

地球赤道域の大気波動に関する研究

神戸大学 理学部 地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

須賀 友也

2009年2月26日

要旨

Matsuno(1966) を基に赤道波に関する基礎力学についてのレビューを行った。浅水方程式に赤道ベータ平面近似を用い、赤道波の各モードを導き出した。その結果、南北の節の数 (モード) が $n \geq 1$ の場合には慣性重力波 (西進, 東進), ロスビー波 (西進) の 3 つの波が存在する。 $n = 0$ では 慣性重力波 (東進) と, 混合ロスビー重力波 (西進) が存在する。緯度方向の波の速度が $v = 0$ の特別な場合には, ケルビン波 (東進) が存在する。以上から, 赤道域には 5 種類の波動が存在することが分かった。

目次

第1章	はじめに	3
第2章	基本モデル	4
第3章	固有モードの赤道波	6
3.1	分散関係	6
3.2	モード毎の振動数	7
3.3	固有関数	12
3.4	各モード毎の特徴	13
3.4.1	$n \geq 1$ の波動	13
3.4.2	$n = 0$ の波動	17
3.4.3	$v = 0(n = -1)$ の波動	20
	まとめ	21
	謝辞	22
	付録 A 分散関係式の導出	23

付録 B 高モードの波動の速度・圧力分布図 25

参考文献 29

第1章 はじめに

赤道域の雲発生は周期性は特徴的であり、その周期性は他の物理量の周期的変動と関係がある。具体的な例を挙げると、ENSO(約4年周期)、モンスーン(1年周期)、MJO(数十日周期)、海陸風(1日周期)などがあり、赤道域には様々な周期の長さの周期的変動が存在していることが知られている。さらに周期的変動にはコリオリ力の向きが赤道を境に逆転する赤道大気固有の波動、すなわち赤道波と呼ばれる波動が影響していることが分かっている。赤道波とは、赤道で振幅が最大となり赤道付近にトラップされる、東西方向に伝播する波動である。

赤道波に関する理論的な研究論文には Matsuno(1966) がある。Matsuno(1966) は中高緯度帯の大気・海洋の運動に用いる線形浅水方程式を赤道域に適用した場合、中高緯度帯で表れるような慣性重力波やロスビー波が赤道域にも表れるのか、という動機から研究を行った。また中高緯度帯の慣性重力波はロスビー波に比べ振動数ははるかに大きい、慣性重力波の振動数はコリオリ力に比例するため低緯度になるとロスビー波の周期に近づいていく。赤道域に2つの波が存在した場合、両者の波を全く違う波として扱うことが出来るのかという疑問もあった。これについては、南北の振動モードが低い場合に、西向きに伝播する両者の波を区別できなくなることが分かった。研究の結果、赤道域の慣性重力波とロスビー波に加え、赤道固有の波動である混合ロスビー重力波と赤道ケルビン波の存在を明らかにした。さらに赤道に沿って正弦的に熱源(冷源)を配置した場合の定常な大気の様子について議論している。

本研究では Matsuno(1966) を基に赤道波に関する基礎力学についてのレビューを行った。赤道域で振幅が最大になる東西方向の波について線形化された方程式系を速度、圧力について解き、赤道域の上記の波をそれぞれ導出し、波ごとの速度場・圧力場の図を示して確認するまでを行った。

第2章 基本モデル

赤道域での大気海洋の大規模大気について考える場合の基本モデルとして、中高緯度帯での大規模運動と同じように、大規模運動を考える場合に最も単純化したモデルである浅水方程式（非粘性・非圧縮流体、静水圧平衡状態、水平スケールが鉛直スケールよりはるかに大きい）と、 β 平面近似を用いて議論する。このとき β 平面近似は、赤道域に対応するように変化する。

まず経度を x 軸、緯度を y 軸、鉛直方向を z 軸にとった直交座標系を考え、運動方程式と質量保存則を書く

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.1.3)$$

ここで、 u, v はそれぞれ x, y 方向の速度、 t は時間、 g は重力加速度、 h は波の上面の高さの微小な偏差、 H は波の上面の平均した高さである。 f はコリオリパラメータで、

$$f = 2\Omega \sin \theta \quad (2.1.4)$$

である。 Ω は地球の自転速度、 θ は緯度である。ある緯度 θ_0 から $d\theta$ だけ微小に南北に変化する場合を考えると、地球半径 R を用いて

$$\theta = \theta_0 + d\theta \quad (2.1.5)$$

$$= \theta_0 + \frac{y}{R} \quad (2.1.6)$$

と表せる。このときの f をテイラー展開すると、

$$f(\theta) \simeq 2\Omega \sin \theta_0 + \left(\frac{2\Omega}{R} \cos \theta_0 \right) y \quad (2.1.7)$$

$$= f(\theta_0) + \beta y \quad (2.1.8)$$

となる。これがベータ平面近似である。ここでは赤道域の話なので $\theta_0 = 0$ とし、

$$f = \beta y, \quad (2.1.9)$$

と仮定する。これを式 (2.1.1) に代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (2.1.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.1.12)$$

となる。ここで $c^2 = \sqrt{gH}$ である。さらに簡単のために基本方程式を無次元形に変換する。時間・長さの単位をそれぞれ

$$[T] = \left(\frac{1}{c\beta} \right)^{1/2}, \quad [L] = \left(\frac{c}{\beta} \right)^{1/2} \quad (2.1.13)$$

とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - y v + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (2.1.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + y u + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (2.1.15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1.16)$$

となる。以降ではこの方程式を用いて赤道波について考える。

第3章 固有モードの赤道波

3.1 分散関係

x 方向, すなわち東西方向に伝播していく波を考える. ここですべての変化量に $e^{i\omega t+ikx}$ という要素が含まれるとすると, u, v, ϕ は

$$u = u'(y)e^{i\omega t+ikx}, \quad (3.1.1)$$

$$v = v'(y)e^{i\omega t+ikx}, \quad (3.1.2)$$

$$\phi = \phi'(y)e^{i\omega t+ikx} \quad (3.1.3)$$

となり, 式 (2.1.14)-(2.1.16) は

$$i\omega u' e^{i\omega t+ikx} - yv' e^{i\omega t+ikx} + ik\phi' e^{i\omega t+ikx} = 0, \quad (3.1.4)$$

$$i\omega v' e^{i\omega t+ikx} + yu' e^{i\omega t+ikx} + \frac{d\phi'}{dy} e^{i\omega t+ikx} = 0, \quad (3.1.5)$$

$$i\omega\phi' e^{i\omega t+ikx} + iku' e^{i\omega t+ikx} + \frac{dv'}{dy} e^{i\omega t+ikx} = 0 \quad (3.1.6)$$

となる. ここから $e^{i\omega t+ikx}$ を除き, y の関数 $u'(y), v'(y), \phi'(y)$ を改めて u, v, ϕ と置きなおすと,

$$i\omega u - yv + ik\phi = 0, \quad (3.1.7)$$

$$i\omega v + yu + \frac{d\phi}{dy} = 0, \quad (3.1.8)$$

$$i\omega\phi + iku + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (3.1.9)$$

となる. これらを v について整理する. 式 (3.1.7) と (3.1.9) から u と ϕ は

$$u = \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left(\omega yv + k \frac{dv}{dy} \right), \quad (3.1.10)$$

$$\phi = -\frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left(kyv + \omega \frac{dv}{dy} \right), \quad (3.1.11)$$

となり, u と ϕ を除いて v の式に整理すると

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left(\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - y^2 \right) v = 0 \quad (3.1.12)$$

という式が得られる. ここで考えている問題は赤道 ($y = 0$) 付近でのみ存在する波の運動である. すなわち赤道から遠く離れた地点では波は減衰すると考える. よって,

$$v \rightarrow 0 \quad ; \quad \text{when } y \rightarrow \pm\infty \quad (3.1.13)$$

という境界条件を適用できると考えられる. 式 (3.1.12) を変形すると,

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + y^2 \right) v(y) = \left(\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} \right) v(y) \quad (3.1.14)$$

となる. $\omega^2 - k^2 + k/\omega$ が定数とすると, この式の形と境界条件は調和振動子の1次元の運動を扱ったシュレディンガー方程式と対応している. このシュレディンガー方程式の解は既知であり, v に関する方程式についても同じ解法を用いてもよいと考える. まず,

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2) \quad (3.1.15)$$

という分散関係が得られ^{*1}, v の解は

$$v(y) = C e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad (3.1.16)$$

である. ここで $H_n(y)$ は n 次のエルミート多項式と呼ばれるもので,

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \quad (3.1.17)$$

と定義される. 式 (3.1.15) は n に対して振動数と経度方向の波数との関係が得られる. この n は波の振動の南北方向のモードであり, n の値のときの ω を以降で考えていく.

3.2 モード毎の振動数

式 (3.1.15) から, n と k が指定されたとき ω の解が得られる. このとき, n の値によって ω の解が異なる場合がある.

^{*1}導出の詳細は付録 A を参照.

$n \geq 1$ の場合, 式 (3.1.15) を変形すると,

$$\frac{\omega^2}{k^2} - 1 + \frac{1}{\omega k} = \frac{2n+1}{k^2} \quad (3.2.18)$$

となる. k に対して ω が大きいか小さいかで

$$\frac{\omega^2}{k^2} - 1 \simeq \frac{2n+1}{k^2} \quad (\omega \rightarrow \text{大}), \quad (3.2.19)$$

$$-1 + \frac{1}{\omega k} \simeq \frac{2n+1}{k^2} \quad (\omega \rightarrow \text{小}), \quad (3.2.20)$$

という近似ができる. よって ω の解

$$\omega_{1,2} \simeq \mp \sqrt{k^2 + 2n+1} \quad (\omega \rightarrow \text{大}), \quad (3.2.21)$$

$$\omega_3 \simeq \frac{k}{k^2 + 2n+1} \quad (\omega \rightarrow \text{小}) \quad (3.2.22)$$

が得られる. これらを有次元の波の伝播速度にすると,

$$c_{1,2} \simeq \pm c_g \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\beta}{c_g} (2n+1)}, \quad (3.2.23)$$

$$c_3 \simeq -\frac{\beta}{k^2 + \frac{\beta}{c_g} (2n+1)} \quad (3.2.24)$$

となる. ここで子午線方向の重力波の速度 c は混乱を避けるために代わりに c_g で表している.

符号で表される波の伝播方向, また慣性重力波はロスビー波と比べて振動数が大きいことを考えると, 添字の 1, 2, 3 で示す振動数や伝播速度の波は, 次の 3 タイプの波

1. 東進する慣性重力波
2. 西進する慣性重力波
3. 西進するロスビー波

を表す. $n \geq 1$ の場合は, 上記の 3 つの波が存在する.

基本的に任意の k に対し, ω の解は 3 つ得られる. $n \geq 1$ のとき, どのような k に対してもそれぞれ明確に違う ω が得られる. しかし ω の解は $n = 0$ のとき特別になる. (3.1.15) から,

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 1. \quad (3.2.25)$$

これを变形して

$$(\omega - k)(\omega^2 + k\omega - 1) = 0 \quad (3.2.26)$$

を解くと、次の3つの解が得られる.

$$\omega = \begin{cases} -\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1}, \\ -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1}, \\ k. \end{cases} \quad (3.2.27)$$

しかし、これらの解にそれぞれの波の振動数は1対1で対応していない。慣性重力波はロスビー波と比べて振動数が大きいということ、また $\omega = k$ を解とすると式 (3.1.10), (3.1.11) より u, ϕ が発散してしまい、境界条件を満たなくなることを考えると、(3.2.27) の解は、

$$\omega_1 = -\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} \quad : \text{東進慣性重力波}, \quad (3.2.28)$$

$$\omega_2 = -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} \quad \begin{cases} k \leq 1/\sqrt{2} : \text{西進慣性重力波} \\ k \geq 1/\sqrt{2} : \text{ロスビー波} \end{cases}, \quad (3.2.29)$$

のように2つだけとなる。この2つ目の解は、波数 k の変化に対して $k = 1/\sqrt{2}$ を境に西進する重力波からロスビー波へ連続的に変化する。これは、西進する慣性重力波とロスビー波という2つの波の性質を混合した1つの波とも考えられる。この波は混合ロスビー重力波と呼ばれる。すなわち、 $n = 0$ の場合には

1. 東進慣性重力波
2. 混合ロスビー重力波

の2つの波が存在する。

今までは赤道付近では $v \neq 0$ であるという前提で方程式を解いてきたが、特別な場合として $v = 0$ の場合を考える。式 (3.1.7) に $v = 0$ をあてはめると、

$$i\omega u + ik\phi = 0, \quad (3.2.30)$$

$$yu + \frac{d\phi}{dy} = 0, \quad (3.2.31)$$

$$i\omega\phi + ihu = 0 \quad (3.2.32)$$

となる。これより

$$(\omega - k)(\omega + k) = 0, \quad (3.2.33)$$

$$\omega = \pm k \quad (3.2.34)$$

が得られる。このときの u, ϕ の解は,

$$\phi = u = Ce^{-\frac{1}{2}y^2}, \text{ for } \omega = -k, \quad (3.2.35)$$

$$\phi = -u = Ce^{\frac{1}{2}y^2}, \text{ for } \omega = k, \quad (3.2.36)$$

となる。しかし $n = 0$ のときと同様に $\omega = k$ では境界条件を満たさない。よって $v = 0$ の解は $\omega = -k$ となる。すなわち $v = 0$ の場合には東進する波が 1 つ存在する。この解は、仮に分散関係式 (3.1.15) において $n = -1$ とおいた場合に得られる解と等しい。 $n = -1$ の解と考えることができる。この波は赤道ケルビン波と呼ばれる。 $v = 0$ の場合は赤道ケルビン波が存在する。

$n \geq 1, n = 0, v = 0 (n = -1)$ の振動数と波数の関係を図示すると、図 3.2.1 のようになる。

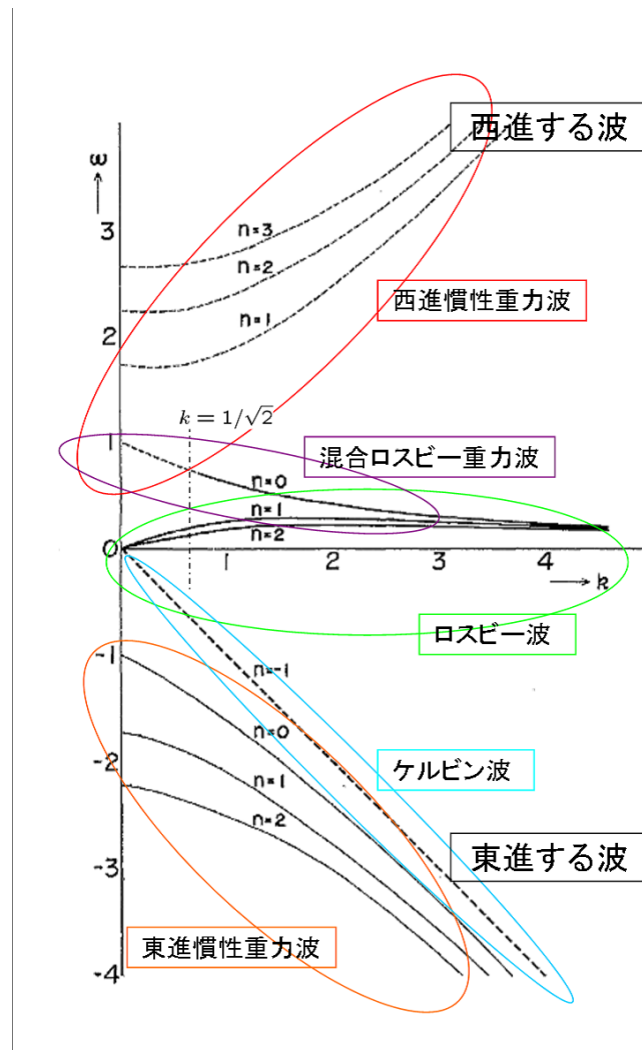


図 3.2.1: Matsuno(1966) の各モードごとの分散関係を表した図に, 波の分類を書き加えた. 横軸が波数, 縦軸が無次元化した振動数である.

3.3 固有関数

振動数の式と v の式によって、それぞれの波の速度と圧力 (u, v, ϕ) の式が得られる。式 (3.1.10), (3.1.11), (3.1.16) から

$$u = \frac{C}{i(\omega^2 + k^2)} \left\{ y\omega e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) + k \left(-yH_n(y) + \frac{dH_n(y)}{dy} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} \right\}, \quad (3.3.37)$$

$$\phi = -\frac{C}{i(\omega^2 + k^2)} \left\{ yk e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) + \omega \left(-yH_n(y) + \frac{dH_n(y)}{dy} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} \right\}. \quad (3.3.38)$$

これを整理すると、

$$u = \frac{C}{i(\omega^2 + k^2)} \left\{ (\omega - k)e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) + e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dH_n(y)}{dy} \right\}, \quad (3.3.39)$$

$$\phi = -\frac{C}{i(\omega^2 + k^2)} \left\{ (k - \omega)e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) + e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dH_n(y)}{dy} \right\} \quad (3.3.40)$$

となる。またエルミート多項式 (3.1.17) から漸化式

$$\frac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y), \quad (3.3.41)$$

$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y) \quad (3.3.42)$$

が得られる。これを用いて u, v, ϕ の式をまとめると、

1. $n \geq 1$ の場合

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix}_{nl} = \begin{pmatrix} i(\omega_{nl}^2 - k^2)\psi_n \\ \frac{1}{2}(\omega_{nl} - k)\psi_{n+1} + n(\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \\ \frac{1}{2}(\omega_{nl} - k)\psi_{n+1} - n(\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (3.3.43)$$

2. $n = 0$ の場合

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix}_{0l} = \begin{pmatrix} 2i(\omega_{nl} + k)\psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.44)$$

3. $v = 0(n = -1)$ の場合

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.45)$$

である。ここで,

$$\psi_n = e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad (3.3.46)$$

である。式 (3.1.16) より

$$v = C e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) = C \psi_n \quad (3.3.47)$$

なので, 式 (3.1.12) から

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + y^2 \right) \psi_n = \left(\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} \right) \psi_n \quad (3.3.48)$$

である。 ψ_n は固有値 ω に対する固有関数と言える。

3.4 各モード毎の特徴

前節までで固有モード毎の波動と, それらの速度と圧力の式を導き出した。ここでは波動ごとの速度場, 圧力場の図を示してその特徴を考えていく。

3.4.1 $n \geq 1$ の波動

$n \geq 1$ の場合の波動は東進・西進慣性重力波とロスビー波が存在する。これらの波はそれぞれに, 特に慣性重力波とロスビー波の間に明確な区別がつけられる。

図 3.4.1, 3.4.2 の慣性重力波は赤道に近い領域では南北方向に速度のベクトルが向いており, 東西方向の圧力傾度が最大である場所で収束と発散が起こっている。また赤道から離れるほど, コリオリ力の影響を受け速度ベクトルの向きが曲げられている。

図 3.4.3 のロスビー波は全体的に気圧場と速度場の間でほぼ地衡流平衡が成り立っている。 $n = 1$ では唯一赤道付近でコリオリ力が働かないため地衡風平衡が成り立たなくなっている。 $n = 2$ では赤道を中心に地衡流とは逆回転の速度場ができている。

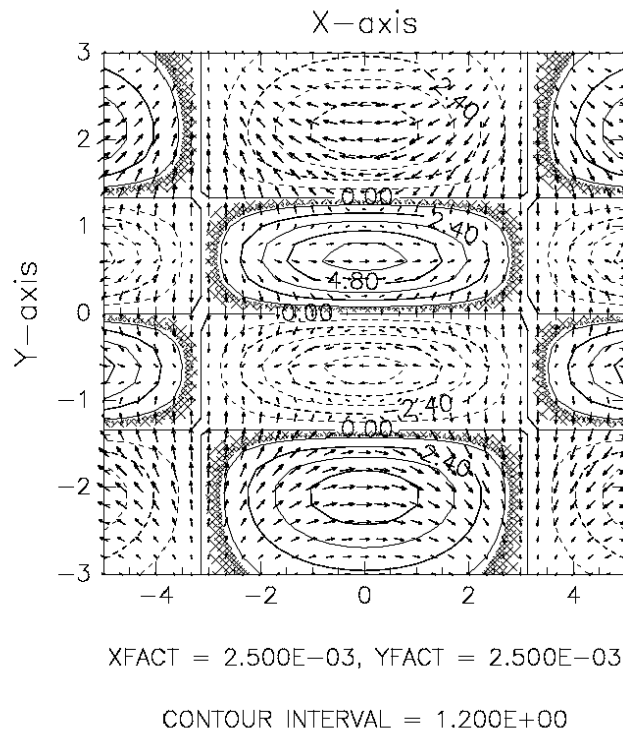
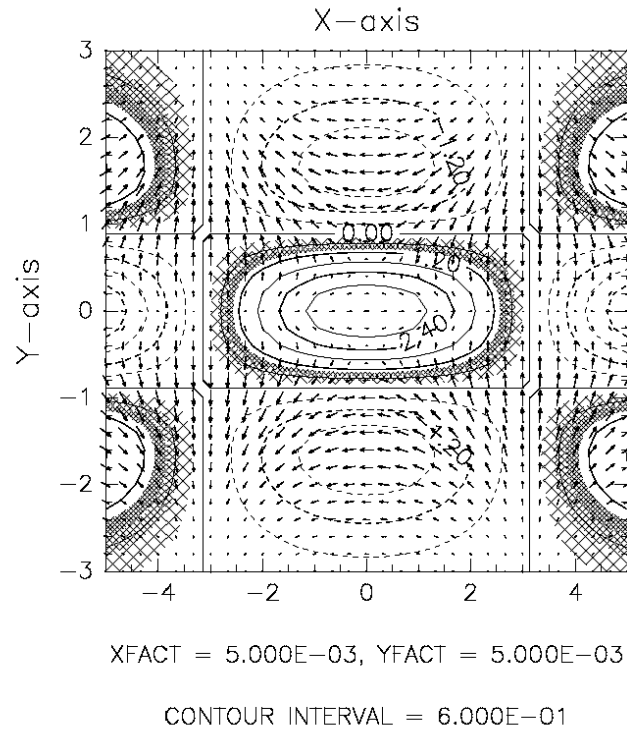


図 3.4.1: $n \geq 1$ の東進慣性重力波 ($k = 0.5$). 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 上は $n = 1$, 下は $n = 2$ のモード.

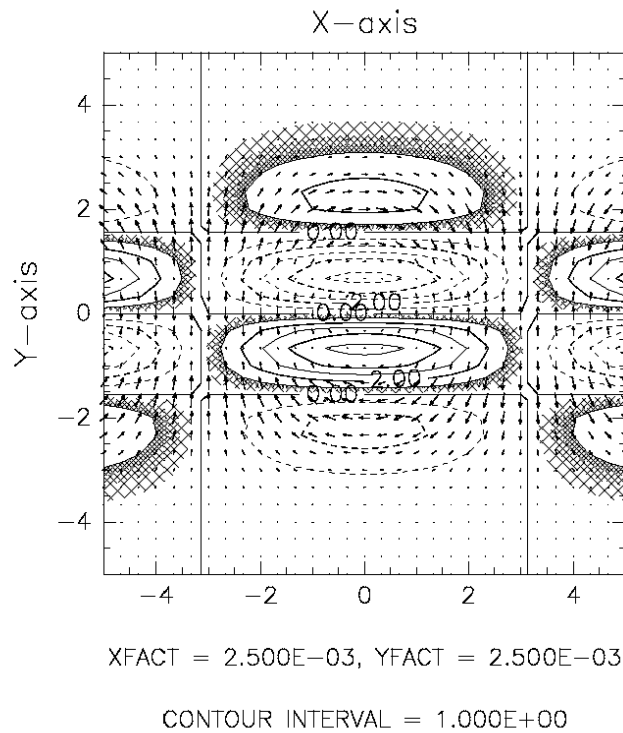
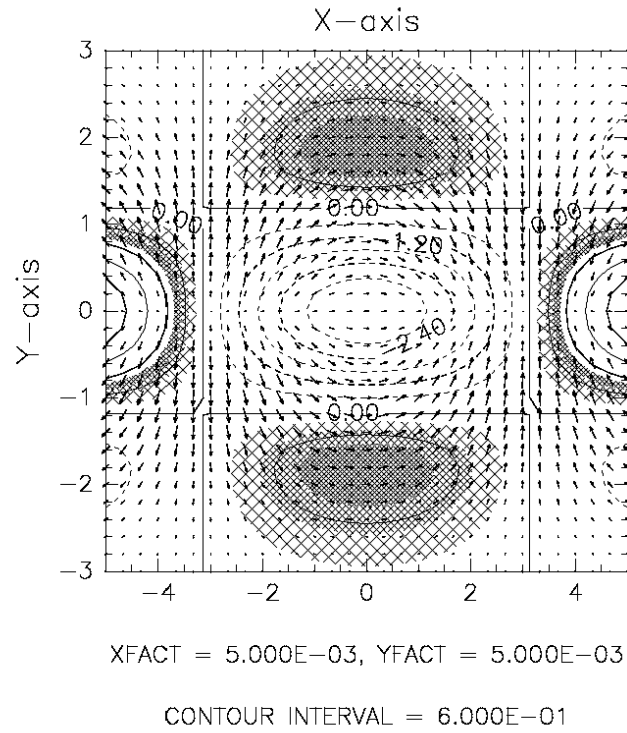


図 3.4.2: $n \geq 1$ の西進慣性重力波 ($k = 0.5$). 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 上は $n = 1$, 下は $n = 2$ のモード.

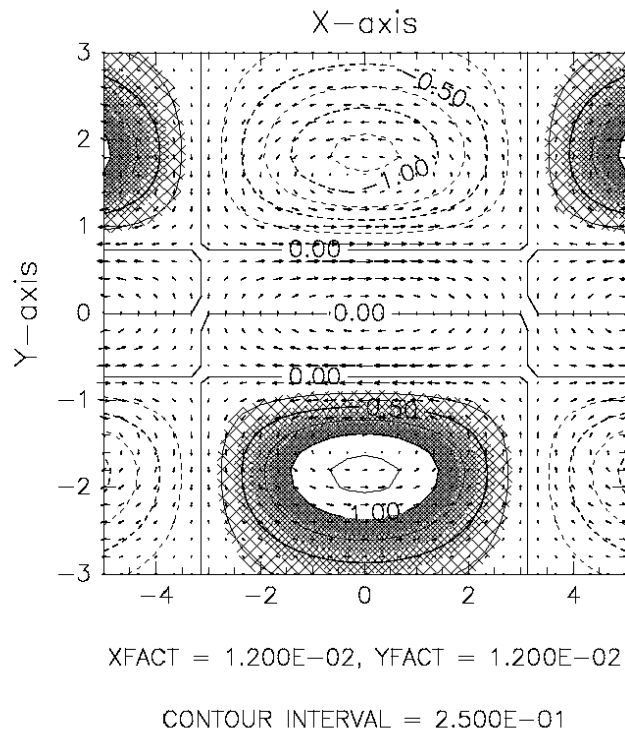
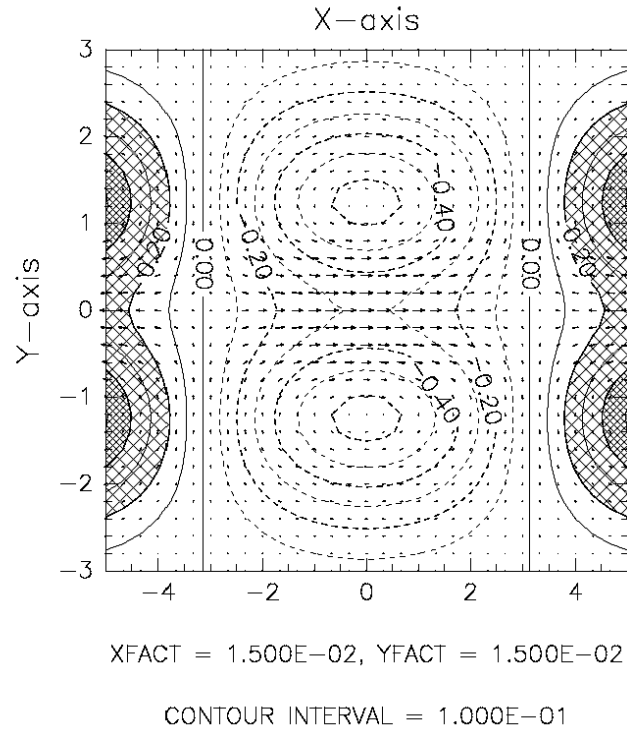


図 3.4.3: $n \geq 1$ のロスビー波 (西進, $k = 0.5$). 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 上は $n = 1$, 下は $n = 2$ のモード.

3.4.2 $n = 0$ の波動

$n = 0$ の場合の波動は東進慣性重力波と混合ロスビー重力波が存在する.

図 3.4.4 の東進慣性重力波は $n \geq 1$ の場合と速度ベクトルの東西方向の向きが逆になっているが, それ以外の分布の様子は $n \geq 1$ の東進慣性重力波の特徴と同じである.

図 3.4.5 の混合ロスビー重力波は, 高緯度では速度場と圧力場の地衡風平衡が成り立っている. これはロスビー波の性質である. しかし赤道付近では慣性重力波のような速度場となっている. 赤道付近での速度場・圧力場の分布が一番近いのが, $n = 2$ の西進慣性重力波である. このように, 混合ロスビー重力波はロスビー波と慣性重力波の両方の特徴が混合している. また, (3.2.29) では, 波数 k が $k \leq 1/\sqrt{2}$ の場合は慣性重力波, $k \geq 1/\sqrt{2}$ の場合はロスビー波に分類されるが, $k = 0.5 (< 1/\sqrt{2})$ と $K = 1.0 (> 1/\sqrt{2})$ では明確な違いが見て取れない. このことから西進する波は混合ロスビー重力波という 1 つの波であると言える.

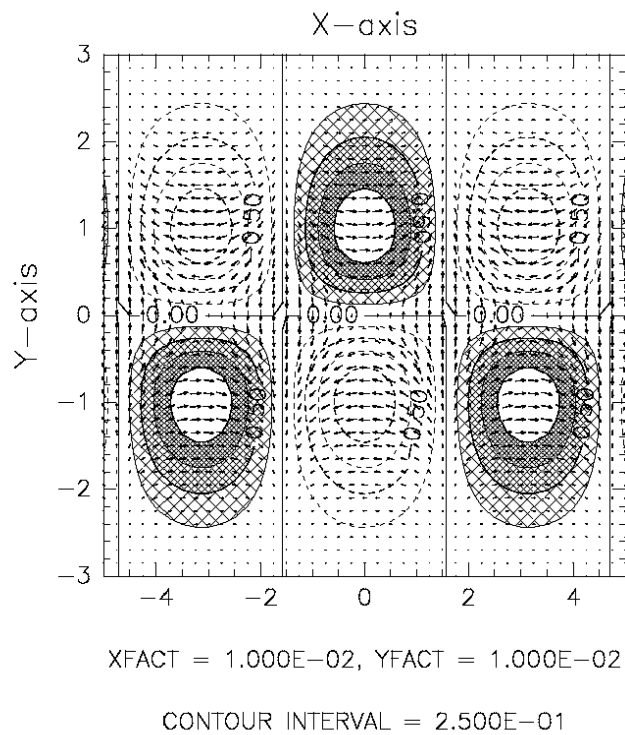
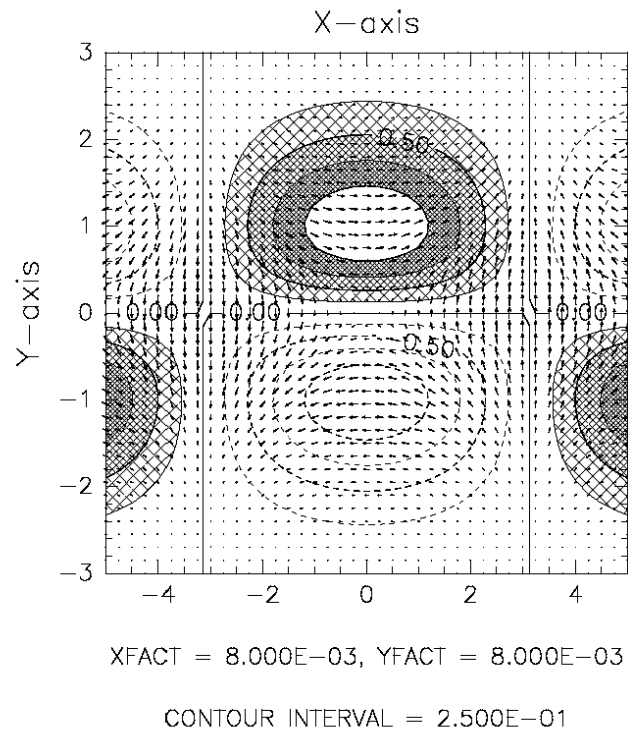


図 3.4.4: $n = 0$ の東進慣性重力波. 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 上は波数が $k = 0.5$, 下は $k = 1.0$.

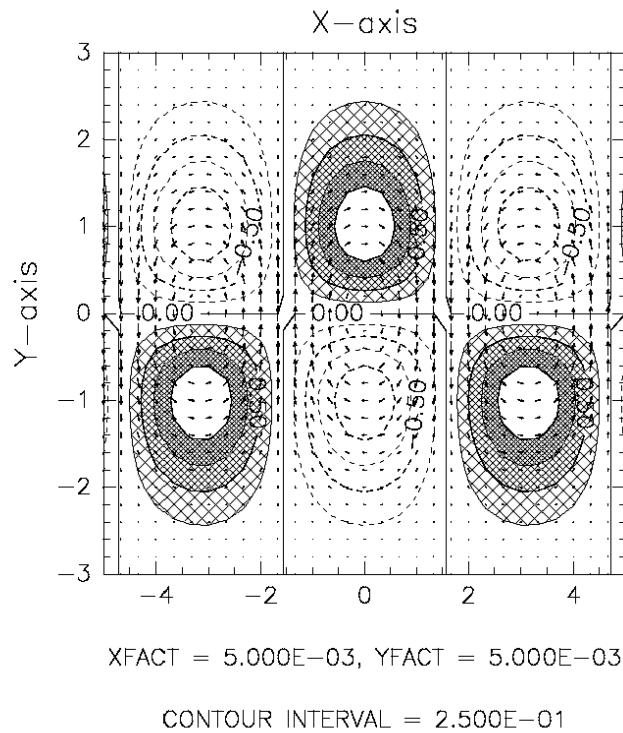
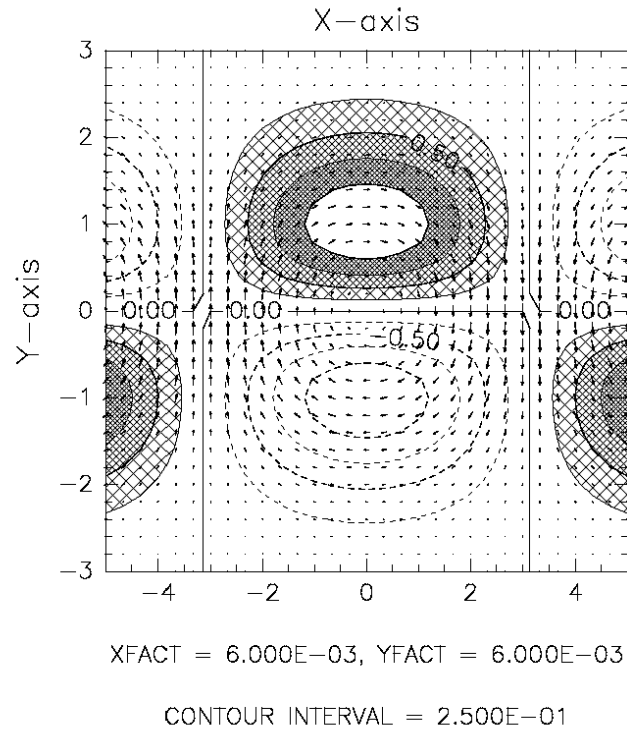


図 3.4.5: $n = 0$ の混合ロスビー重力波 (西進). 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 上は波数が $k = 0.5$, 下は $k = 1.0$.

3.4.3 $v = 0 (n = -1)$ の波動

$v = 0$ の場合の波動は赤道ケルビン波が存在する.

図 3.4.6 のケルビン波は速度ベクトルが領域全体で赤道に平行で, 圧力場の山と谷が南北方向に対して赤道上に 1 つしかない. またケルビン波は赤道から離れるにつれて速度が小さくなっている. 東西方向には赤道上の圧力の勾配が大きい部分で収束し, 重力波の特徴が表れている. 一方南北方向には赤道域から少し離れた部分では東西の気圧傾度が小さくなり, 地衡流平衡が成り立つ.

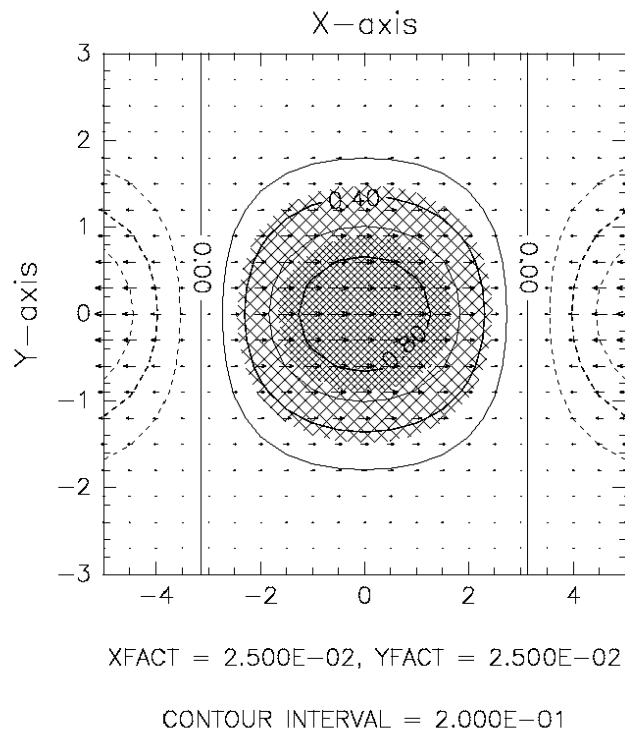


図 3.4.6: $n = 0$ のケルビン波. 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 上は波数が $k = 0.5$, 下は $k = 1.0$.

まとめ

赤道波に関する基礎力学について, Matsuno(1966) のレビューを行った. 赤道域での大気・海洋の東西方向に伝播する波動の運動について線形の浅水方程式と赤道域についてのベータ平面近似を用いて解いた. まずモード $n \geq 1$ について中高緯度帯と同じく振動数の大きい波が 2 つ, 小さい波が 1 つ得られ, 慣性重力波がロスビー波の振動数よりも大きい場合を考えると, これらは東進・西進慣性重力波とロスビー波である. 次に $n = 0$ の場合を考えると, 東進慣性重力波と, 西進する波の 2 つが得られた. この西進する波はある波数を境に西進慣性重力波とロスビー波との性質が入れ替わる. この波は混合ロスビー波である. そして $v = 0$ である特別な場合には, 東進する波が得られた. この波は $n = -1$ とした場合に表れる波と同じ形であり, この波はケルビン波である. このように, 赤道域では 5 種類の波が存在することが分かった.

今回は内容に含めていないが Matsuno(1966) の熱源応答についてもレビューを行っており, 引き続き進めていく予定である. 熱源応答については Matsuno(1966) の他に, Gill(1980) や Kosaka and Matsuda(2005), 林 (2006) がある. それぞれ熱源の設置の仕方が異なり, Matsuno(1966) では赤道沿いに熱源と冷源を交互に設置しており, Gill(1980) では熱源を赤道上に 1 点のみ設置している. Kosaka and Matsuda(2005) や林 (2006) では, 地球を囲むリング状の熱源を考えている. これらを基に風・圧力場の図を再現し, また他の熱源応答の形も考えることで熱源の影響による大気の運動について調べていきたい. また, 海に比べて比熱の小さい陸が日射で暖められることで一時的に熱源となり, それによる陸上での日周期の雲の発生が大規模運動に与える影響について考えたいと思っている.

謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方々にご指導、ご協力を頂きました。指導教官の神戸大学 林 祥介 教授には、卒業研究の方針を示して頂きました。JAMSTEC(独立行政法人海洋研究開発機構)/神戸大学 山中 大学 教授には研究の全体にわたって非常に多くのご指導を頂きました。神戸大学 地球および惑星大気科学研究室 納多 哲史 氏には論文の作成についてご意見を頂きました。そして神戸大学 地球および惑星大気科学研究室内の皆さまには多くの助言や激励を頂きました。ここに深く感謝し、心よりお礼申し上げます。

数値計算と図の作成には、地球流体電脳ライブラリ dcl-5.3.3 (<http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/>) を使用させていただきました。

付録 A 分散関係式の導出

式 (3.1.12) から式 (3.1.15) を導出する. 式 (3.1.12) を再掲すると,

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left(\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - y^2 \right) v = 0. \quad (3.4.49)$$

これを变形して,

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + y^2 \right) v = \left(\omega^2 - k^2 + \frac{\omega}{k} \right) v. \quad (3.4.50)$$

この式の形は, 1 次元の調和振動子に対するシュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right) X(\xi) = \lambda X(\xi) \quad (3.4.51)$$

と一致する. この式の解法について順に確認していく.

まず式の形から解を推定すると,

$$v(y) = f(y)e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (3.4.52)$$

と推定できる. 便宜上 $\lambda = \omega^2 - k^2 + k/\omega$ と置いて, 解を式に当てはめると,

$$-\left\{ \frac{d^2f}{dy^2} - 2y\frac{df}{dy} - (1 - y^2)f \right\} e^{-\frac{y^2}{2}} + y^2 f e^{-\frac{y^2}{2}} = \lambda f e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (3.4.53)$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = 2y\frac{df}{dy} + (1 - \lambda)f \quad (3.4.54)$$

となる. このような方程式の解 $f(y)$ を求めるには, $f(y)$ を次のようなべき級数

$$f(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_ny^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_ny^n \quad (3.4.55)$$

と考へて解く. これを (3.4.54) に代入して,

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} \quad \frac{df^2}{dy^2} &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3y + 3 \cdot 4a_4y^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}y^n, \end{aligned} \quad (3.4.56)$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} \quad 2y \frac{df}{dy} - (\lambda - 1) &= (1 - \lambda)a_0 + (1 \cdot 2 + 1 - \lambda)a_1y + (2 \cdot 2 + 1 - \lambda)a_2y^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1 - \lambda)a_ny^n, \end{aligned} \quad (3.4.57)$$

となる. 両辺が一致するためには y の同じべき項の係数が等しくならなくてはならないので,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (2n+1-\lambda)a_n \quad (3.4.58)$$

となる. これで a_2, a_3, a_4, \dots と係数を決めることが出来るが, $n \rightarrow \infty$ まで係数があるとすると, $y \rightarrow \pm\infty$ のとき級数 $f(y)$ は発散してしまうので, $v(y)$ も収束しなくなる. ここで扱っている問題や調和振動子について考えると, $y=0$ の付近で有限の値を持ち, $y \rightarrow \infty$ で急速に 0 になるような条件があると考えられる. そのような条件が存在するには, (3.4.58) の右辺の括弧の中が 0 になればよい. すなわち,

$$\lambda = 2n + 1 \quad (3.4.59)$$

を満たせば, a_{n+2}, a_{n+4}, \dots はすべて 0 になる. しかし $\dots a_{n+1}, a_{n*3} \dots$ は別に存在していて, $n \rightarrow \infty$ で発散してしまう. これでは意味がないので, $\dots a_{n+1}, a_{n*3} \dots$ は最初の項 (a_0 または a_1) から 0 でなければならぬ. つまり級数 $f(y)$ は奇数べき項もしくは偶数べき項だけをもち, (3.4.54) で決まるような n によって a_n 以降が 0 になる多項式である. ここで $\lambda = \omega^2 - k^2 + k/\omega$ より

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.4.60)$$

であり, 分散関係 (3.1.15) が得られた.

付録 B 高モードの波動の速度・圧力分布図

$n \geq 1$ の場合の波動について, $n = 3, 4, 5$ の場合についても速度場・圧力場の図をプロットしたので, ここで挙げておく.

図 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3 の慣性重力波もロスビー波も, 南北の節が増え複雑になってはいるが, それぞれの波の性質が表れている. 3.5.3 のロスビー波については, 高緯度域での地衡流平衡の速度場が, 気圧場から低緯度側に向かってずれる傾向がある. n が大きくなるほど, ずれが気圧場の中心とその周囲の節との位置に対して相対的に大きくなる.

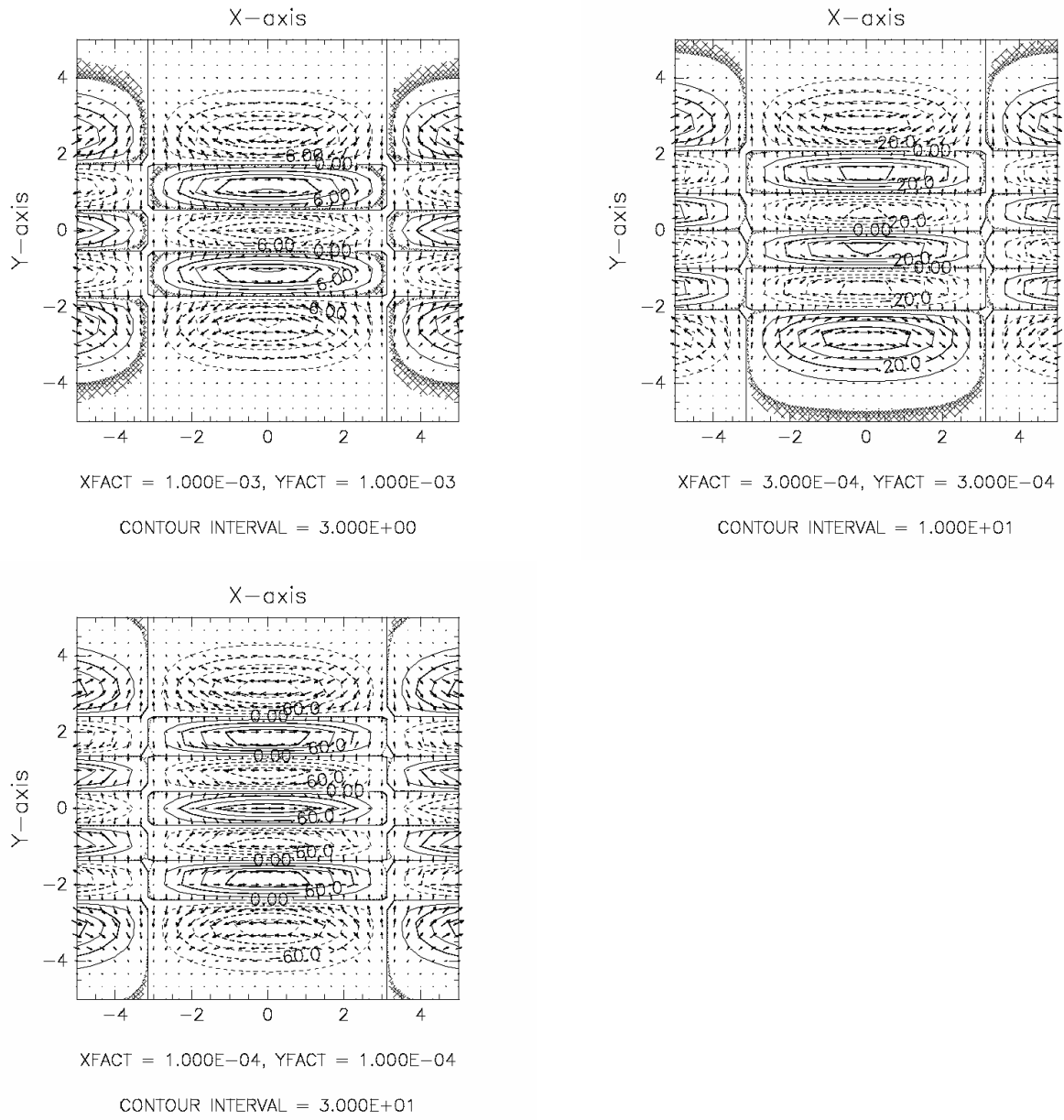


図 3.5.1: $n \geq 1$ の東進慣性重力波 ($k = 0.5$). 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 左上は $n = 3$, 右上は $n = 4$, 下は $n = 5$ のモード.

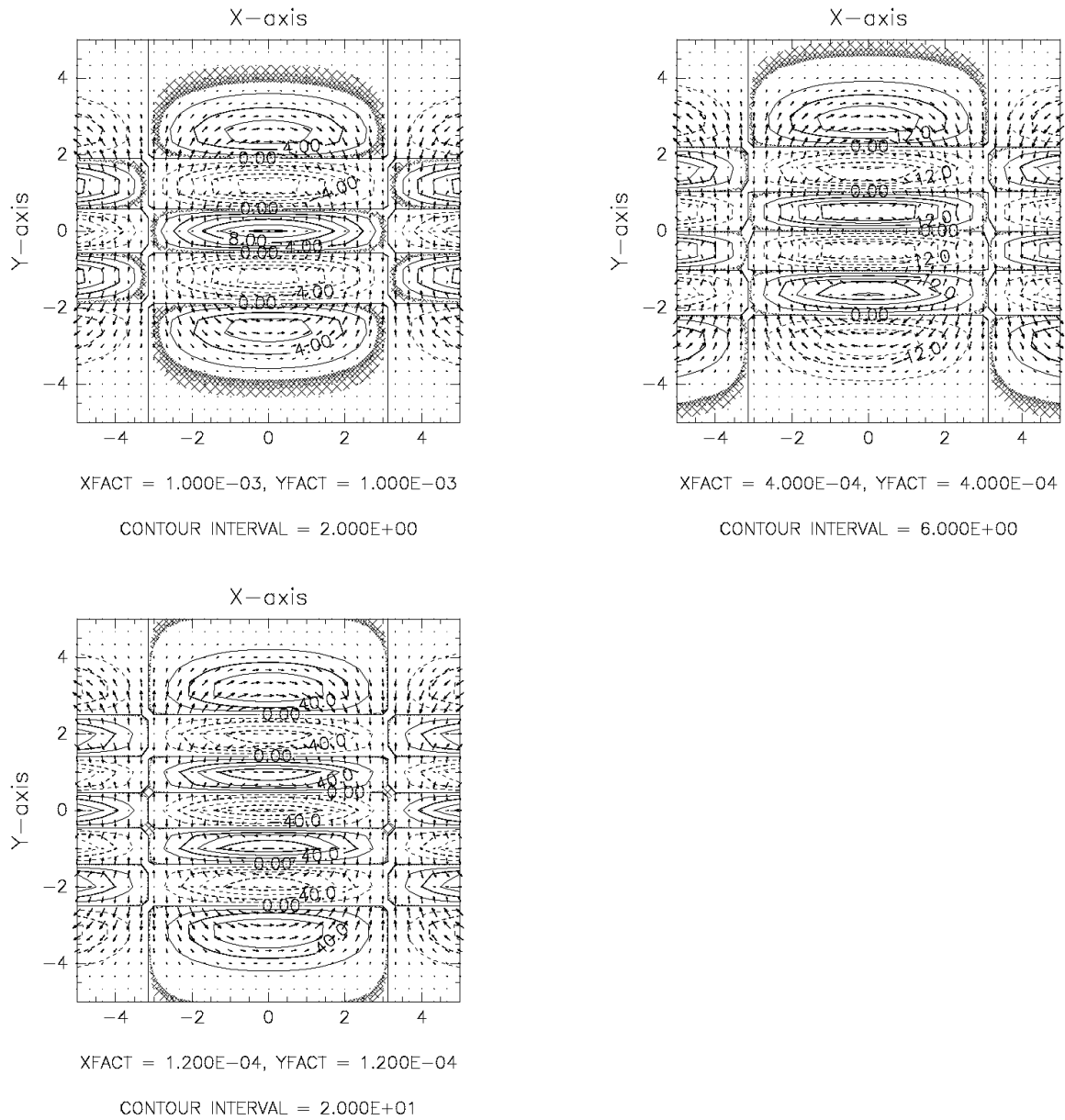


図 3.5.2: $n \geq 1$ の西進慣性重力波 ($k = 0.5$). 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 左上は $n = 3$, 右上は $n = 4$, 下は $n = 5$ のモード.

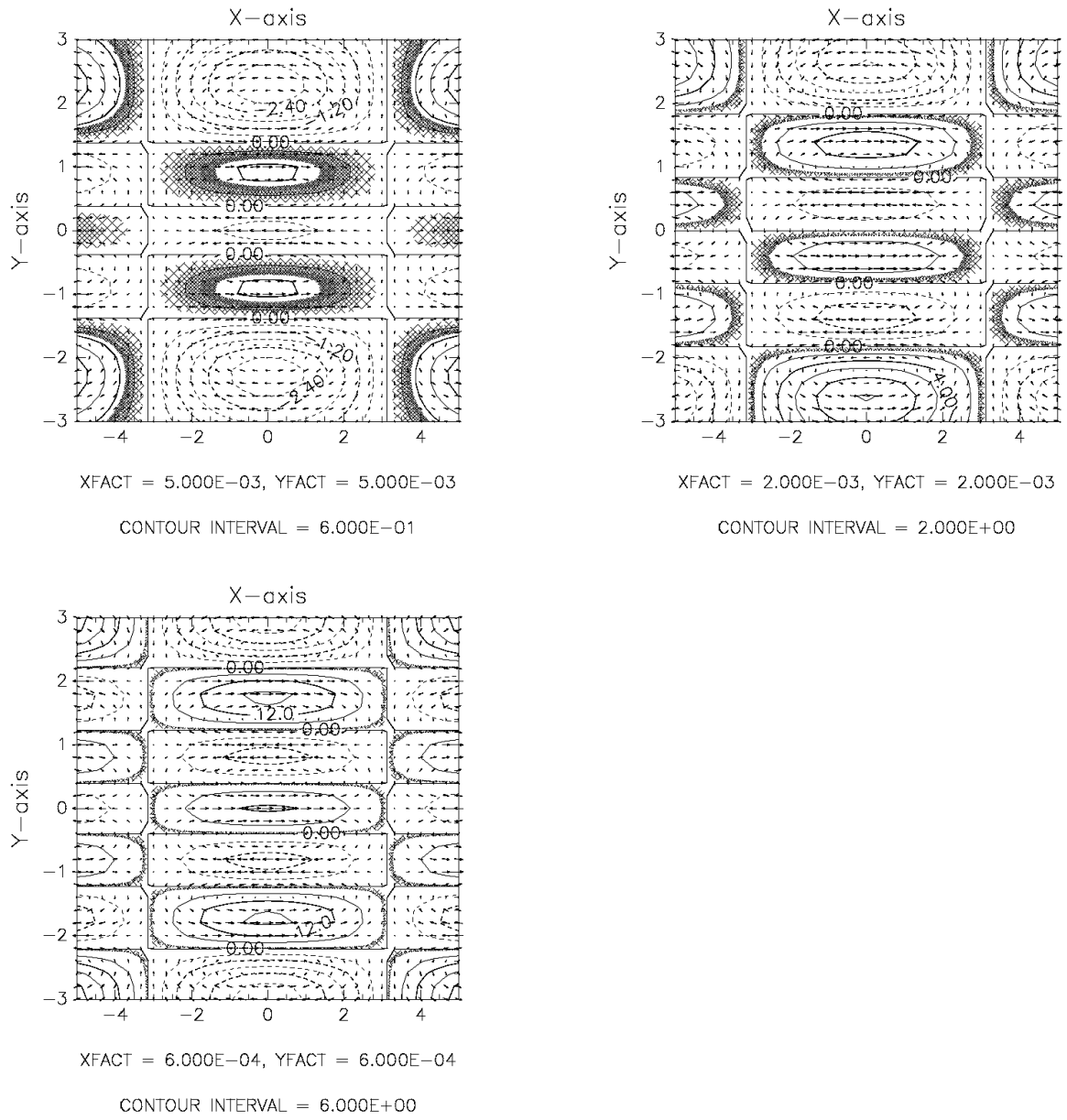


図 3.5.3: $n \geq 1$ のロスビー波 (西進, $k = 0.5$). 矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す. 左上は $n = 3$, 右上は $n = 4$, 下は $n = 5$ のモード.

参考文献

- Gill, A.E., 1980: Some simple solutions for heat-induced tropical circulation. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **106**, 447-462.
- Kosaka, Y. and Matsuda, Y., 2005: Roles of rossby and gravity waves on circulation associated with tropical and subtropical heating. *J. Meteor. Soc. Japan*, **83**, 481-498.
- Matsuno, T., 1966: Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 25-42.
- 木村竜治, 1983: 地球流体力学入門, 東京堂出版, pp.247.
- 小出 昭一郎, 1969: 基礎物理学選書 5A 量子力学 (1), 裳華房, pp.225.
- 林 麻利子, 2006: 赤道付近における熱源応答と赤道波, 卒業論文, 1-65.
- 松野太郎-島崎達夫, 1981: 大気科学講座 3 成層圏と中間圏の大気, 東京大学出版会, pp.279.
- 山中大学, 2002: 東南アジアの気候・気象理解のための力学的基礎, 気象研究ノート 202 号, 日本気象学会, pp1-56.
-