平シアーの両方を持っているが, ここでは簡略化した場合を考える. 今の節では, 風の東西成分が鉛直シアーのみを持つ場合 (水平温度勾配を持つ場合), すなわち傾圧不安定の場合のみを考えていくことにする.

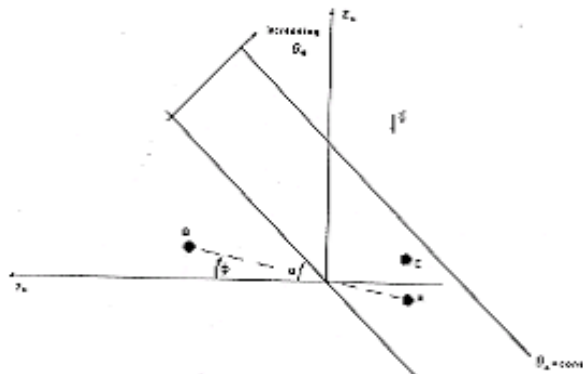


図 4.1.1: 傾圧不安定の際の子午面方向の構造を図示したもの (Pedlosky, 1987)

ここでは図 4.1 で描かれた状況を考えることにする. 地球の中緯度で水平温度勾配を持つ場合というのは, 子午面上で等ポテンシャル面が水平方向に対して角度  $\alpha$  だけ傾いた状況になっている. これはコリオリ力と等  $\theta_*$  面の傾斜から暗に示されている水平方向の圧力傾度力が釣り合った平衡状態にあるからである. もし回転のない流れ場で最初に傾いている状態ならば, 等  $\theta_*$  面はすぐに水平方向を向くことになるだろう.

図 4.1 に示すように流体要素が位置  $A$  から位置  $B$  に変位することを考えることにする.  $y, z$  方向への流体要素の有次元の変位をそれぞれ  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  とする. 流体要素

が位置  $A$  から位置  $B$  に動くときの密度変化は,

$$\Delta\rho_{*A} = +\frac{1}{\gamma} \frac{p_{*0}}{R\theta_{*A}} \left\{ \frac{p_*}{p_{*0}} \right\}^{1/\gamma} \left\{ \frac{\partial p_*}{\partial z_*} \frac{1}{p_*} \zeta_* + \frac{\partial p_*}{\partial y_*} \frac{1}{p_*} \eta_* \right\} \quad (4.1.1)$$

である. ここで,  $\gamma$  は比熱比,  $p_0$  は地表面での圧力,  $p$  はそこでの圧力,  $R$  は気体定数, これは圧力が水平方向に変化することで密度が変化することを示している. ここで変位している間は温位

$$\theta_* = \frac{p_{*0}}{R\rho_*} \left( \frac{p_*}{p_{*0}} \right)^{1/\gamma} \quad (4.1.2)$$

は保存するとする. 変位した後に  $A$  がもつ密度は,

$$\rho_{*A} + \Delta\rho_{*A} = \rho_{*A} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{*A}}{p_{*A}} \zeta_* \left( \frac{\partial p_*}{\partial z_*} \right)_A + \eta_* \left( \frac{\partial p_*}{\partial y_*} \right)_A \quad (4.1.3)$$

である. 一方,  $B$  のもつ密度は単純なテイラー展開により,

$$\rho_{*B} = \rho_{*A} + \left( \frac{\partial \rho_*}{\partial y_*} \right)_A \eta_* + \left( \frac{\partial \rho_*}{\partial z_*} \right)_A \zeta_* \quad (4.1.4)$$

とかける. 密度変化のない  $B$  の密度と比較したときの密度の差は,

$$\begin{aligned} \rho_{*A} + \Delta\rho_{*A} - \rho_{*B} &= \rho_{*A} \left[ \zeta_* \left\{ \frac{1}{\gamma p_{*A}} \left( \frac{\partial p_*}{\partial z_*} \right)_A - \frac{1}{\rho_{*A}} \left( \frac{\partial \rho_*}{\partial z_*} \right)_A \right\} \right. \\ &\quad \left. + \eta_* \left\{ \frac{1}{\gamma p_{*A}} \left( \frac{\partial p_*}{\partial y_*} \right)_A - \frac{1}{\rho_{*A}} \left( \frac{\partial \rho_*}{\partial y_*} \right)_A \right\} \right] \\ &= \rho_{*A} \left[ \frac{\zeta_*}{\theta_{*A}} \frac{\partial \theta_{*A}}{\partial z_*} + \frac{\eta_*}{\theta_{*A}} \frac{\partial \theta_{*A}}{\partial y_*} \right] \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

となる. そのことから変位方向  $AB$  の単位質量あたりの復元力は図の下向きを正として,

$$E_* = \left( \frac{\rho_{*A} + \Delta\rho_{*A} - \rho_{*B}}{\rho_{*A}} \right) g \sin\phi \quad (4.1.6)$$

と簡単にかける. ここで  $\phi$  は

$$\tan\phi = \frac{\zeta_*}{\eta_*}$$

で定義される変位の角度である. (4.1.5) と恒等式

$$\left( \frac{\partial z_*}{\partial y_*} \right)_{\theta_*} = -\frac{\partial \theta_* / \partial y_*}{\partial \theta_* / \partial z_*}$$

とから, (4.1.6) は

$$E_* = \frac{g}{\theta_*} \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} \sin \phi \left[ \zeta_* - \eta_* \left( \frac{\partial z_*}{\partial y_*} \right)_{\theta_*} \right] \quad (4.1.7)$$

とかける.

変位が鉛直方向ならば (例えば  $A \rightarrow C$  のとき),  $\eta_* = 0$ ,  $\sin \phi = 1$  となり, (4.1.7) は

$$E_* = \frac{g}{\theta_*} \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} \zeta_*$$

となる.  $\partial \theta_*/\partial z_* > 0$  である限り, 鉛直方向の変位では正の復元力を生む.

$E < 0$  のとき, すなわち流体要素が

$$0 < \tan \phi < \left( \frac{\partial z_*}{\partial y_*} \right)_{\theta_*} \quad (4.1.8)$$

を満たすような軌道で変化するときには負の復元力が生ずる. つまり, 流体要素が水平ジオポテンシャル面と等温位面によってできる楔形の領域内で変位するならば,  $E_*$  は負の値をとり, これは復元力というよりむしろ浮力となって流体要素を最初の位置からより加速させる. これは傾圧不安定には絶対不可欠な構造でありその構造は等  $\theta_*$  面の傾きに大きく依存しており, 非圧縮流体においては等密度面の傾きにも依存している. 不安定である楔領域内の起動においては, 軽い気体は上昇し, 重い気体は下降して平均場のポテンシャルエネルギーを放出することになり, その結果, ゆらぎはエネルギーを得て成長する. そうして傾圧不安定は熱対流の形をとることが分かる.

## 第5章 Eady's Model

### 5.1 Eady's Model とは

ここまで中緯度大気を考えたときの基礎方程式の導出, エネルギー論から見てゆらぎが発達するのはどのような場合か, また不安定状態が引き起こる基本構造を議論してきた. ここからは, 高低気圧について流体力学的に研究したもので初期になされた Eady(1949) に基づいて, 中緯度大気の特徴である風の鉛直シアと水平温度勾配をある簡単な値で示し, その他の条件も簡略化した上で, 単純な系ではゆらぎがどのような状況で成長するのか, またゆらぎが発達したときの空間構造について調べることにする.

Eady' Model では風の東西方向成分と水平温度勾配を以下のように定義した.

$$U_0 = z \quad (5.1.1a)$$

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial y} = -1. \quad (5.1.1b)$$

また, その他どのような条件を設定したかを以下に記述する.

- ・ 非圧縮・非粘性流体を考える.
- ・  $f$  平面で話を進め球面の効果は考えない.
- ・ 境界での摩擦の効果は無視する.
- ・ 静的安定度は一定とする.
- ・ 平均場のポテンシャル渦度は常に一定となる.
- ・ 南側と北側, 地表面と上層にはそれぞれ剛体壁があるとして考える.

### 5.2 ゆらぎの形

この節ではゆらぎは支配方程式の解として, どのような形をしているかを仮定する. ここではゆらぎを波と考え, 波形解として以下のように与える.

$$\phi(x, y, z, t) = \text{Re} \Phi(y, z) e^{ik(x-ct)}. \quad (5.2.2)$$

ここで  $\text{Re}$  は  $\phi$  の実部をとることを表している. 東西波数  $k$  は  $\phi$  が負の  $x$  の値から正の  $x$  の値に対して有限であればよい, つまり  $\phi$  が経度方向に周期的であればよいので, 実数とする. さらに一般性を失わないように  $k$  は正の値をとるとする. 一方,

振幅関数  $\Phi$  と振動数  $kc$  は複素数である。特に、位相速度  $c$  は実部と虚部によって書かれ、

$$c = c_r + ic_i \quad (5.2.3)$$

である。またもし、(5.2.2) で  $c_i > 0$  の解が存在するならば、

$$\phi = \text{Re}\Phi e^{ik(x-c_r t)} e^{kc_i t} \quad (5.2.4)$$

ともかける。すると  $\phi$  は指数関数的に成長するので、ゆらぎの成長率は  $kc_i$  と考えてよい。当然、 $kc_i > 0$  のとき十分時間が経てば、ゆらぎは大きくなるので線形論では無視している非線形効果が重要になってくる。しかし、ゆらぎは初期の段階では平均場の不安定状態を表すことができる。それぞれの波数は任意のゆらぎを表すため、フーリエ積分によって合計することで、 $x$  の周期的な解は一般性を失わない。

いま、線形化した支配方程式と境界条件を考えているので、非自明な解はただ 1 つの  $c$  の値に対して存在し、他のパラメータの値も決める。したがって複素位相速度は  $c$  は不安定問題における固有値である。固有値の虚数の部分が値をもつ場合にはゆらぎが成長するため、流れ場は不安定である。それぞれの平均流  $U_0$  の値に対して固有値問題の解は成長率  $kc_i$  をもつ。そして、 $kc_i$  が最大となる波数  $k$  から最も不安定なときの東西波長が求まる。以下はこの方向性に従って、固有値問題を解くことにする。

### 5.3 固有値問題の定式化

最初に、2章で得られた基礎方程式 (2.1.10) と境界における熱力学方程式 (2.2.3) を Eady's Model に当てはめて考えると、それぞれ

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) q + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0 \quad (5.3.5)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial U_0}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (5.3.6)$$

となる。推定した解 (5.2.2) を (5.3.5) 式に代入し、変形すると、

$$(z - c) \left[ S^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k^2 \Phi \right] = 0 \quad (5.3.7)$$

となる<sup>\*1</sup>。ここで  $\Phi$  に対する境界条件は (2.2.1a) より、

$$\Phi = 0, \quad y = \pm 1 \quad (5.3.8)$$

<sup>\*1</sup>導出は付録 4 を参照

となる. また, 推定した解 (5.2.2) を (5.3.6) に代入し,  $z = 0$  と  $z = 1$  の場合で考えると,

$$-c \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi = 0, \quad z = 0 \quad (5.3.9)$$

$$(1 - c) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi = 0, \quad z = 1 \quad (5.3.10)$$

である. (2.2.1a) を満たす (5.3.7) の解は

$$\Phi(y, z) = A(z) \cos l_n y \quad (5.3.11)$$

の形で表すとする. ここで  $n$  は南北方向の波数である. 整数  $n$  は

$$l_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.3.12)$$

という値をとる.  $A(z)$  は任意の微分方程式

$$(z - c) \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \mu^2 A \right] = 0 \quad (5.3.13)$$

を満たす. ここで,

$$\mu^2 = (k^2 + l_n^2)S \quad (5.3.14)$$

とする. また境界条件は,

$$+c \frac{\partial A}{\partial z} + A = 0, \quad z = 0 \quad (5.3.15a)$$

$$(1 - c) \frac{\partial A}{\partial z} - A = 0, \quad z = 1 \quad (5.3.15b)$$

となる.

ここでは (5.3.13) の非自明解, つまり

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \mu^2 A = 0 \quad (5.3.16)$$

の解で, 複素数  $c$  を満足するものを考えよう. (5.3.16) の一般解は  $a$  と  $b$  を任意の定数として

$$A(z) = a \cosh \mu z + b \sin \mu z \quad (5.3.17)$$

とかける. これを (5.3.15a), (5.3.15b) に代入すると,  $a, b$  についての 2 つの線形方程式

$$a + \mu cb = 0 \quad (5.3.18a)$$

$$a[(c - 1)\mu \sinh \mu + \cosh \mu] + b[(c - 1)\mu \cosh \mu + \sinh \mu] = 0 \quad (5.3.18b)$$



が導かれる.  $a, b$  の非自明な解は, (5.3.18a), (5.3.18b) の  $a, b$  の係数の行列式が 0 のときのみ分かる. この条件から, (5.3.16) の解の条件として,  $c$  の 2 次方程式を得る<sup>\*2</sup>.

$$c^2 - c + \mu^{-1} \coth \mu - \mu^{-2} = 0. \quad (5.3.19)$$

これを解くと,

$$c = \frac{1}{2} \pm \left\{ \frac{1}{4} + \mu^{-2} - \mu^{-1} \coth \mu \right\}^{1/2} \quad (5.3.20)$$

である. 恒等式

$$\coth \mu = \frac{1}{2} \left[ \tanh \frac{\mu}{2} + \coth \frac{\mu}{2} \right] \quad (5.3.21)$$

により, (5.3.20) は

$$c = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{\mu}{2} - \coth \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} \right) \right] \quad (5.3.22)$$

と書き換えられる. いま, すべての  $\mu$  に対して,  $\frac{\mu}{2} \geq \tanh \frac{\mu}{2}$  である. したがって,  $\frac{\mu}{2} \geq \coth \frac{\mu}{2}$  のとき, (5.3.22) の平方根の中の符号は正なので,  $c$  の 2 つの解はいずれも実数である. 一方,  $\frac{\mu}{2} \leq \coth \frac{\mu}{2}$  のとき, 平方根の中の符号は負なので,  $c$  は複素数となる. それゆえ  $\mu$  の臨界値は

$$\frac{\mu_c}{2} = \coth \frac{\mu_c}{2} \quad (5.3.23)$$

で与えられ, その値は,

$$\mu_c = 2.3994... \quad (5.3.24)$$

である.  $\mu > \mu_c$  のとき, それぞれの  $k$  と  $n$  に対する解は, (5.3.22) で与えられる 2 つの中立波からなる.

一方,  $\mu < \mu_c$  のとき, (5.3.22) から  $c$  の平方根は共役複素数となる. このとき位相速度の実部  $c_r$  は平均流の平均速度  $c_r = 0.5$  で与えられる. (5.3.14) から,  $k$  が実数のときに不安定が起こるためには,  $S$  は

$$S = \frac{\mu^2}{(k^2 + l_n^2)} < \frac{\mu_c^2}{l_n^2} = 4 \frac{\mu_c^2}{\pi^2 (2n+1)^2} = \frac{2.333}{(2n+1)^2} \quad (5.3.25)$$

の条件を満たさなければならない. この不安定条件は,  $n = 0$  のとき 1 番簡単に満たされることは簡単に分かる. つまり,  $y$  方向に波数の大きい波が不安定である.

<sup>\*2</sup>導出は付録 5 を参照.

## 5.4 成長率が最大となるときの波数

不安定モードの成長率は,

$$kc_i = \frac{k}{\mu} \left[ \left( \coth \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (5.4.26)$$

である.  $\mu$  は  $l_n$  と  $S$  によって与えられる  $k$  の関数なので, (5.3.14) により方程式 (5.4.26) は波数関数として成長率の振る舞いを決定する. ここからは, パラメータに具体的な値を入れて, どの程度のスケールをもつゆらぎが成長し, どの程度のスケールの波が最も成長するのか, また安定な場合と比較しながら最も成長したときの空間構造はどのようになっているか, を考えることにする.

まず, 先ほどの考察により, 最も不安定な基本振動である  $n = 0$  の場合を考える. 静的安定度は  $S=1$  とする<sup>\*3</sup>.  $c(i)$  は波長がとても長いとき一番大きな値をとるけれども, 図のように  $k \rightarrow 0$  のとき成長率  $kc_i = 0$  となる.  $\mu < \mu_c$  では,  $k$  が十分大きいと成長率は 0 になる. これを図示したものが以下のグラフである.

図 5.1 から分かるように, 波数が  $k = 1.81$  より小さい波が成長率をもち, そのときゆらぎは発達する. これを有次元化した波長で考えると, おおよそ 3,000km よりも大きな水平スケールをもつ波が成長する. また, ゆらぎが最も成長するのは, グラフから明らかなように成長率が最大となる  $k_m = 1.25$  のときである<sup>\*4</sup>. 初期のゆらぎは全ての波数の波を統合したもので構成されているとすると, 波数  $k_m$  の

<sup>\*3</sup>静的安定度  $S$  を計算する.  $S$  は

$$S = \frac{N_s^2 D^2}{f_0^2 L^2}$$

と定義される. ここで  $N_s$  は流体粒子の鉛直方向の振動数でプラント・バイサラ振動数,  $D$  は大気の厚さ,  $f_0$  はコリオリパラメータを表している. 値はそれぞれ現実と対応させて以下で考える.

$$\begin{aligned} N_s &= \left( \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{10}{300} \frac{6}{1000} \right)^{1/2} \\ &= 1.4 \times 10^{-2} [s^{-1}], \\ D &= 10^4 [m], \\ f_0 &= 2\Omega \sin \alpha \\ &= 2 \times \frac{2\pi}{10^5} = 1.3 \times 10^{-4} [s^{-1}], \end{aligned}$$

ここで,  $g$  は重力加速度を表す.  $\alpha$  は緯度を表し,  $\sin \alpha = O(1)$  とする. これを  $S$  の式に代入すると

$$S = \frac{(1.4)^2 \times 10^{-4} 10^8}{(1.3)^2 \times 10^{-8} 10^{12}} \sim 1$$

となり得られる.

<sup>\*4</sup>有次元化の計算については付録 6 を参照.

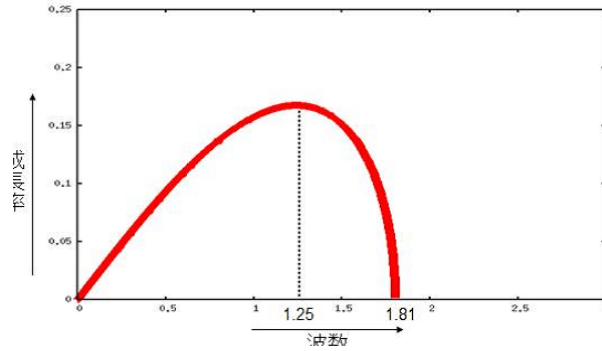


図 5.4.1: ゆらぎの成長率を波数の関数として表したグラフ

波は最も不安定な波であるので一番速く現れ、ゆらぎ場の構造を支配すると予想される。それゆえ最も不安定な波を、不安定な構造で最も卓越したゆらぎと結びつけるのが妥当である。波数  $k$  は有次元波長と対応し、最も成長するのは、おおよそ 5,000km の水平スケールをもつときである<sup>\*5</sup>。

## 5.5 ゆらぎの空間構造

次に、ゆらぎの空間構造を考える。  $c$  は分かっているので、(5.3.18a) と (5.3.18a) を用いて、

$$A(z) = \cosh \mu z - \frac{\sinh \mu z}{\mu c} \tag{5.5.27}$$

任意の定数をかけて得られる。  $\mu < \mu_c$  では

$$\phi = \text{Re } e^{kc_i t} e^{ik(x-0.5t)} \times \left[ \left( \cosh \mu z - \frac{0.5}{\mu|c|^2} \sinh \mu z \right) + \frac{ic_i \sinh \mu z}{\mu|c|^2} \right] \cos l_n y \tag{5.5.28}$$

また、ゆらぎが発達するときの温度場についても考えてみる。  $\theta = \partial\phi/\partial z$  であるから、(5.5.27) より、

$$\theta = \text{Re } e^{kc_i t} e^{ik(x-0.5t)} \times \left[ \left( \cosh \mu z - \frac{0.5}{\mu|c|^2} \cosh \mu z \right) + \frac{ic_i \sinh \mu z}{\mu|c|^2} \right] \cos l_n y \tag{5.5.29}$$

となる。これ  $t = 0$  のときで話を進めることにする。  $\phi$  と  $\theta$  の式は、

$$\phi = \cos l_n y \left[ \cos kx \left( \cosh \mu z - \frac{0.5}{\mu|c|^2} \sinh \mu z \right) - \sin kx \frac{c_i}{\mu|c|^2} \sinh \mu z \right] \tag{5.5.30}$$

$$\theta = \cos l_n y \left[ \left( \mu \sinh \mu z - \frac{0.5}{|c|^2} \cosh \mu z \right) \cos kx - \left( \frac{c_i}{|c|^2} \cosh \mu z \right) \sin kx \right] \tag{5.5.31}$$

<sup>\*5</sup>有次元化の計算については付録 6 を参照。

この式に  $y = 0$  を代入し、東西-鉛直断面で切ったときの気圧場と温度場を考える。

$$\phi = \cos kx \left( \cos \mu z - \frac{0.5}{\mu|c|^2} \sinh \mu z \right) - \sin kx \frac{c_i}{\mu|c|^2} \sinh \mu z \quad (5.5.32)$$

$$\theta = \left( \mu \sinh \mu z - \frac{0.5}{|c|^2} \cosh \mu z \right) \cos kx - \left( \frac{c_i}{|c|^2} \cosh \mu z \right) \sin kx \quad (5.5.33)$$

続いて、(5.5.32), (5.5.33) に  $z = 0$  を代入して、水平断面での気圧場と温度場を考えると、

$$\phi = \cos kx \cos l_n y \quad (5.5.34)$$

$$\theta = \left( -\frac{0.5}{|c|^2} \cos kx - \frac{c_i}{|c|^2} \sin kx \right) \cos l_n y \quad (5.5.35)$$

一方、ゆらぎが安定な場を考える。波数は  $k = 2.5$  とした。  $\phi$  は (5.2.2), (5.3.17) より、

$$\begin{aligned} \phi &= \text{Re} \Phi e^{ik(x-ct)} \\ &= \left( \cosh \mu z - \frac{\text{sihh } \mu z}{\mu c} \right) \cos l_n y \cos k(x-ct) \end{aligned} \quad (5.5.36)$$

となる。またこれを  $z$  で偏微分することにより、

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \left( \mu \sinh \mu z - \frac{1}{c} \cosh \mu z \right) \cos l_n y \cos k(x-ct) \end{aligned} \quad (5.5.37)$$

とが得られる。ここでも  $t = 0$  のときで話を進めることにする。この式に  $y = 0$  を代入し、東西-鉛直断面で切ったときの気圧場と温度場を考えると、

$$\phi = \left( \cosh \mu z - \frac{\text{sihh } \mu z}{\mu c} \right) \cos kx \quad (5.5.38)$$

$$\theta = \left( \mu \sinh \mu z - \frac{1}{c} \cosh \mu z \right) \cos kx \quad (5.5.39)$$

となる。これも (5.5.36), (5.5.37) に  $z = 0$  を代入すると、水平断面での気圧場と温度場を考える。

$$\phi = \cos kx \cos l_n y \quad (5.5.40)$$

$$\theta = -\frac{1}{c} \cos kx \cos l_n y \quad (5.5.41)$$

となる。ゆらぎが最も発達する場合のゆらぎ場の構造について議論する。まず、気圧場・温度場の東西-鉛直断面を図 5.5.2 に示す。

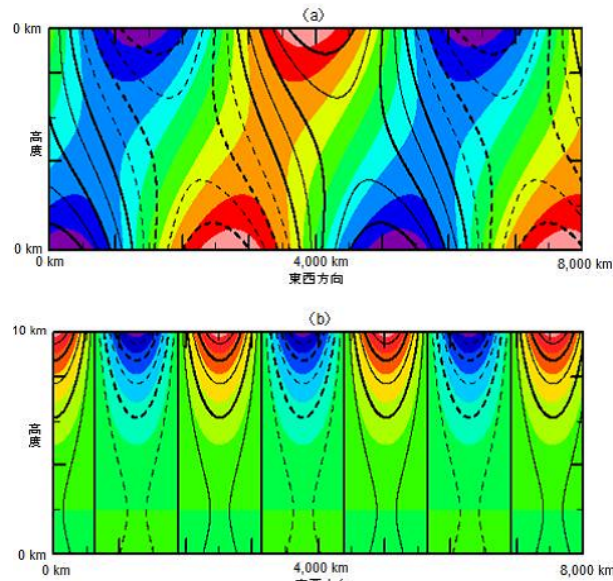


図 5.5.2:  $y = 0$  における東西 - 鉛直断面の気圧場と温度場. 等値線が気圧場を示し, 実線は高压部を, 点線が低压部を表している. 色の分布は温度場を示し, 暖色系が高温域, 寒色系が低温域を表している. (a) は  $k = 1.6$  でゆらぎが最も成長する場合, (b) は  $k = 2.5$  でゆらぎが成長しない場合である.

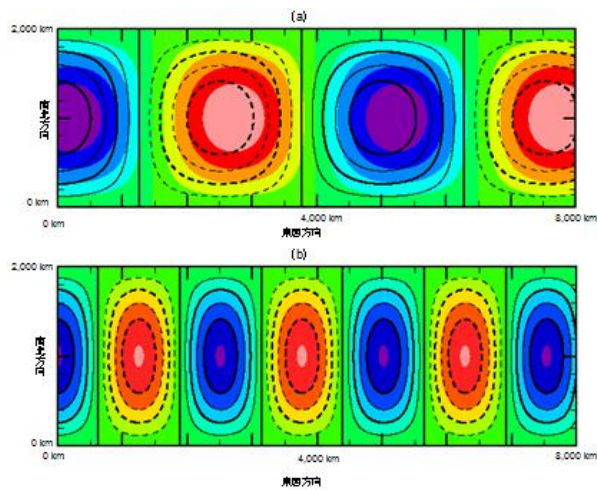


図 5.5.3:  $z = 0$  における東西 - 鉛直断面の気圧場と温度場. 等値線が気圧場を示し, 実線は高压部を, 点線が低压部を表している. 色の分布は温度場を示し, 暖色系が高温域, 寒色系が低温域を表している. (a) は  $k = 1.6$  でゆらぎが最も成長する場合, (b) は  $k = 2.5$  でゆらぎが成長しない場合である.

図 5.5.2 からわかるように、高低気圧が発達する場合、気圧の峰と気圧の谷は上空へ行くとともに西向きに傾いている。また、温度場は逆に上空へ行くとともに東向きに傾いているが、ゆらぎが成長しない場合は、気圧場・温度場とも鉛直方向には傾いていない。

次に、気圧場・温度場の水平断面を図 5.5.3 に示す。地上での気圧場と温度場の関係について考えてみる。ここでは低気圧に着目する。図 5.5.3 からわかるように、低気圧が発達する場合は、気圧場と温度場の位相がずれているため、気圧の谷の東側に高温域が存在し、西側に低温域が存在する。また地衡風の関係から、気圧の谷の東側では北向きの風が吹き、西側では南向きの風が吹いている。つまり、低気圧が発達するとき、低気圧の東側では南から高温の空気塊が移流され、西側では北から低温の空気塊が移流され、南北の温度差を解消するように熱の流れが起こっている。ゆらぎが発達しない場合、気圧場と温度場の位相は同じである。

## 第6章 まとめ

高低気圧をゆらぎとみなして支配方程式からゆらぎのエネルギーの式を立て、それにより、高低気圧の発生・発達についての条件が得られた。また、流体要素の変位を考えることで、中緯度大気での不安定が発生する基本構造が分かった。さらに場を簡略化して高低気圧を流体力学的に解明した Eady(1949) の研究について紹介した。Eady's Model によると、現実大気に相当するパラメータのもとでは水平スケールが約 3,000 km より大きいときに高低気圧が発達し、水平スケールが約 5,000 km のときに成長率が最大となることが確かめられた。

高低気圧が発達する場合の鉛直方向・水平方向の位相構造はそれぞれ特徴的であり、いずれも南北方向の温度差を解消するようになっている。

## 謝辞

本論文の作成にあたってはたくさんの方々に御指導と御協力を頂きました。

指導教官である林祥介教授には研究の方針を頂きました。岩山隆寛准教授, 高橋芳幸助教には, 途中で躓いた際など, ことある毎に相談させて頂きました。西澤誠也博士には可視化の際にソフトの使い方などを分かりやすく教えて頂きました。村上真也さんと納多哲史さんには, 論文を修正する際に大変丁寧に見て頂き, 助言を頂きました。研究室の皆様には, 様々なところで御協力頂き有難うございました。深く感謝しております。



## 参考文献

- Eady, E. T. 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus* 1, 33-52
- 木村竜治, 1998: 地球流体力学入門, 東京堂出版, 247pp
- Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 703pp
- 高藪出, 2000: 気象研究ノート第 198 号「温帯低気圧の力学」, 気象学会, 154pp

# 付録

## 付録 1 (2.1.6) の導出

(2.1.1) を (2.1.5) に代入すると,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi + \phi)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial(\Phi + \phi)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} (\Phi + \phi) + \beta y \right] = 0$$

これを变形し,  $q$  と  $\Pi_0$  を本文中のように置くと,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) (q + \Pi_0) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) (q + \Pi_0) = 0$$

$\Pi_0 = \Pi_0(y, z)$  より,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) q + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0$$

## 付録 2 (2.2.3) の導出

熱力学方程式

$$\frac{d_0}{dt} \theta + wS = \mathcal{H}$$

に,

$$w = 0, \quad z = 0, \quad z = 1.$$

を代入する. 非断熱加熱  $\mathcal{H}$  は 0 なので,

$$\begin{aligned} \frac{d_0}{dt} \theta &= 0 \\ \frac{d_0}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

これに (2.1.1) を代入し, 変形, 線形化を行うと,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \phi) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} + v' \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \phi) &= 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial U_0}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

となり, (2.2.3) が得られる.

## 付録 3 (3.1.7) の導出

平均場のもつエネルギー  $E(\phi)$  を以下のように定義する:

$$\bar{E} = \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left\{ \frac{(\bar{u})^2 + (\bar{\theta})^2 / S}{2} \right\}.$$

これを両辺  $t$  で微分する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} (\bar{u})^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \frac{(\bar{\theta})^2}{S} \right) \right\} \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\theta} \frac{1}{S} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

また, ここで東西方向の運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - v_1 - v \left( \frac{L}{r\epsilon} \right) y \cot \theta \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Ly}{\epsilon r} \tan \theta \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

を  $x$  について  $-\infty$  から  $\infty$  の区間で積分した式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{v} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \bar{u}$$

に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left\{ \bar{u} \left( \bar{v} - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \bar{u}) \right) + \bar{\theta} \left( -\bar{w} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{(\bar{v} \bar{\theta})}{S} \right) \right\} \\ &= - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s [\bar{w} \bar{\theta} - \bar{v} \bar{u}] - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left[ \bar{u} \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \bar{u} - \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{v} \bar{\theta}}{S} \right] \end{aligned}$$

となる. これに

$$\bar{\theta} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}, \quad \bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= - \int_{-1}^1 \int_0^1 dy dz \rho_s \left[ \bar{u} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \bar{u}) + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{(\bar{v} \bar{\theta})}{S} \right] \\ &\quad - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \left[ \bar{w} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} - \bar{v} \left( -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{a})$$

右辺第 3 項について解くと

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^1 \rho_s \bar{w} dz \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = \int_{-1}^1 dy [\rho_s(1) \bar{w} \bar{\psi}(1) - \rho_s(0) \bar{w} \bar{\psi}(0)] - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 \rho_s \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \bar{\psi} dz$$

となり, 右辺第 4 項について解くと

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^1 \rho_s \bar{v} dz \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \int_0^1 dz [\rho_s v \bar{\psi}] - \int_0^1 dz \int_{-1}^1 \rho_s \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{\psi} dy$$

となる. したがって, 右辺第 3 項と第 4 項をまとめると,

$$\int_{-1}^1 dy [\rho_s(1) \bar{w} \bar{\psi}(1) - \rho_s(0) \bar{w} \bar{\psi}(0)] - \int_{-1}^1 dy \int_0^1 dz \rho_s \bar{\psi} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \quad (b)$$

とまとまる. ここで, 連続の式から,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

これを平均化すると,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left\{ \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L \frac{\partial v}{\partial y} dx + \int_0^L \frac{\partial w_1}{\partial z} dx \right\} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

となる. これを (b) 式に適用し, さらにそれを (a) 式に代入すると,

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = - \int_{-1}^1 \int_0^1 dy dz \rho_s \left[ \bar{u} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \bar{u}) + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{v} \bar{\theta}}{S} \right) \right] - \int_{-1}^1 dy [\rho_s(1) \bar{w} \bar{\psi}(1) - \rho_s(0) \bar{w} \bar{\psi}(0)] \quad (c)$$

となる. 摩擦を考慮しないときは, (c) 式の後ろの 2 項は消去できるので,

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = - \int_{-1}^1 \int_0^1 dy dz \rho_s \left[ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\theta}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{v} \bar{\theta}_0}{S} \right) \right]$$

である. これを部分積分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= - \int_0^1 dz [\rho_s \bar{u} (\bar{v} \bar{u})]_{-1}^1 + \int_0^2 dz \int_{-1}^1 (\bar{v} \bar{u}) \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &\quad - \int_0^3 dz [\rho_s \bar{\theta} \frac{(\bar{v} \bar{\theta})}{S}]_{-1}^1 + \int_0^4 dz \int_{-1}^1 \frac{(\bar{v} \bar{\theta}_0)}{S} \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \\ &= \int_0^5 \int_{-1}^1 dy dz \rho_s \left[ \bar{v} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(\bar{v} \bar{\theta})}{S} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

となる. 最後に

$$\begin{aligned}\frac{\overline{v} \overline{u}}{\overline{v} \overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} &= \frac{\overline{v} \overline{u}}{\overline{v} \overline{u}} \frac{\partial U_0}{\partial y} \\ \frac{\overline{v} \overline{\theta}}{\overline{v} \overline{\theta}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} &= \frac{\overline{v} \overline{\theta}}{\overline{v} \overline{\theta}} \frac{\partial \Theta_0}{\partial y}\end{aligned}$$

として代入すると,

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = - \int_0^1 \int_{-1}^1 dy dz \rho_s \left[ \overline{v} \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\overline{v} \overline{\theta}}{S} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} \right] \quad (6.0.1)$$

が得られる.

#### 付録 4 (5.3.7) の導出

仮定した解 (5.2.2) を (2.1.10) 式に代入し, 変形すると,

$$\begin{aligned}& \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0 \\ & \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) [-k^2 \Phi(y, z) \cos k(x - ct)] + \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos k(x - ct) \right] \\ & + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_s}{S} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos k(x - ct) \right] + (-k \Phi \sin k(x - ct)) \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0 \\ & \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) (\cos k(x - ct)) \left[ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_s}{S} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + -k^2 \Phi(y, z) \right] + (-k \Phi \sin k(x - ct)) \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0 \\ & (U_0 - c) \left[ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_s}{S} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + -k^2 \Phi(y, z) \right] + \Phi \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

いま,

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0$$

であるから,

$$(U_0 - c) \left[ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_s}{S} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + -k^2 \Phi(y, z) \right] = 0$$

となる.

#### 付録 5 (5.3.19) の導出

(5.3.17) を (5.3.15a) に代入する.

$$\begin{aligned}c \frac{d}{dz} \{ a \cosh \mu z + b \sinh \mu z \} + \{ a \cosh \mu z + b \sinh \mu z \} &= 0 \\ (a + \mu cb) \cosh \mu z + (b - \mu ac) \sinh \mu z &= 0\end{aligned}$$

$z = 0$  より

$$a + \mu cb = 0,$$

今度は, (5.3.17) を (5.3.15b) に代入する.

$$(c-1) \frac{d}{dz} \{a \cosh \mu z + b \sinh \mu z\} + \{a \cosh \mu z + b \sinh \mu z\} = 0$$

$$a[-(c-1)\mu \sinh \mu z + \cosh \mu z] + b[(c-1)\mu \cosh \mu z + \sinh \mu z] = 0$$

$z = 1$  より,

$$a[-(c-1)\mu \sinh \mu + \cosh \mu] + b[(c-1)\mu \cosh \mu + \sinh \mu] = 0$$

$a, b$  の非自明な解は  $a, b$  の行列式が 0 のときのみ分かる. すなわち,

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu c \\ -(c-1)\mu \sinh \mu + \cosh \mu & (c-1)\mu \cosh \mu + \sinh \mu \end{vmatrix} = 0$$

である. これを解くと,

$$(c-1)\mu \cosh \mu + \sinh \mu - \mu c(c-1)\mu \sinh \mu + \cosh \mu = 0$$

となる. 両辺  $1/(\mu^2 \sinh \mu)$  倍すると,

$$c^2 - c + \mu^{-1} \coth \mu - \mu^2 = 0$$

となり (5.3.19) が得られる.

## 付録 6 水平スケールについての有次元化

ここでは, ゆらぎが成長する臨界点での波数と, ゆらぎが最も発達するときの波数が分かっているので, それを有次元化することでその水平スケールを見積もる. ゆらぎの波長は, 以下のようにして有次元化される.

$$\lambda_* = \frac{2\pi L}{k_m} = \frac{2\pi L}{k_m} \frac{N_s D}{f_0 L}$$

である.  $N_s$  は流体粒子の鉛直方向の振動数でプラント・バイサラ振動数,  $D$  は大気の厚さ,  $f_0$  はコリオリパラメータを表している. ここで, これらの値を計算する.

$$\begin{aligned}
 N_s &= \left( \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^{1/2} \\
 &= \left( \frac{10}{300} \frac{6}{1000} \right)^{1/2} \\
 &= 1.4 \times 10^{-2} \\
 &\sim 10^{-2} [s^{-1}], \\
 D &= 10^4 [m], \\
 f_0 &= 2\Omega \sin \alpha \\
 &= 2 \times \frac{2\pi}{10^5} \\
 &= 1.3 \times 10^{-4} \\
 &= 10^{-4} [s^{-1}],
 \end{aligned}$$

ここで,  $g$  は重力加速度を表す.  $\alpha$  は緯度を表し,  $\sin \alpha = O(1)$  とする. ゆらぎが成長率を持つとき, すなわち波数が  $k = 1.81$  のとき,

$$\lambda_* = \frac{2\pi L}{1.81} = \frac{2 \times 3.14 \times 10^6}{1.81} \frac{10^{-2} 10^4}{10^{-4} 10^6} = 3469 \dots \sim 3,000 \text{ km}$$

であり, ゆらぎの成長率が最大になるとき, すなわち波数が  $k = 1.81$  のとき,

$$\lambda_* = \frac{2\pi L}{1.81} = \frac{2 \times 3.14 \times 10^6}{1.81} \frac{10^{-2} 10^4}{10^{-4} 10^6} = 5024 \dots \sim 5,000 \text{ km}$$

となり有次元化された.