

卒業論文
熱帯大気の線形応答

島津 通

Shimadzu Toru

神戸大学 理学部 地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

2009年2月28日

要旨

Matsuno(1966)に基づき, 浅水方程式系より赤道波の分散関係および空間構造の導出を行った. 赤道波は時間および東西方向に波動解を仮定し, 南北方向にはエルミート多項式を用いて展開することで得られる. エルミート多項式の次数 $n \geq 1$ において, 東西慣性重力波, ロスビー波の 3 つの波動が存在することが示された. 最も低いモードである $n = 0$ では, 東西混合ロスビー重力波という慣性重力波とロスビー波の両者の性質を併せ持った波動が存在することが示された. また $v = 0$ とおいて求められる赤道を境界とする境界ケルビン波のような性質をもった波動が示され, これを赤道ケルビン波と呼ぶことにした.

Gill(1980)に基づいて, 熱帯大気の熱源に対する応答を時間発展数値計算によって調べた. その結果は, 先に示した赤道波の重ね合わせで説明できることがわかった. 赤道対称に熱源を与えた場合では, 東進する赤道ケルビン波と西進する $n = 1$ のロスビー波の構造をもつ波動が現れることが示された.

目次

1	はじめに	4
2	基礎方程式系	5
2.1	浅水方程式	5
2.2	赤道 β 面近似	6
2.3	無次元化	7
3	赤道波	8
3.1	分散関係式の導出	8
3.2	固有値の導出	9
3.3	分散関係	10
3.3.1	$n \geq 1$ の波動	10
3.3.2	$n = 0$ の波動	11
3.3.3	$n = -1$ の波動	11
3.4	固有モードの導出	13
3.5	空間構造	14
3.5.1	$n \geq 1$ の波動	14
3.5.2	$n = 0$ の波動	18
3.5.3	$n = -1$ の波動	18
4	時間発展数値計算	21
4.1	基礎方程式系	21
4.2	境界条件	21
4.3	離散化	22
4.4	水平方向のスペクトル表現	22
4.5	時間積分	24
4.6	数値計算	25
4.7	結果と考察	26
4.7.1	東向きの波動	26
4.7.2	西向きの波動	26

熱帯大気の線形応答	目次	2
5	まとめ	30
	謝辞	31
	参考文献	32

図目次

3.3.1 赤道波の分散曲線	12
3.5.1 東向き慣性重力波 ($n=1$)	15
3.5.2 東向き慣性重力波 ($n=2$)	15
3.5.3 西向き慣性重力波 ($n=1$)	16
3.5.4 西向き慣性重力波 ($n=2$)	16
3.5.5 ロスビー波 ($n=1$)	17
3.5.6 ロスビー波 ($n=2$)	17
3.5.7 混合ロスビー重力波	19
3.5.8 赤道ケルビン波	20
4.6.1 初期の熱源	25
4.7.1 $t=40$	28
4.7.2 $t=80$	28
4.7.3 $t=120$	29
4.7.4 $t=160$	29

1 はじめに

地球規模の大気海洋の現象を調べる上で、赤道域の大気が重要な役割を果たすことが知られている。例えば、赤道域は太陽からの熱エネルギーの供給量が最も大きいので、温められた空気が上昇して境界圏まで達する。そして低緯度地域の上空へ流れ込み、流れ込んだところで冷やされ下降して大気が循環する。この循環をハドレー循環と呼ぶのだが、赤道域はこのハドレー循環の起点となる。その他にも、赤道付近の太平洋で温められた大気が西大西洋で上昇し、東西に別れて循環し、エル・ニーニョやラ・ニーニャと深く関わっているウォーカー循環などが赤道域の大気に存在することが知られている。そしてその赤道域には赤道波と呼ばれる赤道付近で振幅が最大となり、赤道から離れるにつれて指数関数的に振幅が減少するという特徴をもつ大気波動が存在し、赤道域の大気の運動をこの赤道波の重ね合わせによって説明することがよく行われている。このようなことから赤道波については過去数多くの研究が行われてきた。この中で赤道波の分散関係・空間構造(固有値・固有モード)を理論的に示した研究に Matsuno(1966)がある。Matsuno(1966)では、線形化された浅水方程式系に対して、時間・東西方向に波型の解を仮定して、固有モードを導出し、中緯度で知られている波動と対比することにより赤道に特有な波動について議論している。

本論文では、まずはじめに Matsuno(1966)で使用された線形化された赤道 β 面浅水方程式系を紹介し、そこから、理論的に赤道波の分散関係・空間構造を導出する。次に Gill(1980)に基づいて赤道域の大気に局所熱源を与えた場合の応答を数値計算を行うことにより、議論している。

2 基礎方程式系

この章では Matsuno(1966) で用いられている基礎方程式である, 線形化された浅水方程式系を紹介する.

2.1 浅水方程式

浅水方程式系は, 密度が一定で, 系の水平方向の長さスケールが鉛直方向の長さスケールに比べて十分大きい系を考えることを前提としている方程式系である.

回転系の密度一定, 粘性なしの順圧流体の運動方程式と質量保存則に対し, 静水圧平衡と局所直交座標系を仮定する. また, 流体表面は自由に運動できるものとする. 線形化をおこない, 2 次の微小量を無視すると, 次のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \quad (2.1.3)$$

ここで x は東西方向, y は南北方向, (u, v) は (x, y) 方向の流速, t は時間, h は平均の深さ H に対する表面の微小変位, f はコリオリパラメータ, g は重力加速度である.

次に h の代わりにジオポテンシャルのズレ ϕ を導入する. ジオポテンシャルとは, 単位体積当たりの位置エネルギーの値のことであり, ジオポテンシャルのズレと ϕ は次のような関係となる.

$$\phi = gh. \quad (2.1.4)$$

これにより, (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.1.7)$$

となる. ここで, $c = \sqrt{gH}$ は内部重力波の位相速度である.

2.2 赤道 β 面近似

(2.1.5), (2.1.6), (2.1.7) のコリオリパラメータの緯度に対する変化を次のように近似する.

$$\begin{aligned} f &= 2\Omega \sin \theta \\ &= 2\Omega \sin \theta_0 + \frac{2\Omega \cos \theta_0}{R} y + O\left(\frac{y}{R}\right) \\ &\sim f_0 + \beta y. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

ここで θ_0 は現象の中心となる緯度であり, $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = (2\Omega/R) \cos \theta_0$ であり, R は地球の半径である. このようにコリオリパラメータの緯度に対する変化を近似することを β 面近似という. さらに赤道付近では $f_0 \sim 0$ なので

$$f = \beta y \quad (2.2.2)$$

となる. これのように近似することを赤道 β 面近似という. これを用いると, (2.1.5), (2.1.6), (2.1.7) は次のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.2.5)$$

2.3 無次元化

(2.2.3), (2.2.4), (2.2.5) を無次元化する.

無次元化に用いるスケールと, 対流圏を想定した場合の具体的な値を記す.

$$\begin{array}{ll} \text{速度スケール} & \text{重力波の速度} \quad c = \sqrt{gH} \quad \sim 30 \text{ m/s} \sim 2600 \text{ km/day} \\ \text{長さスケール} & \text{赤道変形半径} \quad \lambda = \sqrt{c/\beta} \quad \sim 1100 \text{ km} \end{array}$$

これを用いて無次元化された (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5) は以下の通り.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.3.3)$$

3 章ではこの方程式を用いて議論を進める.

3 赤道波

この章では Matsuno(1966) に基づいて、赤道波の分散関係・空間構造 (固有値・固有モード) を理論的に導出し、図示する。

3.1 分散関係式の導出

2 章において導出された線形化された赤道ベータ面浅水方程式に対して、 x, t 方向に波動解を仮定する。

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \hat{u}(y)e^{-i\omega t + ikx}, \\ v(x, y, t) &= \hat{v}(y)e^{-i\omega t + ikx}, \\ \phi(x, y, t) &= \hat{\phi}(y)e^{-i\omega t + ikx}. \end{aligned}$$

ここで、 k は東西波数、 ω は振動数である。この式を (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) に代入すると

$$-i\omega\hat{u} - y\hat{v} + ik\hat{\phi} = 0, \quad (3.1.1)$$

$$-i\omega\hat{v} + y\hat{u} + \frac{d\hat{\phi}}{dy} = 0, \quad (3.1.2)$$

$$-i\omega\hat{\phi} + ik\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \quad (3.1.3)$$

となる。上式を \hat{v} について整理すると、

$$\frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + \left(\omega^2 - k^2 - \frac{k}{\omega} - y^2\right)\hat{v} = 0 \quad (3.1.4)$$

となる。ここで境界条件を

$$\hat{v} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (3.1.5)$$

と定めると、(3.1.4) はウェーバーの微分方程式と呼ばれる既知の微分方程式となり、即座に解が次のように求められる。

$$\hat{v} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y). \quad (C = \text{const.}) \quad (3.1.6)$$

ここで, H_n は n 次エルミート多項式である. また, 導出の際に次のような条件式が求められる.

$$\omega^2 - k^2 - \frac{k}{\omega} = 2n + 1. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1.7)$$

(3.1.7) は ω と k についての関係式なので, これが分散関係式となる.

3.2 固有値の導出

(3.1.7) は次のように書き換えられる.

$$\omega^3 - (k^2 + 2n + 1)\omega - k = 0. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) は ω の 3 次式なので ω の解は 3 つ得られる. $n \geq 1$ において (3.2.1) に対して, $k \ll |\omega|$, $k \gg \omega$ と近似する. これは, 中緯度において線形化された浅水方程式系に対して分散関係式を求める際に行う近似と同様である. その結果, 解は

$$\omega_{1,2} \sim \pm \sqrt{k^2 + 2n + 1}, \quad (|\omega| \gg k) \quad (3.2.2)$$

$$\omega_3 \sim -\frac{k}{k^2 + 2n + 1} \quad (\omega \ll k) \quad (3.2.3)$$

となる.

次に $n = 0$ の場合を (3.2.1) から計算しなおす. (3.2.1) に $n = 0$ を代入すると,

$$(\omega + k)(\omega^2 - k\omega - 1) = 0 \quad (3.2.4)$$

となる. しかし, \hat{u} , \hat{v} の関係式が

$$\hat{u} = \frac{i}{\omega^2 - k^2} \left(\omega y \hat{v} - k \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) \quad (3.2.5)$$

となっているので, $\omega \neq \pm k$ である. したがって, 固有値は

$$\omega_{1,2} = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} \quad (3.2.6)$$

の 2 つしか求まらない. したがって, (3.2.1) に含まれない解について考えなければならない.

(3.1.4) は (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) を \hat{v} の式に変形したものであるので, $\hat{v} \neq 0$ とした解である. そこで今度は $\hat{v} = 0$ を含む解を求める. $\hat{v} = 0$ を代入すると, (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) は

$$-i\omega\hat{u} + ik\hat{\phi} = 0, \quad (3.2.7)$$

$$y\hat{u} + \frac{d\hat{\phi}}{dy} = 0, \quad (3.2.8)$$

$$-i\omega\hat{\phi} + ik\hat{u} = 0 \quad (3.2.9)$$

となり, (3.2.7), (3.2.9) より

$$i(k + \omega)(k - \omega)\hat{\phi} = 0 \quad (3.2.10)$$

が求められる. $\hat{\phi} = 0$ とすると $\hat{u} = 0$ となり, 物理的に興味がないので, $(k + \omega)(k - \omega) = 0$ である. このとき, 解は次のようになる.

$$\hat{\phi} = \hat{u} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad (\omega = k) \quad (3.2.11)$$

$$\hat{\phi} = -\hat{u} = Ce^{\frac{1}{2}y^2}. \quad (\omega = -k) \quad (3.2.12)$$

しかし, $\omega = -k$ の場合は境界条件を満たさないので, 解は

$$\omega = k \quad (3.2.13)$$

である. この $\omega = k$ は (3.1.7) において $n = -1$ とおいた場合に等しいので, 便宜上これを $n = -1$ の場合の解と呼ぶこととする.

3.3 分散関係

前節で求められた固有値について解説を行う.

3.3.1 $n \geq 1$ の波動

得られる ω は 3 つあり, (3.2.2), (3.2.3) である. 解の形から中緯度における波動の振動数と対応づけられる. ω_1 の波動は東向き慣性重力波, ω_2 の波動は西向き慣性重力波, ω_3

の波動はロスビー波である*¹.

3.3.2 $n = 0$ の波動

得られる解は 2 つあり, (3.2.6) である. 図 3.3.1 より, k の値が大きい領域で慣性重力波の分散関係に近づくことから, 慣性重力波の性質をもつ. k の値が小さい領域ではロスビー波の分散関係に近づくことから, ロスビー波の性質をもつ. この 2 つの性質は k の値とともに連続して変化する. よって (3.2.6) の波動を慣性重力波の性質とロスビー波の性質を併せ持つことから, 混合ロスビー重力波と呼ぶ.

3.3.3 $n = -1$ の波動

得られる解は 1 つあり, (3.2.13) である. 振動数 ω は $k = 0$ のとき, 他の東向き波動が最小値 $\omega = \sqrt{2n+1}$ をとるのに対し, (3.2.13) では, $\omega = 0$ となる. また, $\hat{u}, \hat{\phi}$ は式の形より赤道付近で最大の振幅を持ち, 赤道から離れるにつれて指数関数的に減少すること, 進行方向に直行する成分 \hat{v} を持たないことから境界に沿って伝搬するケルビン波の性質を持っている. よって (3.2.13) の波動を赤道ケルビン波と呼ぶ.

*¹ 中緯度における東西慣性重力波およびロスビー波の分散関係式を以下に記しておく.

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{f_0 + c^2(k^2 + l^2)},$$

$$\omega_3 = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}.$$

本文中と同じく ω_1 の波動は東向き慣性重力波, ω_2 の波動は西向き慣性重力波, ω_3 の波動はロスビー波を表している.

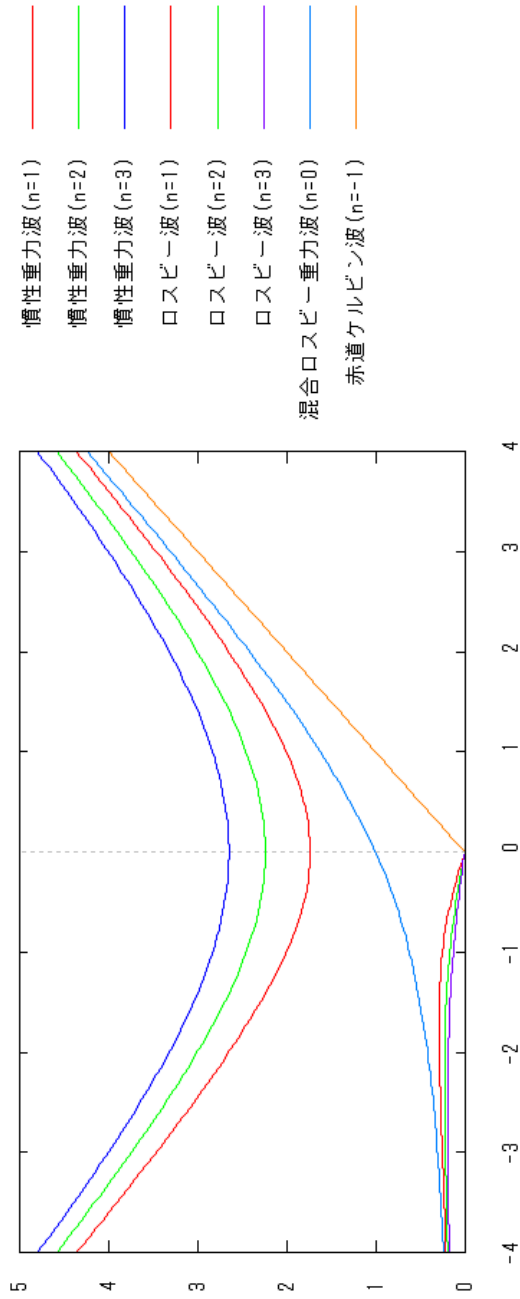


図 3.3.1 赤道波の分散曲線
 横軸は k , 縦軸は ω である. それぞれ赤色は $n = 1$, 緑色は $n = 2$, 紫色は $n = 3$, 水色は $n = 0$, 橙色は $n = -1$ を表している.
 また, $k > 0$ の領域は東進する波動を, $k < 0$ の領域は, 西進する波動の分散関係を表している.

3.4 固有モードの導出

次に各固有値に対する固有モードを導出する.

まず, $\omega_{1,2,3}$ をまとめて, ω_l ($l = 1, 2, 3$) と表す. (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) を整理すると $(\hat{u}, \hat{v}), (\hat{\phi}, \hat{v})$ の関係式が求められ, 次のようになる.

$$\hat{u} = \frac{i}{\omega^2 - k^2} \left(\omega y \hat{v} - k \frac{d\hat{v}}{dy} \right), \quad (3.4.1)$$

$$\hat{\phi} = \frac{i}{\omega^2 - k^2} \left(k y \hat{v} - \omega \frac{d\hat{v}}{dy} \right). \quad (3.4.2)$$

(3.4.1), (3.4.2) に ω_l を代入すると, ω_l に対する $\hat{u}_l, \hat{v}_l, \hat{\phi}_l$ が求められ, さらにこの $\hat{u}_l, \hat{v}_l, \hat{\phi}_l$ に対して (3.1.6) を代入し, エルミート多項式の昇降関係式

$$\begin{aligned} \frac{dH_n(y)}{dy} &= 2nH_{n-1}(y), \\ H_{n+1}(y) &= 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y) \end{aligned}$$

を用いて, $\hat{u}_{nl}, \hat{v}_{nl}, \hat{\phi}_{nl}$ を求める.

$\psi_n = e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y)$ として, 前節と同じように $n \geq 1, n = 0, n = -1$ に分けると次のようになる.

$n \geq 1$ の場合:

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{nl} \\ \hat{u}_{nl} \\ \hat{\phi}_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\omega_{nl}^2 - k^2)\psi_n \\ -\frac{1}{2}(\omega_{nl} + k)\psi_{n+1} + n(-\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \\ -\frac{1}{2}(\omega_{nl} + k)\psi_{n+1} - n(-\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.4.3)$$

$n = 0$ の場合:

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{0l} \\ \hat{u}_{0l} \\ \hat{\phi}_{0l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i(\omega_{0l} - k)\psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.4)$$

$n = -1$ の場合:

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{-1} \\ \hat{u}_{-1} \\ \hat{\phi}_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.5)$$

3.5 空間構造

この節では、赤道波の各固有モードを図示し、その空間構造の特徴について解説する。

図は ω_{nl} に対する $u_{nl}, v_{nl}, \phi_{nl}$ の $n = -1, 0, 1, 2$ を示す。そして今までと同様に $n \geq 1, n = 0, n = -1$ の場合に分けて解説する。

3.5.1 $n \geq 1$ の波動

$n \geq 1$ の場合の代表として $n = 1$ の場合を解説する。 $n = 1$ の場合には、中緯度に見られる 3 つの波動に対応する東西慣性重力波およびロスビー波がはっきり区別できる。図 3.5.1, 図 3.5.2 は東向き慣性重力波を、図 3.5.3, 図 3.5.4 は西向き慣性重力波を表している。

これらの図から、東西方向の圧力傾度の最大の点に南北方向からの流速の収束・発散があることがわかる。この波動の伝搬を考えると、この収束部は次の圧力の最大部になり、発散部は次の圧力の最小部になる。この繰り返りで波動は伝搬する。また赤道から離れるにつれて、コリオリ力の影響を受けて流速の向きが変わる様子が見られる。

もう 1 つの波動であるロスビー波は、図 3.5.5, 図 3.5.6 に示される。この図から赤道近傍を除いて等圧線に対して平行の流れが見られ、ほぼ地衡風平衡が成立していることが分かる。しかし $n = 1$ では赤道近傍では成立していない。さらに $n = 2$ では、赤道近傍の等圧線の間隔が狭い場所では他の場所に比べ強い流れがある。以上のことはロスビー波がコリオリパラメータの緯度変化を復元力とする波動であり、赤道近傍ではコリオリ力が弱いことが原因になっている。

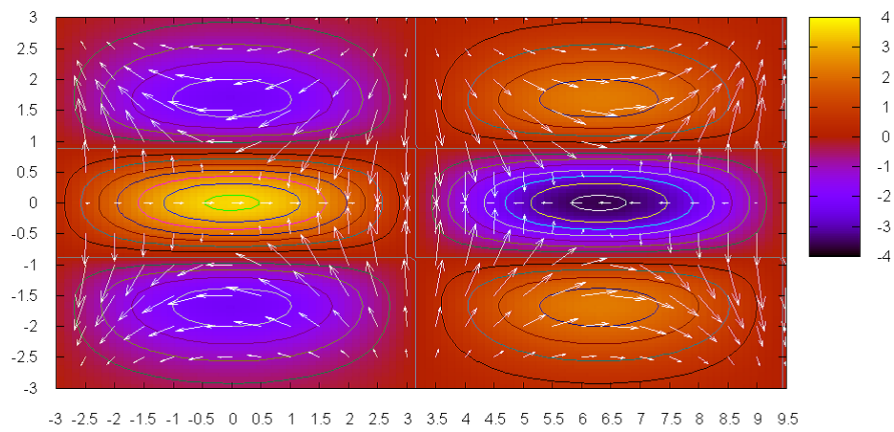


図 3.5.1 東向き慣性重力波 ($n=1$)

図のコンターは ϕ , ベクトルは (u, v) の向きと大きさを表している. $n = 1$, $k = 0.5$, $\omega = 1.80$ であり, コンター間隔は 0.5 である.

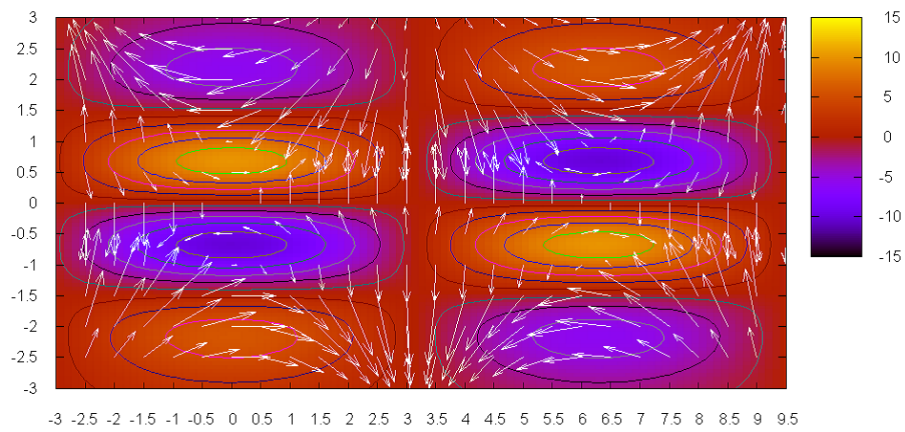


図 3.5.2 東向き慣性重力波 ($n=2$)

図のコンターは ϕ , ベクトルは (u, v) の向きと大きさを表している. $n = 2$, $k = 0.5$, $\omega = 2.29$ であり, コンター間隔は 2 である.

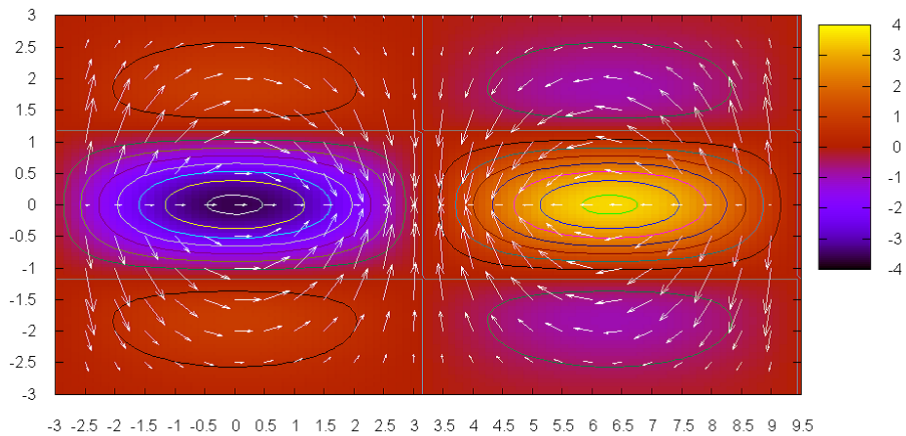


図 3.5.3 西向き慣性重力波 ($n=1$)

図のコンターは ϕ , ベクトルは (u, v) の向きと大きさを表している. $n = 1$, $k = 0.5$, $\omega = -1.80$ であり, コンター間隔は 0.5 である.

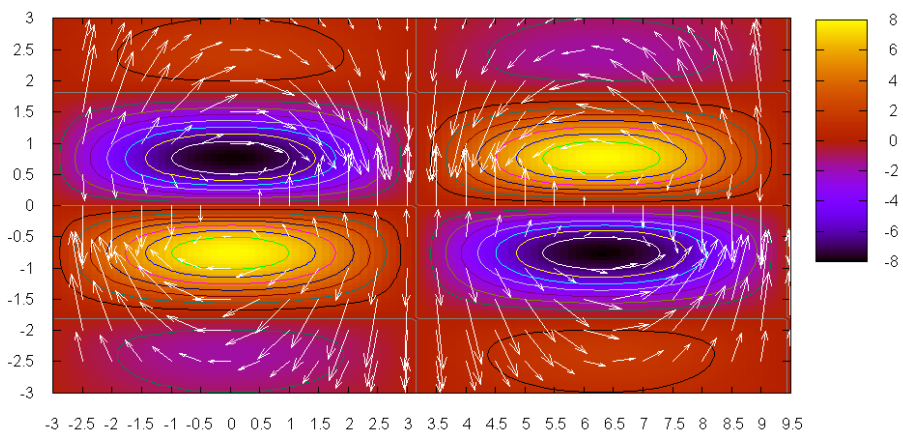


図 3.5.4 西向き慣性重力波 ($n=2$)

図のコンターは ϕ , ベクトルは (u, v) の向きと大きさを表している. $n = 2$, $k = 0.5$, $\omega = -2.29$ であり, コンター間隔は 1 である.

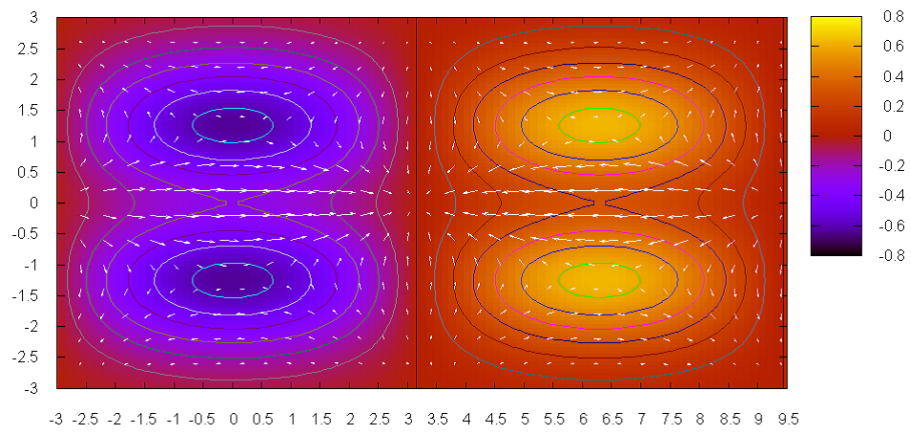


図 3.5.5 ロスビー波 ($n=1$)

図のコンターは ϕ , ベクトルは (u, v) の向きと大きさを表している. $n = 1$, $k = 0.5, \omega = -0.15$ であり, コンター間隔は 0.1 である.

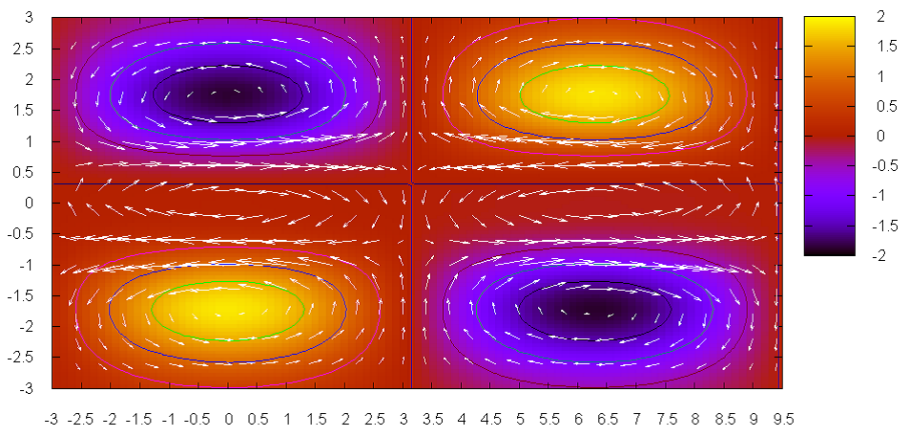


図 3.5.6 ロスビー波 ($n=2$)

図のコンターは ϕ , ベクトルは (u, v) の向きと大きさを表している. $n = 2$, $k = 0.5, \omega = -9.52$ であり, コンター間隔は 0.5 である.

3.5.2 $n = 0$ の波動

$n = 0$ の場合に得られる波動は 2 つしかなく、東西の混合ロスビー重力波である。

図 3.5.7 は赤道を横切る南北流速を持ち、赤道をはさんで高圧部と低圧部が対になっている。この性質は $n = 2$ の西向き慣性重力波の性質に似ている。一方で、赤道から離れたところでは、ほぼ地衡風平衡が成り立っており、この性質は $n = 2$ のロスビー波の性質に似ている。混合ロスビー重力の振動数の性質については以前にも述べたが、図 3.5.7 から混合ロスビー重力波が慣性重力波とロスビー波の性質を併せ持った波動であることが言える。

3.5.3 $n = -1$ の波動

$n = -1$ の場合に得られる波動は赤道ケルビン波と呼ばれる。

図 3.5.8 で表されるこの波動は、流速は東西成分のみを持っている。また u, ϕ は赤道に最大の振幅を持っている。赤道上では、圧力傾度の最大の点に流速の収束・発散が見られ、伝搬の性質は東向き慣性重力波に似ているが、南北方向には完全に地衡風平衡の状態にある。

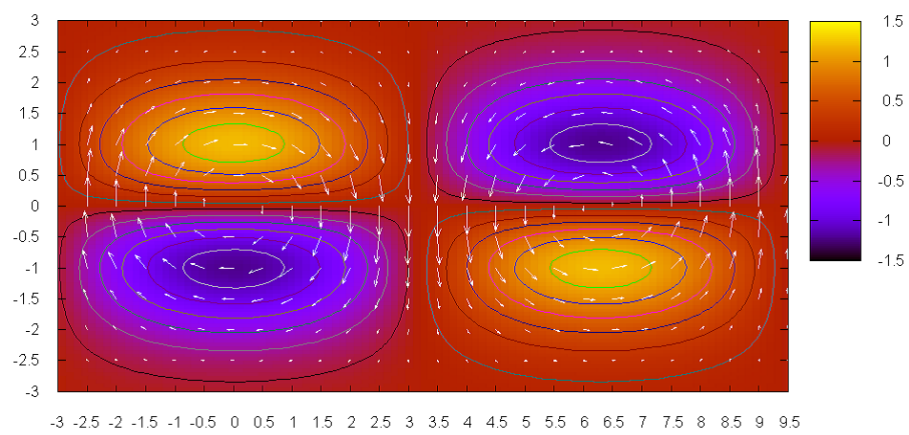


図 3.5.7 混合ロスビー重力波 ($n=0$)

図のコンターは ϕ , ベクトルは (u, v) の向きと大きさを表している. $n = 0$, $k = 0.5$, $\omega = -0.78$ であり, コンター間隔は 0.2 である.

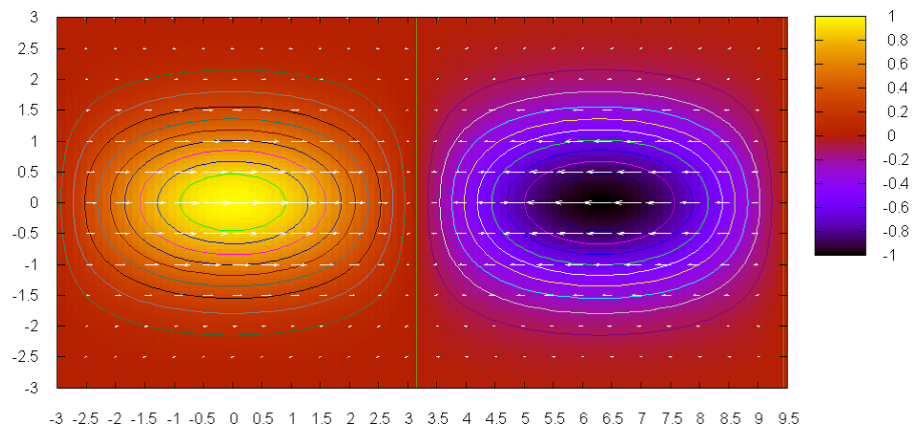


図 3.5.8 赤道ケルビン波 ($n=-1$)

図のコンターは ϕ , ベクトルは (u, v) の向きと大きさを表している. $n = -1$, $k = 0.5$, $\omega = 0.5$ であり, コンター間隔は 0.1 である.

4 時間発展数値計算

この章では、スペクトル法を用いた (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) の時間発展の数値計算について解説する。

4.1 基礎方程式系

基礎方程式系は線形化された赤道 β 面浅水方程式系である。以下に方程式を記しておく。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -Q. \quad (2.3.3)$$

4.2 境界条件

x 方向の境界条件は周期境界条件とする。 y 方向の境界条件は $y = \pm \frac{y_m}{2}$ に置いた剛体壁面で $v = 0$, 応力なしとする。

x 方向の境界条件は、 x 方向の計算領域の大きさを x_m とすると

$$u(x + x_m, y) = u(x, y), \quad (4.2.1)$$

$$v(x + x_m, y) = v(x, y), \quad (4.2.2)$$

$$\phi(x + x_m, y) = \phi(x, y). \quad (4.2.3)$$

と表される. y_* 方向の境界条件は $y = \pm \frac{y_m}{2}$ において

$$v_* = 0, \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial y_*} = 0, \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial y_*} = 0 \quad (4.2.6)$$

である.

4.3 離散化

基礎方程式 (*) の空間離散表現は次の通り.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = y_j v_{i,j} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j}, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} = -y_j u_{i,j} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j}, \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{i,j} - Q_{i,j}. \quad (4.3.3)$$

$$(4.3.4)$$

ここで添字 i, j は格子点 (x_i, y_j) 上の値であることを表す.

4.4 水平方向のスペクトル表現

空間離散化した基礎方程式系 (*) をスペクトル法を用いて表現する. スペクトル展開は東西方向にフーリエ級数, 南北方向には境界条件に合わせて, フーリエ正弦級数, もしくはフーリエ余弦級数を用いて行う. 非線形項を扱う場合は, 先に格子点上で非線形項の値を計算し, その値のスペクトルを求める方法 (変換法) を用いる. 以下では k, l をそれぞれ x, y 方向波数, K, L を切断波数, I, J を格子点数とする.

$u_{i,j}, v_{i,j}, \phi_{i,j}$ はスペクトル逆変換によって以下のように展開される.

$$u_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{u}_{k,l}, \quad (4.4.1)$$

$$v_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=1}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{v}_{k,l}, \quad (4.4.2)$$

$$\phi_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{\phi}_{k,l}. \quad (4.4.3)$$

スペクトル係数 $\hat{u}_{i,j}, \hat{v}_{i,j}, \hat{\phi}_{i,j}$ はスペクトル変換によって以下のように与えられる.

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) u_{i,j}, \quad (4.4.4)$$

$$\hat{v}_{k,l} = \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) v_{i,j}, \quad (4.4.5)$$

$$\hat{\phi}_{k,l} = \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \phi_{i,j}. \quad (4.4.6)$$

以上を用いると, (*) のスペクトル表現は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_{k,l}}{\partial t} &= \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) y_j v_{i,j} \\ &\quad - \left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \hat{\phi}_{k,l}, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}_{k,l}}{\partial t} &= -\frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) y_j v_{i,j} \\ &\quad + \left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \hat{\phi}_{k,l}, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi}_{k,l}}{\partial t} &= -\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \hat{u}_{k,l} - \left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \hat{v}_{k,l} \\ &\quad - \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) Q_{i,j}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

4.5 時間積分

ここでは、時間積分法について記述し、プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する。いかでは、 Δt を時間格子間隔、時刻 $\tau\Delta t$ における $\hat{u}_{k,l}$ の値を $\hat{u}_{k,l}^\tau$ などと記述する。

時空間方向に離散化された方程式は以下のようなになる。

$$\hat{u}_{k,l}^{\tau+1} = \hat{u}_{k,l}^\tau + \Delta t A_u^\tau, \quad (4.5.1)$$

$$\hat{v}_{k,l}^{\tau+1} = \hat{v}_{k,l}^\tau + \Delta t A_v^\tau, \quad (4.5.2)$$

$$\hat{\phi}_{k,l}^{\tau+1} = \hat{\phi}_{k,l}^\tau + \Delta t A_\phi^\tau. \quad (4.5.3)$$

$$\begin{aligned} A_u^\tau &= \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) y_j \hat{v}_{i,j}^\tau \\ &= -\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \hat{\phi}_{k,l}^\tau, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

$$\begin{aligned} A_v^\tau &= -\frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) y_j \hat{u}_{i,j}^\tau \\ &= +\left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \hat{\phi}_{k,l}^\tau, \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

$$\begin{aligned} A_\phi^\tau &= -\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \hat{u}_{k,l}^\tau - \left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \hat{v}_{k,l}^\tau \\ &= -\frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) Q_{i,j}^\tau. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

4.6 数値計算

Gill(1980), Heckley and Gill(1984) と同様の定常な赤道対称な熱源を与えた場合の応答を計算する. 熱源は以下のように与える.

$$Q(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos(ax) & (|x| < A) \\ 0 & (|x| > A) \end{cases} \quad (4.6.1)$$

ここで, $a = \frac{\pi}{2A}$ であり, A は加熱領域の東西の幅である. 今回は $A = 20$ としている. また計算領域は $x_m = 400, y_m = 10$ である. 初期条件は $u = v = \phi = 0$ とする. 格子点数 I, J は各々 16, 32, 切断波数 K, L はともに 16 としている. $t = 0$ から $t = 200$ まで計算を行った. 図 4.6.1 に熱源 Q の分布を示す.

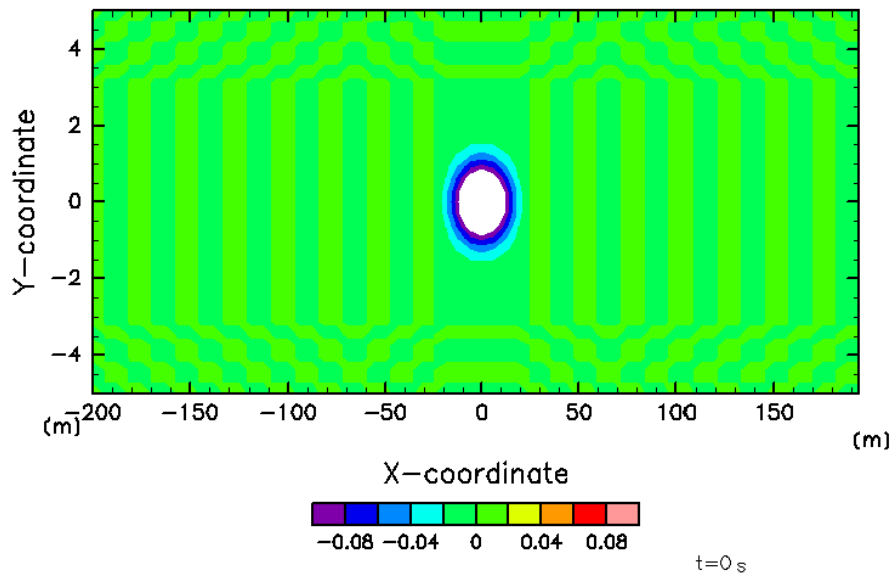


図 4.6.1 初期の熱源
赤道対称に与えた熱源 Q と, 初期値 ϕ の分布を表す.

4.7 結果と考察

ここで数値計算の結果を図示し、その特徴について解説する。赤道対称の熱源を与えたときに現れる波動は、大きく分けて東向きの波動と西向きの波動の2つである。この2つの波動の特徴を解説する。

まず、計算結果を図示したものを図 4.7.1 ~ 図 4.7.4 に示す。図 4.7.1 は $t = 40$ のときの、図 4.7.2 は $t = 80$ のときの、図 4.7.3 は $t = 120$ のときの、図 4.7.4 は $t = 160$ のときの計算結果である。

4.7.1 東向きの波動

これらの図に現れている東向きの波動は一定の速さで進み、波動の先端部分通過後には定常な流れが残ることがわかる。流速は東西成分のみが存在し、南北成分 $v = 0$ である。また流速、ジオポテンシャルは赤道で最大値となっている。これらの特徴は赤道ケルビン波のものである。

4.7.2 西向きの波動

西向きの波動も東向きの波動と同様に一定の速さで進み、やはり波動の先端部分通過後は定常な流れになっている。流速のベクトルとジオポテンシャルがほぼ平行になっていることから、地衡風平衡が成り立っている。また、ジオポテンシャルの振幅は赤道に対して南北対称になっている。これらは $n = 1$ のロスビー波の特徴である。

赤道ケルビン波と $n = 1$ のロスビー波の位相速度の関係は、各波動の分散関係から明らかである。ケルビン波の分散関係は (3.2.13) より

$$\omega_{-1} = k \quad (4.7.1)$$

であり, $n = 1$ のロスビー波の分散関係は (3.2.3) より

$$\omega_{13} \sim -\frac{k}{k^2 + 3} \sim -\frac{1}{3}k \quad (4.7.2)$$

である. このことから, $n = 1$ のロスビー波の伝搬速度はケルビン波の約 $\frac{1}{3}$ であることが理論的に示され, 図よりたしかに約 $\frac{1}{3}$ となっていることが見て取れる.

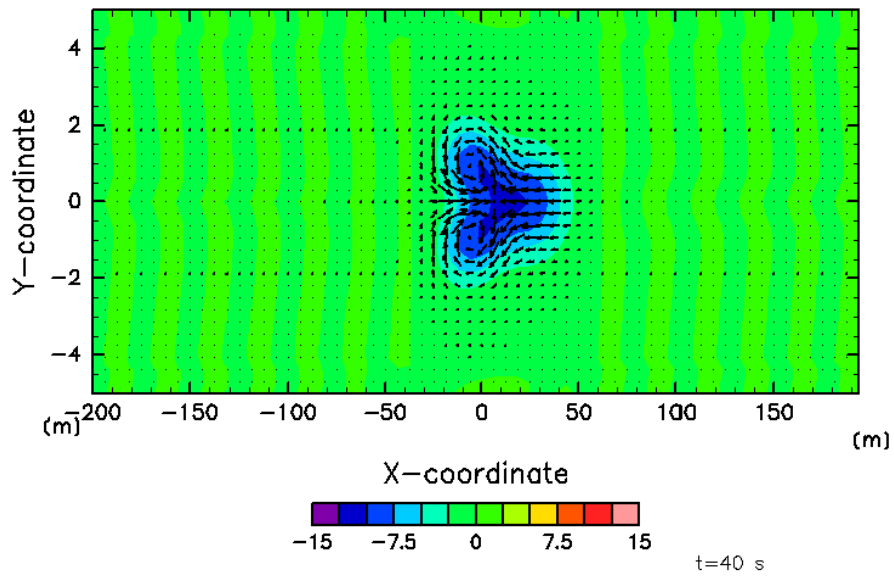


図 4.7.1 $t=40$

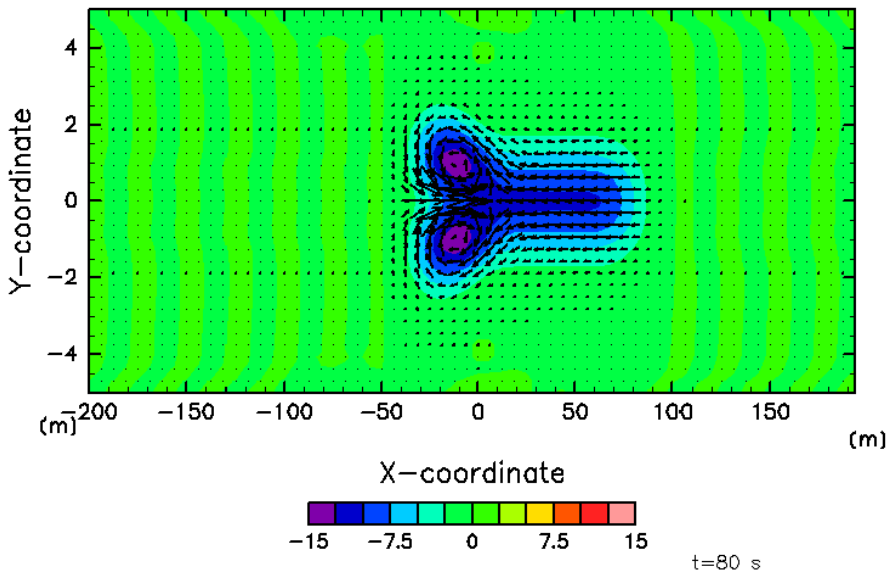


図 4.7.2 $t=80$

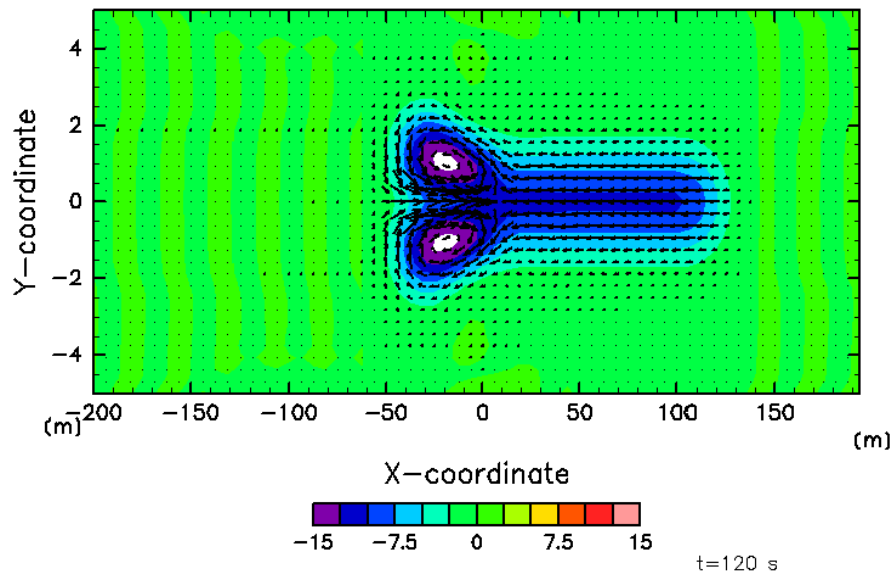


図 4.7.3 t=120

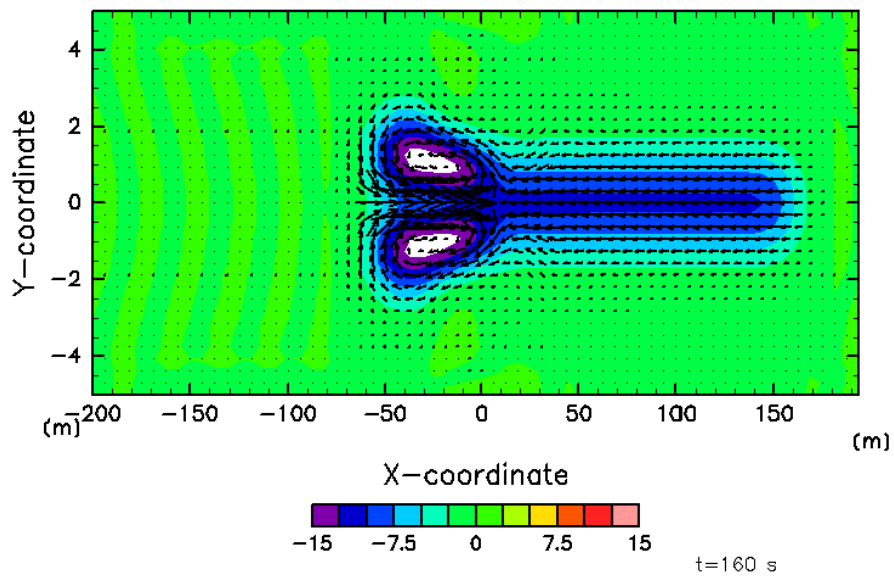


図 4.7.4 t=160

5 まとめ

熱帯大気に特有な波動である赤道波の分散関係・空間構造(固有値・固有モード)を Matsuno(1966)に基づいて理論的に導出を行った。赤道波の分散関係および空間構造は、線形化された赤道 β 面浅水方程式に対し、時間と東西方向に波型の解を仮定することで得られた。高いモード ($n \geq 1$) では、中緯度域と同じように、慣性重力波とロスビー波を区別することができた。しかし最も低いモード ($n = 0$) では、慣性重力波とロスビー波を区別することができず、両者の性質を併せ持ったような特徴をもつ波動が現れた。これを混合ロスビー重力波と呼ぶことにした。また特解として、 $\hat{v} = 0$ として解いた解が存在し、これは $n = -1$ として求められる解に相当した。このモードはケルビン波とよく似ていたため、赤道ケルビン波と呼ぶことにした。

次に、熱源を与えた際に、赤道付近の大気がどのような応答をするかを数値計算によって調べた。その結果、赤道対称な熱源を与えると、同じく赤道対称な東進する赤道ケルビン波と $n = 1$ のロスビー波のような構造をもった波動が現れることがわかった。

謝辞

本論文の作成にあたって、多くの方々に協力いただいた。論文のテーマを一緒に考えてくださった指導教官の林 祥介 教授, 内容に関して多くの助言をいただいた 岩山 隆寛 准教授に深く感謝申し上げます。また, 論文の理論的側面および技術的側面において様々な助言をしていただいた, 地球および惑星大気科学研究室の佐々木洋平氏, 森川靖大氏, 村上真也氏, 納多 哲史氏をはじめ多くの皆さまに, 簡単であるがここに感謝の意を述べる。

本文中の図の作成には, gnuplot および, 電脳 Ruby プロジェクトの成果物を利用させていただいた。ここに開発者の方々に感謝する。

参考文献

Gill, A.E., 1980: Some simple solution for heat-induced tropical circulation., *Qurt.J.R.Meteorol.Soc.*, **110**, 203-217

Matsuno, T., 1966: Quasi-Geostrophic Motions in the Equatorial Area, *J.Met.Soc.Japan*, **44**, 25-43.

小倉義光, 1978: 気象力学通論, 東大出版会, 249pp.

小倉義光, 1999: 一般気象学 第2版, 東大出版会, 308pp.

竹広真一, 石岡圭一, 西澤誠也, 谷口博, 森川靖大, 小高正嗣, 石渡正樹, 林祥介, SP-MODEL 開発グループ, 2007: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), <http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>, 地球流体電脳倶楽部.

林麻利子, 2006: 赤道付近における熱源応答と赤道波, 神戸大学卒業論文

堀淳一, 1969: 物理数学 2, 共立出版社, 257pp.

山田由貴子, 2002: 赤道波の線形理論, 北海道大学卒業論文