

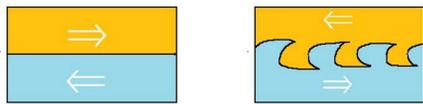
Kelvin-Helmholtz 不安定の数値シミュレーション

佐藤 緩奈

地球および惑星大気科学研究室

1. はじめに

- Kelvin-Helmholtz 不安定とは、速度の異なる流体の境界面で生じる不安定であり、境界では渦巻状の流れが生じる。(下図参照)



- Kelvin-Helmholtz 不安定により生じた波は、航空機の遭遇時に著しい影響を与える晴天乱気流の原因となる。
- 平行シア一流の定式化と線形安定性解析を行い、Kelvin-Helmholtz 不安定が起こる仕組みを調べる。
- 支配方程式の数値計算を行い、線形安定性解析と数値計算の結果の比較を行う。

2. 支配方程式

二次元 (x,y) 平面で考える。

- 非圧縮流体の渦度方程式

$$\frac{D\zeta}{Dt} = 0$$

- 非圧縮粘性流体の渦度方程式

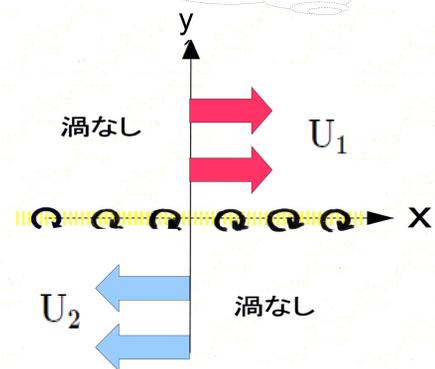
$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \Delta \zeta$$

記号の定義

ζ : 渦度

ν : 粘性係数

3. 平行シア一流の線形安定性解析



- 流体は非粘性とする。
- x 軸を境に異なる速度を持つシア一流について考える。
- 速度不連続面の x 軸上のみ渦度が存在するとし、渦層以外の領域を渦なしとする。
- 基本流は以下のように与える。

$$\begin{cases} U_1 = (U_1, 0) & (y > a), \\ U_2 = (U_2, 0) & (y < 0) \end{cases}$$

- 渦層に擾乱を与えて、擾乱が成長するか調べる。

線形安定性解析を行うことにより、以下の解が導ける。

$$\sigma = -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U|$$

2 つある解のうち、+ 符号で $\text{Re}[\sigma] > 0$ となり擾乱は指数関数的に成長し、不安定であることがわかった。

記号の定義

k : 波数

U : $U_1 - U_2$

σ : 擾乱の振幅関数の指数関数的成長率

4. 数値計算の設定

SPMODEL (竹広他, 2011) を用いて数値計算を行う。

- 基本流 $U = U_0 \tanh\{(y - y_c)/A_0\}$

- 初期条件 $\begin{cases} \psi = \varepsilon \exp[-\{(y - y_c)/A_0\}^2] \cos(2\pi kx) \\ \varepsilon = 10^{-6} \end{cases}$
 $k = 2, 4, 8$

- 渦度方程式 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + J(\psi, \omega) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{d^2 U}{dy^2} - \nu \Delta \zeta = 0$

渦度の時間発展はPCによるアニメーション参照

記号の定義

J : ヤコビアン U : 基本流の速度

ψ : 流れの関数

ε : 初期擾乱の速度振幅 k : 波数

A_0 : シア一層の幅 y_c : 領域の中央

5. 線形安定性解析と数値計算の比較

- 数値計算により得られたエンストロフィを $Z(t) = \int (\zeta(x, y, t))^2 dx dy$ とおく

$\zeta \sim e^{\sigma t}$ より、 $Z \sim e^{2\sigma t}$ となるため、エンストロフィの自然対数の時間発展のグラフ(図 1)では、直線部分の傾きは 2σ となる。

線形安定性解析により導いた擾乱の振幅関数の指数関数的成長率より得られる 2σ を赤線で表し比較する。

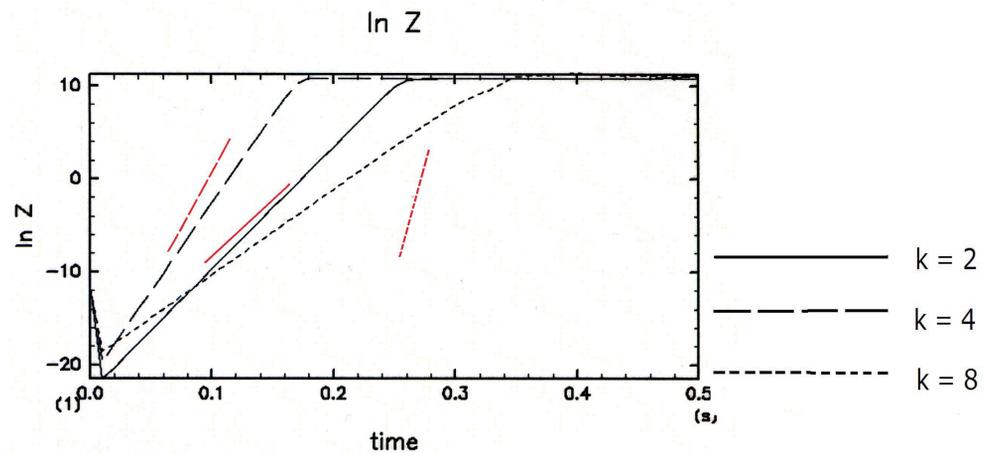


図 1: 波数 $k=2, 4, 8$ におけるエンストロフィの自然対数の時間発展。線形安定性解析での 2σ は赤線で表す。

図 1 において、 $k=2, 4$ では線形安定性解析と数値計算の結果がほぼ同じと言えるが、 $k=8$ では大きなずれがある。

- これは線形安定性解析での $U(y)$ と数値計算の $U(y)$ の形が異なっていたためではないかと予想を立て、新たに

$$(*) \begin{cases} U = U_1 = U_0 (\text{定数}) & (y > a), \\ U = U_2 = \frac{U_0}{a} y & (-a < y < a), \\ U = U_3 = U_0 (\text{定数}) & (y < -a), \end{cases}$$

という速度プロファイルを持つ基本流(図 2)の線形安定性を考える。

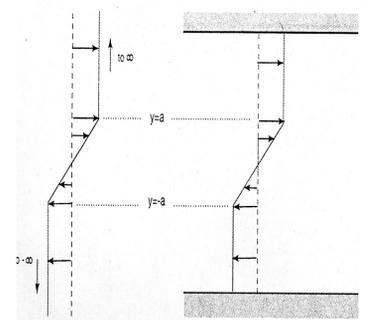


図 2: (*) で与えられる基本流の分布

この場合での 2σ の波数による変化を図 3 に示し、図 4 に数値計算での $k=2, 4, 5, 6, 8, 10$ におけるエンストロフィの自然対数の時間発展を示す。

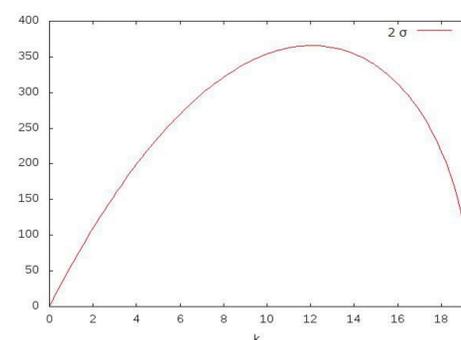


図 3: (*) で与えられる基本流での 2σ の波数による変化

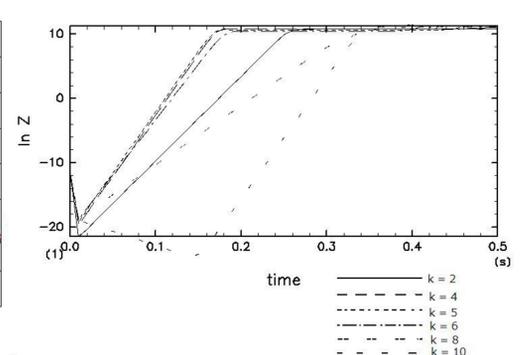


図 4: エンストロフィの時間発展 ($k=2, 4, 5, 6, 8, 10$)

図 3 より 2σ は $k=8$ では増加にあり、 $k=12$ のとき最大となっている。

一方、図 4 より、数値計算では成長率は $k=5$ までは増加し、 $k=5$ で最大となり、それ以上の波数だと順に減少している。

◇線形安定性解析と数値計算の比較により、数値計算と線形安定性解析の成長率は、波数が小さい場合のみほぼ合致することがわかった。

◇この結果は、線形安定性解析では近似的に基本流が数値計算の場合と同じとしたが、厳密には違うために生じたと思われる。

6. 参考文献

- Vallis, G. K., 2006: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, Cambridge University Press,
- 竹広, 他 2011: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), <http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>, 地球流体電脳倶楽部。