

# ベナール・レイリー型対流の線形論に関する考察

黒田美紀 地球および惑星大気科学研究室

## 1. はじめに

対流は、温度差のある流体層において、熱伝導では熱輸送が追いつかず、粘性が利かないときに発生する。しかし、より具体的にはどのような条件のもとで対流は発生するのか、そのときの流れパターンはどのように記述されるのか？レイリーによると、レイリー数がある値を超えたときに対流が発生することがわかっている。そこで、対流を学ぶ最初の段階として、もっとも簡単な対流の一つであるベナール対流を考える。ベナール対流とは、上下の境界が自由表面で、その両方の境界の温度が一定に保たれた流体層で発生する対流である。本研究では Chandrasekhar (1961) に基づき、定常状態のまわりでの線形安定論を用いてベナール対流が発現する条件を導出し、その時の臨界モードの構造を可視化した。

## 2. 考える系と境界条件

### 考える系

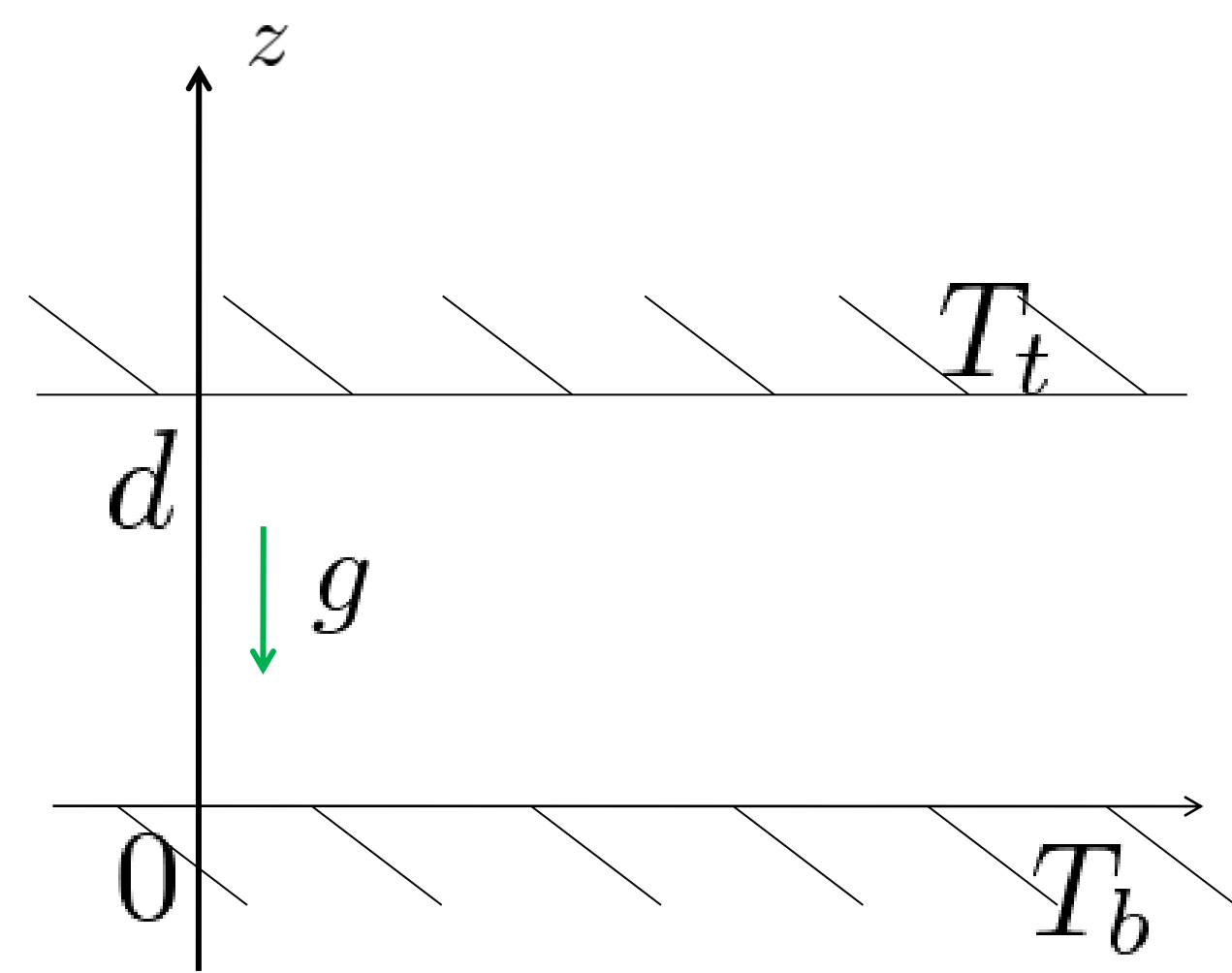
- ブシネスク流体を考える
- 水平方向に無限に広がる薄い流体層
- 鉛直上向きに  $z$  軸をとる
- $z = 0$  を下側境界,  $z = d$  を上側境界とする
- 下面から一様に加熱されている
- 外力は重力のみ

### 定常状態

- 速度場はゼロ
- 鉛直方向の温度勾配が一定

### 境界条件

- $z = 0, d$  では温度  $T$  を固定
  - $z = 0$  では  $T_b$  とする
  - $z = d$  では  $T_t$  とする
- 自由表面: 応力なし



## 4. 線形安定性の考察

$$Ra = \frac{(\sqrt{d/\alpha\beta g d})^{-2}}{(d^2/\kappa)^{-1}(d^2/\nu)^{-1}} = \frac{\tau_\kappa \tau_\nu}{\tau_B^2}$$

$\tau_\kappa$ : 熱伝導の時間スケール  
 $\tau_\nu$ : 粘性の時間スケール  
 $\tau_B$ : 浮力の時間スケール

レイリー数が小さい: 熱伝導や粘性によって場が一様化される  
レイリー数が大きい: 熱伝導や粘性によって場が一様化される前に、**浮力**によって運動が生じる

導出した固有値方程式で  $\sigma = 0$  のとき,

$$\text{固有値方程式: } \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right)^3 W' = -(Ra)a^2 W'$$

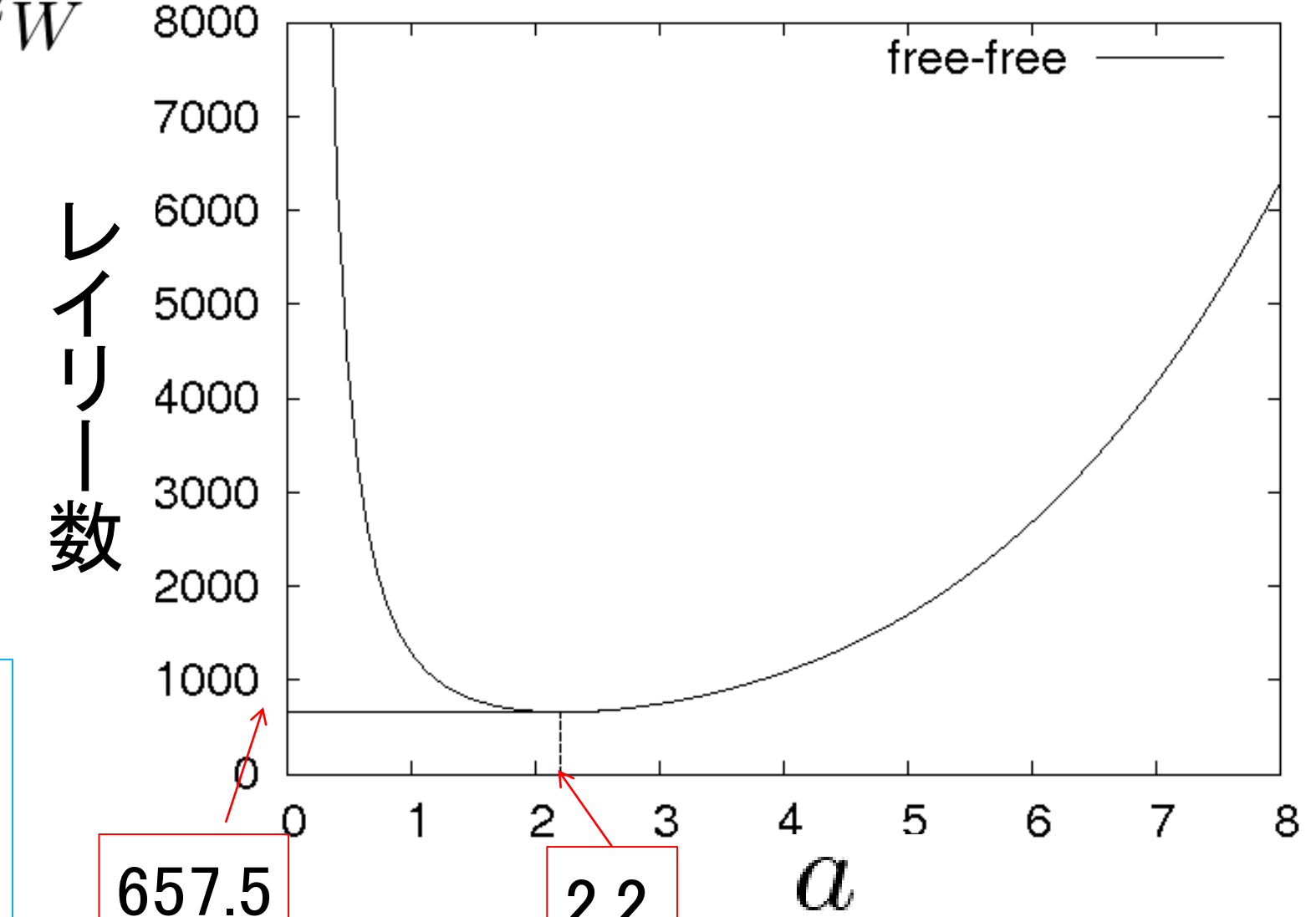
境界条件から,  $W' = A \sin n\pi z$   
 $n = 1$  が最小 定数

$$\text{レイリー数: } Ra = \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2}$$

$$\text{臨界値: } a_c = \pi^2/2 \sim 2.2$$

$$\text{臨界レイリー数: } Ra_c = 27\pi^4/4 = 657.5$$

$y = 0$  において,  
 $A = 1.0, a_x = \pi/\sqrt{2}$  としたときの  
 $a$  と  $Ra$  のグラフ



## 3. 支配方程式の導出

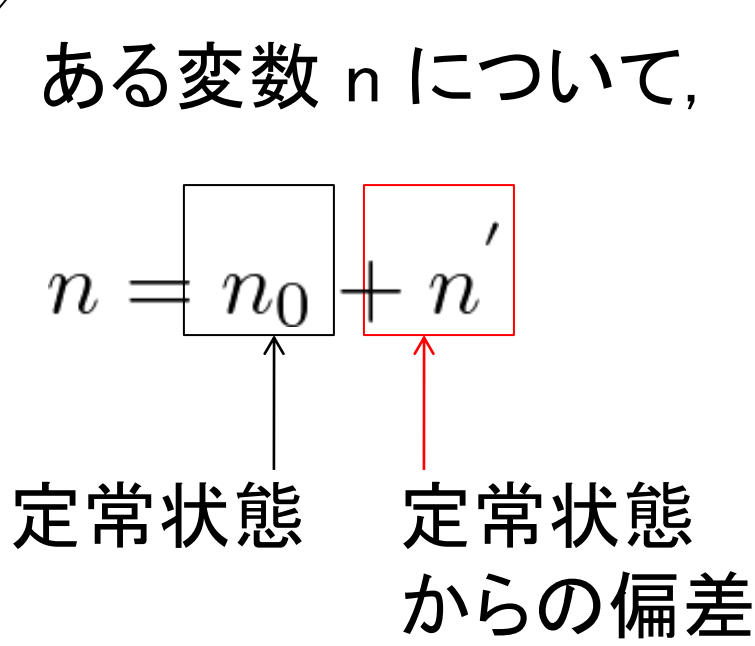
### • ブシネスク近似した基礎方程式

- 連続の式  $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$
- 運動方程式  $\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\rho_0} g \lambda_i + \nu \nabla^2 u_i$
- 熱力学の式  $\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T$
- 状態方程式  $\rho' = -\alpha \rho_0 T'$

$x_j$ ( $x = (x, y, z)$ ): 位置	$\rho$ : 密度	$T'$ : 定常状態の温度からの偏差
$u_j$ ( $u = (u, v, w)$ ): 速度	$p$ : 圧力	$\rho_0$ : 定常状態の密度
$t$ : 時間	$\nu$ : 動粘性係数	$\rho'$ : $\rho_0$ からの偏差
$g$ : 重力加速度	$T$ : 温度	$\alpha$ : 体積膨張率
$\lambda_j$ ( $\lambda = (0, 0, 1)$ ): $z$ 方向の単位ベクトル	$\kappa$ : 熱拡散係数	

### • 定常状態のまわりでの安定性を考える

- パラメータを定常状態と定常状態からの微小な偏差に分離する



### • スケーリング

- 長さのスケール:  $d$
- 時間のスケール:  $d^2/\nu$
- 速度のスケール:  $\nu/d$
- 温度のスケール:  $\beta d$  ( $\beta$ : 鉛直方向の温度勾配) とし、線形化する

### • 定常状態からの偏差について、以下のような形の解を仮定する (ただし、パラメータはすべて無次元数)

- $n' = N'(z) \exp\{i(a_x x + a_y y) + \sigma t\}$ 
  - $a/d$ : 水平波数,  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
  - $\sigma$ : 成長率

$$\text{固有値方程式: } \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 - \sigma\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 - Pr\sigma\right) W' = -(Ra)a^2 W'$$

$$\text{レイリー数: } Ra = \frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu} d^4$$

$$\text{プラントル数: } Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

## 5. 臨界モードの構造

臨界状態での場を  $x - z$  平面において可視化する

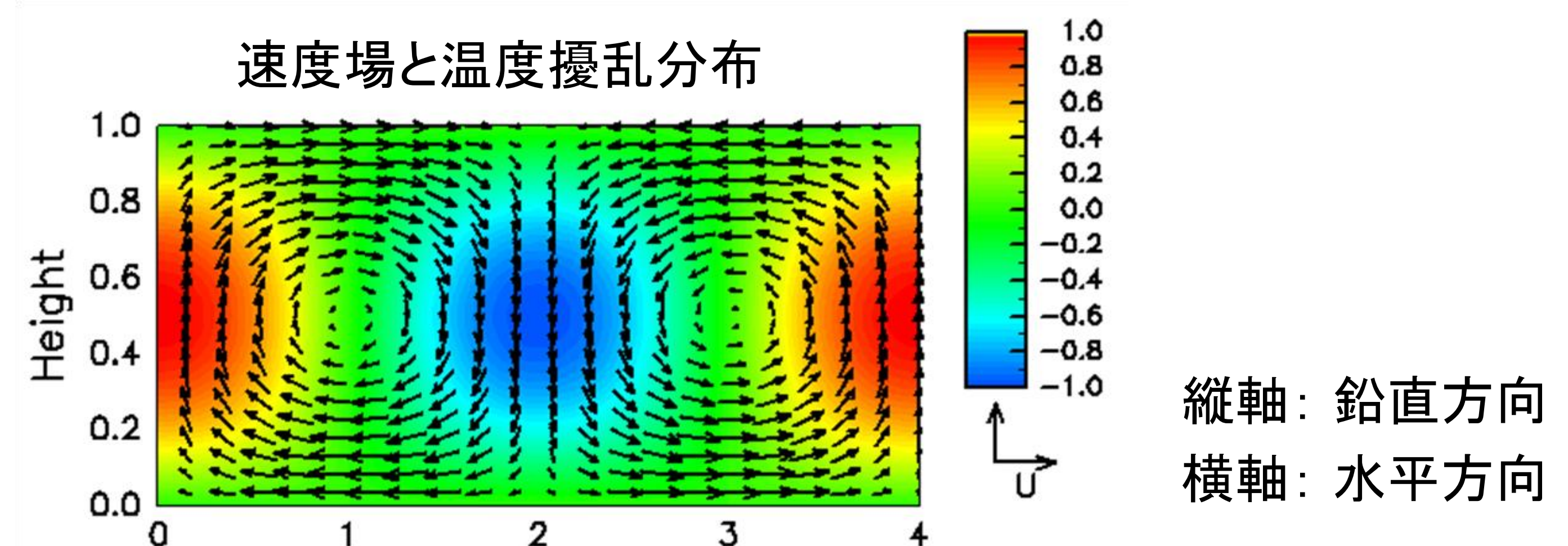
境界条件から,  $W' = A \sin n\pi z, T' = B \sin n\pi z, Z' = C \cos n\pi z$  ( $A, B, C$  は定数)

簡単のために,  $A = B = C = 1, T_b = 0$  とすると,

$$\begin{aligned} x \text{ 方向の速度: } u' &= \frac{i}{a^2} (a_x n\pi + a_y) \cos n\pi z \exp(i a_x x) \\ \text{鉛直速度: } w' &= \sin n\pi z \exp(i a_x x) \\ \text{温度擾乱: } T' &= \sin n\pi z \exp(i a_x x) \end{aligned}$$

$n = 1$  について整理して、実部をとる

$$\begin{aligned} x \text{ 方向の速度: } u' &= \frac{-1}{a^2} (a_x \pi + a_y) \cos \pi z \sin a_x x \\ \text{鉛直速度: } w' &= \sin \pi z \cos a_x x \\ \text{温度擾乱: } T' &= \sin \pi z \cos(a_x x) \end{aligned}$$



熱対流について,  $\overline{w'T'^x} = \frac{1}{2} \sin^2 \pi z > 0$  より、温度擾乱が大きいところで上昇流が生じ、温度擾乱小さいところで下降流が生じ、熱が輸送されていることが確かめられた。

## 6. まとめ

- 対流発現の臨界条件の導出を行い、ベナール対流の臨界レイリー数は、657.5 であることが確かめられた。
- 臨界状態において、温度の高いところから低いところへ熱輸送が行われていることが確かめられた。

### 参考文献

- 浅井富雄著, 1983: 大気対流の科学, 東京堂出版, pp. 220
- Chandrasekhar, S. 1961: Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability, Dover, pp.1 - 27, pp.34 - 36
- 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻編, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, pp. 323
- 竹村和人, 2008: 2次元ベナール・レイリー型対流の数値シミュレーション, 神戸大学卒業論文

謝辞  
臨界モードの構造の可視化には、地球流体電脳倶楽部によって開発された DCL ライブラリを用いた。ここに開発者の方々に感謝する。