

内部重力波の伝播特性に関する考察

村上美雪

神戸大学理学部地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

平成27年3月20日

要旨

本研究では田中浩 (1975) に沿って内部重力波の伝播特性についての考察を行う。まず慣性系上の非粘性流体の基礎方程式を線形化し音波と内部重力波を含む線形波動の導出と分類を行った。次に Boussinesq 近似を用いたモデルで、基本場が静止している場合、平均流が存在する場合、平均シアが存在する場合の内部重力波の伝播特性を議論した。

目次

第1章 序論	3
第2章 流体中の線形波動の性質と分類	4
2.1 基礎方程式	4
2.2 波動解の分類	7
第3章 内部重力波の反射と透過	14
3.1 Boussinesq 近似	14
3.2 平均流が存在しない場合	16
(i) 二層モデル	16
(ii) 三層モデル	17
(iii) Wave guide channel (導波管)	19
3.3 平均流が存在する場合	20
3.4 平均シアーの存在を考慮する場合	20
(i) Layer 1, Layer 3 における Brunt-Väisälä 振動数の変化による効果	22
(ii) 平均シアーの変化による効果	24

第4章 内部重力波のエネルギー論	27
第5章 まとめ	29
付録A 2章の式の導出	31
A.1 (2.18)の導出	31
A.2 (2.22), (2.23)の導出	32
付録B 3章の式の導出	34
B.1 (3.13)の導出	34
B.2 (3.15)の導出	34
B.3 (3.16)の導出	35
B.4 (3.17)の導出	36
B.5 (3.20)の導出	37
B.6 (3.22), (3.23)の導出	38
付録C Richardson数について	39
付録D 内部重力波の運動論	41
付録E ニュートン法のプログラム	43

第1章 序論

重力波とは密度成層した流体内で発生する浮力を復元力とする波であり, 内部重力波はその中でも流体内部を伝播する波のことをいう. 現実の大気は重力波で満ちており, 大気に重要な影響を与えている.

この内部重力波の代表例である山岳波は大気層が導波管の役割を果たして遠くまで伝播することがあり, 雲の成因となったり降雨帯を伝播したりする場合がある. 条件によってはフェーン現象やボラ現象, 局地的な強風災害といったものを引き起こす場合もある (小倉 1997). また, 内部重力波の重要な性質として鉛直方向へ運動量を輸送していることがあげられる. 中間圏界面付近の弱風層は地表付近で発生した内部重力波が砕波してブレーキの作用を成しているために発生しているとされる (松野, 島崎 1981). このような興味深い現象に関わる内部重力波について理解を深めることは地球大気の現象を理解する助けとなるだろう.

そこで本研究では気象研究ノート (1975) の田中浩 著, 『内部重力波の理論』に沿って, 慣性系上の非粘性流体の基礎方程式から内部重力波を導出し, その伝播特性についての考察を行った. 本研究の構成は次の通りである. 2章では基礎方程式系から音波と内部重力波を含む大気波動の分散関係を導出する. 3章では Boussinesq 近似を行って音波を除去し, 内部重力波の性質を議論する. まず基本場が静止している場合を仮定し, 反射や透過の性質について考察する. 次に平均流が存在する場合と平均シアが存在する場合を仮定し基本場の違いによる伝播特性の変化について議論する. 4章では内部重力波が運ぶエネルギーについて簡単に論じる. 5章はまとめである.

第2章 流体中の線形波動の性質と分類

慣性系上の非粘性を仮定した流体力学の基礎方程式から, 流体中に存在する波動の支配方程式を導出し, 方程式中に含まれる波動の性質について議論する.

2.1 基礎方程式

まず運動方程式は重力場中の Euler 方程式

$$\tilde{\rho} \frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{Dt} = \nabla \tilde{p} + \tilde{\rho} \mathbf{g} \quad (2.1)$$

である. 連続の式は

$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} + \tilde{\rho} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.2)$$

である. 運動は断熱的であると仮定すれば, エントロピーは保存されなければならないので

$$\frac{D\tilde{\eta}}{Dt} = 0 \quad (2.3)$$

と書ける. また流体の状態方程式は

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} R \tilde{T} \quad (2.4)$$

である. 記号は以下の通りに定義した:

- \mathbf{u} : 速度ベクトル,
- ρ : 密度,
- p : 圧力,
- η : エントロピー,
- \mathbf{g} : 重力ベクトル,
- T : 温度.

(2.1) から (2.4) の方程式系は, 流体の全体量 (~つきの量) の運動を表している. この全体量を基本場の量 (添字 0 の量) と変動量 (添字なしの量) に分け, 上記の方程式系を線形化していく.

いま簡単のため, 運動が xz 平面内で二次元的に起こると仮定する. 速度の基本場が $u_0 = w_0 = 0$ であるとする (2.1) から変動量に関する運動方程式,

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + g\rho = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.6)$$

が導かれる. また z 方向の基本場について, (2.1) から静水圧平衡の式

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g. \quad (2.7)$$

が得られる. 次に連続の式 (2.2) より密度変化に対して

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.8)$$

またエントロピー保存の式 (2.3) から同様に

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + w \frac{d\eta_0}{dz} = 0. \quad (2.9)$$

次にこれらの方程式から従属変数を消去し, 従属変数が一つの方程式を導く. まず熱力学変数を消去していく. いま \tilde{p} が $\tilde{\rho}$ と $\tilde{\eta}$ の関数であるとする

$$d\tilde{p} = \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}} \right)_{\tilde{\eta}} d\tilde{\rho} + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\eta}} \right)_{\tilde{\rho}} d\tilde{\eta} \quad (2.10)$$

となる. いま断熱大気中の音速は

$$C_0^2 = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right)_{\eta_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \gamma R T_0 \quad (2.11)$$

で定義されることを考えると (2.7) は (2.10) と (2.11) を使って

$$\frac{dp_0}{dz} = C_0^2 \frac{d\rho_0}{dz} + \left(\frac{\partial p_0}{\partial \eta_0} \right)_{\rho_0} \frac{d\eta_0}{dz} = -g\rho_0 \quad (2.12)$$

と書ける. また変動量に関しては

$$p = C_0^2 \rho + \left(\frac{\partial p_0}{\partial \eta_0} \right)_{\rho_0} \eta$$

と書ける. この式の両辺に $\partial/\partial t$ を作用させると

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial p_0}{\partial \eta_0} \right)_{p_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.13)$$

となる. (2.9) および (2.12) を使って (2.13) は

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \left(g\rho_0 + C_0^2 \frac{d\rho_0}{dz} \right)$$

と書き換えられる. さらに連続の式 (2.8) を使って ρ を消去すると

$$\frac{\partial p}{\partial t} = wg\rho_0 - \rho_0 C_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.14)$$

のように書くことができる. 運動方程式 (2.5), (2.6) に $\partial/\partial t$ を作用させ, (2.14) を使って p を消去すると

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= -g\rho_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 C_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -g \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= g\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_0 C_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

この2つの式が基本的な運動方程式となる.

いま速度場が水平方向には正弦波的で, さらに ω という振動数で振動していると仮定すると

$$u(x, z, t) = \hat{u}(z, k) e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.17a)$$

$$w(x, z, t) = \hat{w}(z, k) e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.17b)$$

と書くことができる. これらを式 (2.15), (2.16) に代入して, $\hat{w}(z, k)$ に関してまとめると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(\ln \frac{\rho_0}{\omega^2 / C_0^2 - k^2} \right) \frac{d\hat{w}}{dz} \\ + \left[\frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 - \frac{k^2}{\omega^2} g \frac{d}{dz} \left(\ln \frac{\rho_0}{\omega^2 / C_0^2 - k^2} \right) - \frac{k^2 g^2}{\omega^2 C_0^2} \right] \hat{w} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

いま C_0 が z に対して独立ならば (2.18) はもっと簡単に書ける:

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \frac{d \ln \rho_0}{dz} \frac{d \hat{w}}{dz} + \left(\frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 + \frac{k^2 N^2}{\omega^2} \right) \hat{w} = 0. \quad (2.19)$$

ただし N は Brunt-Väisälä 振動数で

$$N^2 \equiv -g \frac{d \ln \rho_0}{dz} - \frac{g^2}{C_0^2} \quad (2.20)$$

と定義される. この Brunt-Väisälä 振動数は平衡状態からの鉛直方向の変位 Z と

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + N^2 Z = 0$$

によって関連付けられている. $N^2 > 0$ ならば調和振動が起こる. これが重力波である. $N^2 < 0$ の場合は対流不安定の状態に対応する. 常微分方程式 (2.19) は平均シアーをもたない重力場中の圧縮性流体の波の振舞を線形理論の範囲内で調べるための基本方程式である.

2.2 波動解の分類

方程式 (2.19) を使って音波や重力波の振舞と性質を調べる. 通常使用される \hat{w} の規格化は

$$\hat{w} = \rho_0^{-\frac{1}{2}} h \quad (2.21)$$

である. これは現実の大気の密度が上空ほど小さくなっていることに対する規格化を意味している. 式 (2.21) を (2.19) に代入すると

$$\frac{d^2 h}{dz^2} + n^2 h = 0 \quad (2.22)$$

と簡単な形に書ける. ただし n^2 は

$$n^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 + \frac{k^2 N^2}{\omega^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{d \ln \rho_0}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln \rho_0}{dz^2} \quad (2.23)$$

となり, これは鉛直方向の波数を表している. (2.22) のような形の常微分方程式の n^2 が正ならば波動解を, 負ならば指数関数の解をもつので, 現象を一見して理解でき便利である. いま等温大気を仮定し, $z = 0$ での密度を ρ_{00} とすると平均密度は

$$\rho_0 = \rho_{00} e^{-z/H} = \rho_{00} e^{-2\Gamma z} \quad (2.24)$$

となる. H は密度が $1/e$ となる大気層の厚さの目安であり, scale height と呼ばれ

$$H = \frac{RT_0}{g} = \frac{C_0^2}{\gamma g} \quad (2.25)$$

と表される. また Γ は

$$\Gamma = \frac{1}{2H} = \frac{\gamma g}{2C_0^2}. \quad (2.26)$$

密度が (2.24) となっているので, (2.23) は

$$n^2 \equiv \frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 + \frac{k^2 N^2}{\omega^2} - \Gamma^2 \quad (2.27)$$

と簡略化される^{*1}. (2.27) にどのような素過程が含まれているかを検討するため, 単純化した状況設定を行って得られる波動の性質について検討する. 単純化する条件は以下の表のとおり仮定した.

表 2.1: 各条件と (i)-(v) との対応

	非圧縮 ($C_0 = \infty$)	圧縮あり ($C_0 \neq \infty$)
均質 ($\Gamma = 0$)	(i)($g = 0$)	(ii)($g = 0$)
成層 ($\Gamma \neq 0$)	(iv)($g \neq 0$)	(iii)($g = 0$), (v)($g \neq 0$)

(i) 非圧縮, 均質, 重力なし ($C_0 = \infty$, $\Gamma = 0$, $g = 0$)

この場合 (2.27) は

$$n^2 = -k^2$$

となり, したがって (2.22) は

$$h \sim e^{\pm n z}$$

のような外部波動的な解を持つ. すなわち鉛直方向には伝播しない. 現象的には水面の波などを表す.

^{*1}(2.27) を導出する. (2.23) の第四項について H と Γ の定義から

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{d \ln \rho_0}{dz} \right)^2 = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{d}{dz} (\ln \rho_{00} + \ln e^{-z/H}) \right\}^2 = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{H} \right)^2 = -\Gamma^2.$$

また $d \ln \rho_0 / dz = -1/H$ より第五項はゼロとなる. これらより (2.27) が導出できる.

(ii) 圧縮, 均質, 重力なし ($C_0 \neq \infty, \Gamma = 0, g = 0$)

このとき

$$n^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2, \quad \text{又は} \quad \omega^2 = C_0^2(n^2 + k^2)$$

となり, これは音波を表す. これを書き換えると

$$\frac{\omega^2}{n^2 + k^2} \equiv \frac{\omega^2}{S^2} = C_0^2$$

となるので, この波動 (音波) は非分散性で等方的に伝播する.

(iii) 圧縮, 成層, 重力なし ($C_0 \neq \infty, \Gamma \neq 0, g = 0$)

$$k^2 + n^2 + \Gamma^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} \quad (2.28)$$

または

$$\omega^2 = C_0^2(n^2 + k^2 + \Gamma^2)$$

となり, k と n が (2.28) に同等に入っているので等方的に伝播する. $k^2 + n^2 = 0$ となるのは $\omega = \omega_c \equiv \Gamma C_0$ の時で, この ω_c を音波の臨界振動数と呼ぶ. $\omega < \omega_c$ のときは $k^2 + n^2 < 0$ となり減衰してしまうので, この振動数以下の低周波の音波は遮断されてしまう. 例として, $C_0 = 3.3 \times 10^2$ m/sec, $H = 8 \times 10^3$ m とすると, $\omega_c = 2 \times 10^{-2}$ sec $^{-1}$, すなわち周期に直すと約 5 min となる. よって 5 min より長い周期の音波は伝播できない. ここでの音波は (ii) で述べた普通の意味でつかわれる音波とは多少異なり, 大気の成層のために変化させられた音波である. このような音波は, たとえば地上から数キロメートルの高度までは無視できるほど小さい. すなわち scale height (H) に対応する高度の規模で意味を持つてくるので, やはり成層圏以上の高度でその役割が大きくなる. 位相速度 C と群速度 C_g は

$$C = \frac{\omega}{k} = C_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{C_0^2 n^2}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow C_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (n^2 \rightarrow 0)$$

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{C_0^2 n^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow C_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (n^2 \rightarrow 0)$$

となる. ω_c^2/ω^2 が 1 と比べて十分小さければ C も C_g も $n^2 \rightarrow 0$ でともに C_0 となり, 通常の意味で使われる音波と一致する. 逆に ω_c^2/ω^2 が 1 に近づくと $C \rightarrow \infty$, $C_g \rightarrow 0$ となる. 群速度は波動によるエネルギー輸送と関係するので, 後者の場合はエネルギー

ギーは輸送されなくなる. いま $\omega - k$ 平面上で (2.28) を図示すると図 2.1 のようになる. 網掛部が $n^2 > 0$ に対応する.

なお, 本来は重力無しに成層することはできないので, この仮定が現実中存在することはない. しかし成層による音波の性質の変化を検討するため便宜上この仮定を議論した.

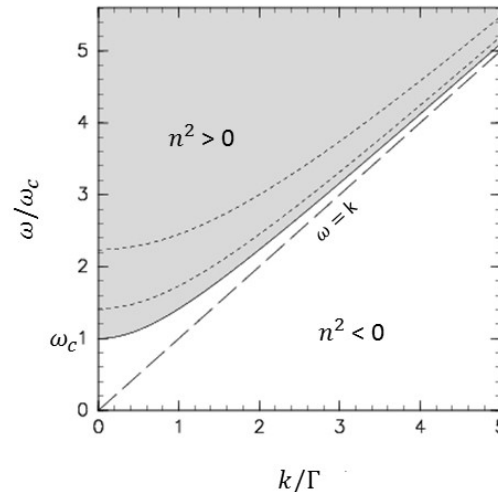


図 2.1: 成層流体中の音波の分散関係. 縦軸を ω/ω_c , 横軸を k/Γ として無次元化を行っている. グラフの数値計算にはニュートン法 (付録 E) を用いた.

(iv) 非圧縮, 成層, 重力あり ($C_0 = \infty, \Gamma \neq 0, g \neq 0$)

$$n^2 = k^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) - \Gamma^2, \quad (2.29)$$

あるいは書き換えて

$$\omega = \pm \frac{kN}{(k^2 + n^2 + \Gamma^2)^{1/2}} \quad (2.29')$$

となる. $n^2 > 0$ となるためには $N^2 > \omega^2$ であることが必要である. すなわち Brunt-Väisälä 振動数より小さな振動数で存在する波動である. これを内部重力波と呼ぶ. あまり鉛直規模の大きくない内部重力波では Γ は省略することができ, これは次章で見る Boussinesq 近似に対応する. $\omega - k$ 平面上では (2.29) は図 2.2 のようになる.

ここでは Brunt-Väisälä 振動数を N^2/ω_c^2 として無次元化しており, その値は

$$\begin{aligned}\frac{N^2}{\omega_c^2} &= \frac{N^2}{(C_0\Gamma)^2} \\ &= \frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} = \frac{40}{49}\end{aligned}$$

である. ここで Brunt-Väisälä 振動数の定義 (2.20), 平均密度 (2.24), Γ の定義 (2.26) を用いた. また断熱比熱は二原子分子の理想気体を仮定して $\gamma = 7/5$ としてある. 網掛部は $n^2 > 0$ の領域を表す. この図から位相速度, 群速度とも $\omega = 0$ で最大になり, $\omega \rightarrow N$ で 0 になることがわかる.

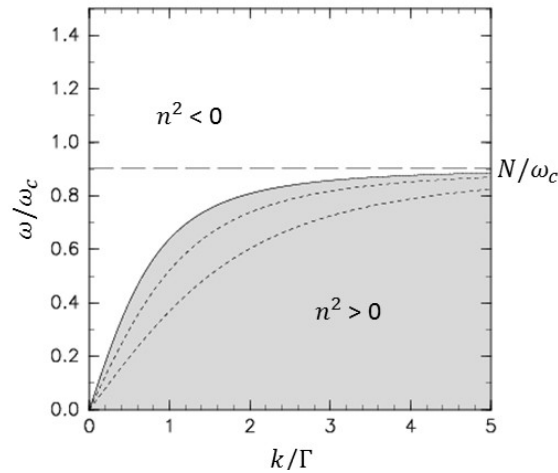


図 2.2: 成層している非圧縮性流体中の内部重力波の分散関係. Brunt-Väisälä 振動数を N/ω_c として無次元化している. その他は図 2.1 と同様である.

(v) 圧縮性, 成層, 重力あり ($C_0 \neq 0, \Gamma \neq 0, g \neq 0$)

最も一般的な場合で (2.27) はこれ以上簡単にならない. これは内部重力波と音波を共通に含んでおり, acoustic gravity wave と呼ばれている. いま

$$\omega_i \equiv kN(k^2 + n^2 + \Gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

$$\omega_a \equiv C_0(k^2 + n^2 + \Gamma^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

と定義する. ω_i は (iv) で使った内部重力波の振動数, ω_a は (iii) で使った音波の振動数とする. このような ω_i, ω_a を使って 2.27 を書き換えると

$$\omega^4 - \omega_a^2\omega^2 + \omega_a^2\omega_i^2 = 0 \quad (2.32)$$

のような4次方程式を得る. この方程式の4個の根のうち2個は内部重力波に類似しており, 他の2個は音波に類似している. すなわち

$$\omega^2 = \omega_a^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 + \dots \right] \quad (\text{音波に類似})$$

$$\omega^2 = \omega_i^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 + \dots \right] \quad (\text{内部重力波に類似})$$

のように分離して書ける^{*2}. $\omega - k$ 平面上では図2.3のような分散関係のダイヤグラムが得られる. 網掛けを施した部分は $n^2 > 0$ で伝播領域を, その他の部分は $n^2 < 0$ で遮蔽領域を表す. しかし遮蔽領域中にも Lamb 波と呼ばれる成層と平行に (水平に) 伝播する音波の一種が存在する. この波動が持つ鉛直方向の成分は重力場における浮力から生じるものであるが, 非常に小さい. そのため一見境界波のようにふるまう.

^{*2} ω^2 を導出する. (2.32) を ω^2 について二次方程式の解の公式を用いて解くと

$$\omega^2 = \frac{\omega_a^2}{2} \left[1 \pm \left\{ 1 - 4 \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right].$$

ここで $\{\}$ を $x = 0$ のまわりで展開すると

$$\left\{ 1 - 4 \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 - 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^4 + \dots$$

なので

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_a^2}{2} \left[1 + \left\{ 1 - 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 - 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^4 + \dots \right\} \right] = \omega_a^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 + \dots \right] \\ \omega^2 &= \frac{\omega_a^2}{2} \left[1 - \left\{ 1 - 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 - 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^4 + \dots \right\} \right] = \omega_i^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_i}{\omega_a} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

となる.

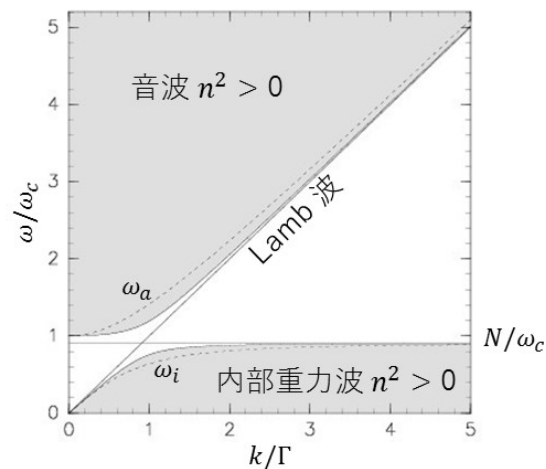


図 2.3: 重力場の中における成層した圧縮性流体中の解の領域. 図 2.2 と同様の無次元化を行っている.

以下の表にこの節の結果をまとめる. 今まで調べてきた種々の場合のうち, 内部重力波が占める部分は一部に過ぎない. 一方, 音波がかなり大きな比重を占めている. この種の音波はかなり広範囲な振動数を持ち, 低周波の波は人間の耳には直接感知することのできない圧力波で, infrasonic wave と呼ばれる. しかしこの種の音波は対流圏ではそれほど重要性を持たない.

表 2.2: 各条件下で得られる波動の種類

	非圧縮 ($C_0 = \infty$)	圧縮あり ($C_0 \neq \infty$)
均質 ($\Gamma = 0$)	(i) 外部波	(ii) 音波
成層 ($\Gamma \neq 0$)	(iv) 重力波	(iii) 成層によって変形した音波 (v) acoustic gravity wave

第3章 内部重力波の反射と透過

2章で導出した内部重力波の反射と透過の性質について議論する. この章からは Boussinesq 近似を仮定し, 平均流が存在しない場合, 平均流が存在する場合, 平均シアが存在する場合に分けて考察する.

3.1 Boussinesq 近似

ここからは Boussinesq 近似を使ったモデルで内部重力波の性質を議論していく. 非圧縮性 $D\bar{\rho}/Dt = 0$ を仮定すると, (2.8) は二つの式に分けることができ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

となる. さらに z 方向の運動方程式 (2.6) に対して次のような近似を行う:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z \rho_0} + \frac{p}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} - \frac{\rho}{\rho_0} g \\ &\simeq -\frac{\partial p}{\partial z \rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} g. \end{aligned} \quad (3.3)$$

このような近似は, 対流圏のような波動の鉛直波長が基本場の密度の鉛直変化よりも短い場合に妥当な近似である.

以上から、この近似を用いた支配方程式をまとめると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x \rho_0}, \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z \rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} g, \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad (3.4c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4d)$$

である。2.1 節と同様に 4 つの変数の解を

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ p/\rho_0 \\ \rho/\rho_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(z, k) \\ \hat{w}(z, k) \\ \hat{p}(z, k) \\ \hat{\rho}(z, k) \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.5)$$

と仮定し、(3.4) に代入すると以下を得る:

$$\hat{p} = \frac{\omega}{k} \hat{u}, \quad (3.6a)$$

$$i\omega \hat{w} = \frac{d\hat{p}}{dz} + \hat{\rho} g, \quad (3.6b)$$

$$\hat{\rho} = \frac{i\hat{w}}{\rho_0 \omega} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (3.6c)$$

$$\hat{u} = \frac{i}{k} \frac{d\hat{w}}{dz}. \quad (3.6d)$$

(3.6a), (3.6c), (3.6d) を用いて (3.6b) を \hat{w} の式に書き換えると

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + k^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \hat{w} = 0 \quad (3.7)$$

となる。ここで N は非圧縮 ($C_0 = \infty$) での Brunt-Väisälä 振動数で、

$$N^2 = -g \frac{d \ln \rho_0}{dz}$$

である。 \hat{w} の係数を n^2 とすると

$$n^2 = k^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right). \quad (3.8)$$

これらが Boussinesq 近似での基本的な \hat{w} の式と分散関係である。この形はちょうど (2.19) の第二項で ρ_0 を定数として扱い、非圧縮 ($C_0 = \infty$) を仮定した形である。また 2.2 節 (iv) で導いた (2.29) の Γ を無視した形と一致している。

3.2 平均流が存在しない場合

前節の分散関係を用いて, 平均流が存在しない場合の内部重力波の反射と透過について考える. 現実に反射, 透過が起こるのは鉛直方向の密度変化によって Brunt-Väisälä 振動数が変化する場所においてである. 一般的には連続的な変化でも構わないが, ここでは簡単化して Brunt-Väisälä 振動数が層別に変化している場合について述べる.

(i) 二層モデル

大気層全体を二層に分けた下層を Layer 1, 上層を Layer 2 とし, Layer 1 と Layer 2 の境界を $z = 0$ とする. この境界層で Brunt-Väisälä 振動数が層別に変化すると仮定する. いま (3.8) における n^2 を $\lambda^2 (\lambda > 0)$ と書き,

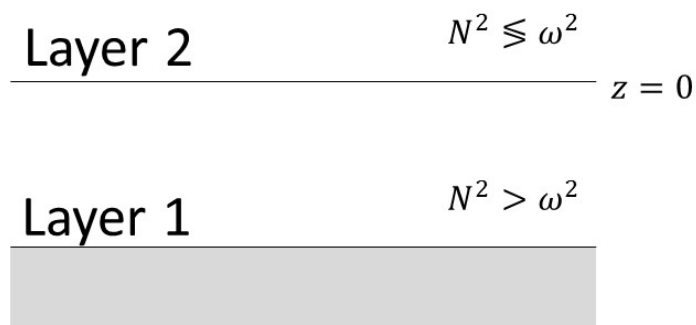


図 3.1: 二層モデルの模式図

$$\lambda^2 = k^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (3.9)$$

であらわす. Layer 1 では内部波型 ($\lambda^2 > 0$) を仮定すると, 方程式 (2.22) の解は

$$h_1 = A_1 e^{i\lambda_1 z} + B_1 e^{-i\lambda_1 z}, \quad (3.10)$$

ただし λ_1 は Layer 1 での (3.9) の根である. ここで A_1 は入射波の振幅, B_1 は反射波の振幅とする. Layer 2 では $\lambda \leq 0$ に従って, それぞれ内部波型か外部波型かに分かれる.

まず内部波型を考えると,

$$h_2 = A_2 e^{i\lambda_2 z}, \quad (3.11)$$

ただし λ_2 は Layer 2 での (3.9) の根である. Layer 2 では上方に波動源を仮定しない限り, 上方から下方に伝播する波は存在しないので (3.11) のような形をとる. Layer 1 と Layer 2 の境界で

$$h_1 = h_2, \quad (3.12a)$$

$$\frac{dh_1}{dz} = \frac{dh_2}{dz} \quad (3.12b)$$

の境界条件を付けると, 反射係数は

$$r = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \quad (3.13)$$

となる. $\lambda_1 = \lambda_2$, すなわち Layer 1 と Layer 2 の Brunt-Väisälä 振動数が同じならば反射は起こらない. また λ_1 が λ_2 のどちらかひとつでも 0 となれば $r = 1$ となって全反射が起こる. その他の場合は部分反射である.

次に Layer 2 で外部波型の場合を考える. その場合の Layer 2 の解は

$$h_2 = A_2 e^{-\delta_2 z} \quad (3.14)$$

となる. ここで δ^2 は

$$\delta^2 \equiv -\lambda^2 = k^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right), \quad \delta > 0$$

の Layer 2 の根である. よって反射係数は

$$r = \left| \frac{\lambda_1 - i\delta_2}{\lambda_1 + i\delta_2} \right|^2 = 1 \quad (3.15)$$

となり常に全反射を起こす.

(ii) 三層モデル

下から Layer 1, Layer 2, Layer 3 と名付けられる三層を考え, Layer 1 と Layer 2 の境界を $z = 0$, Layer 2 と Layer 3 の境界を $z = h$ とする. Layer 1, Layer 3 では内部波型を, Layer 2 では内部波型と外部波型の両方を考える. それぞれの層での解は

$$\begin{aligned} h_1 &= A_2 e^{i\lambda_1 z} + B_2 e^{-i\lambda_1 z} && \text{Layer 1} \\ h_2 &= A_2 e^{i\lambda_2 z} + B_2 e^{-i\lambda_2 z} && \left. \begin{array}{l} \text{(内部波型)} \\ \text{(外部波型)} \end{array} \right\} \text{Layer 2} \\ h_2 &= A_2 e^{\delta_2 z} + B_2 e^{-\delta_2 z} && \\ h_3 &= A_3 e^{i\lambda_3 z}. && \text{Layer 3} \end{aligned}$$

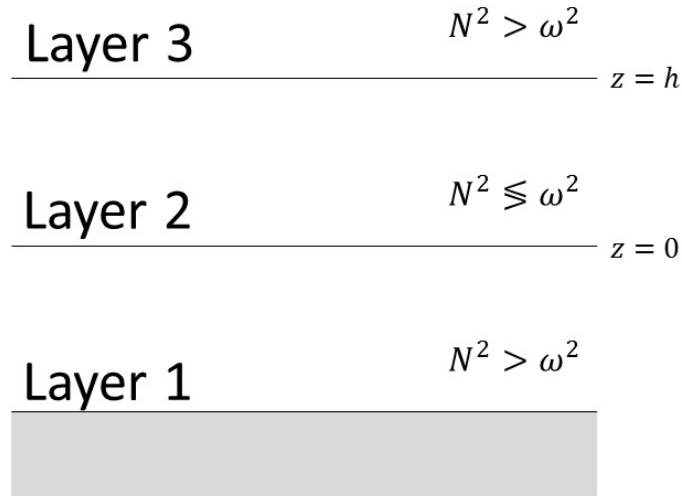


図 3.2: 三層モデルの模式図

ふたつの境界面で境界条件 (3.12a), (3.12b) を使うと, Layer 2 で内部波型の場合は

$$r = \frac{\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \sin^2 \lambda_2 h}{\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_3)^2 - (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \sin^2 \lambda_2 h}, \quad (3.16)$$

Layer 2 で外部波型の場合は

$$r = \frac{\delta_2^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\delta_2^2 + \lambda_1^2)(\lambda_3^2 + \delta_2^2) \sinh^2 \delta_2 h}{\delta_2^2(\lambda_1 + \lambda_3)^2 + (\delta_2^2 + \lambda_1^2)(\lambda_3^2 + \delta_2^2) \sinh^2 \delta_2 h} \quad (3.17)$$

となる. いま Layer 1 と Layer 3 で $\lambda_1 = \lambda_3$ と仮定すると (3.16) は簡単になって

$$r = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \sin^2 \lambda_2 h}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \sin^2 \lambda_2 h}, \quad (3.18)$$

また透過係数 t は

$$t \equiv 1 - r = \frac{4\lambda_1^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \sin^2 \lambda_2 h} \quad (3.19)$$

と書ける. 透過係数の式 (3.19) で $t = 1$ となるのは次の二つの場合である.

(a) $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合

これは流体全体が層を形成していないということであるから $t = 1$ になるのは当然である.

(b) $\sin \lambda_2 h = 0$ の場合

これはいわゆる共鳴透過 (resonance transmission) と同じ現象で, Layer 2 の厚さ h と波の位相との関係で起こる現象である. しかし大気のような場合は鉛直波長に比べて h が十分大きくないので, この現象はほとんど起こらない. この 2 つの場合以

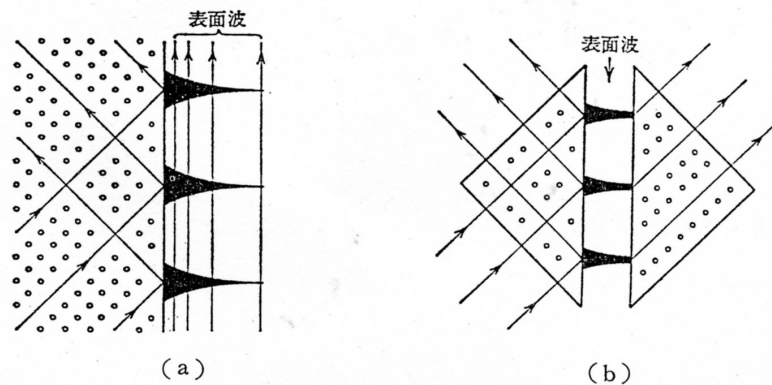


図 3.3: (a) 全反射におけるエネルギー流, (b) トンネル効果 (細野 1973)

外部分反射 (あるいは部分透過) となる. また図 3.3(a), (b) に模式的に示されるように, Layer 2 が外部波型の場合はその厚さが無限大でない限り多少なりとも Layer 3 まで透過する. この現象は電子の波動場がポテンシャルの障壁を通過する, いわゆる“トンネル効果”と同じものである^{*1}. 同じような現象は電磁気学でも光学でも頻繁に起こる.

(iii) Wave guide channel (導波管)

これまでは Layer 1 と Layer 3 では常に内部波型を仮定してきた. ここでは二層モデルで Layer 2 は外部波型を仮定し, Layer 1 の下端は地面であるとする. これは二層モデルを考えた (i) の (3.15) の場合である. Layer 2 で全反射した波はさらに地面でも反射して, Layer 1 は一種の導波管となって波をその内部に捕捉して遠方まで伝達可能にする. また三層モデルで, Layer 1 と Layer 3 が外部波型で Layer 2 だ

^{*1}トンネル効果とは古典力学的には通過できないポテンシャルの壁を粒子が通る現象をいう. たとえば α 放射能や電場をかけた金属からの電子放出などがトンネル効果の例である (Leighton)

けで内部波型であると仮定する:

$$\begin{aligned} h_1 &= A_2 e^{\delta_1 z} + B_2 e^{-\delta_1 z} && \text{Layer 1} \\ h_2 &= A_2 e^{i\lambda_1 z} + B_2 e^{-i\lambda_1 z} && \text{Layer 2} \\ h_3 &= A_3 e^{\delta_3 z}. && \text{Layer 3} \end{aligned}$$

(ii) と同様の境界条件を考えると, 反射係数は

$$\gamma = \left[\frac{(\delta_1 \delta_3 + \lambda_2^2) \cos \lambda_2 h + \lambda_2 (\delta_1 + \delta_3) \sin \lambda_2 h}{(\delta_1 \delta_3 + \lambda_2^2) \cos \lambda_2 h + \lambda_2 (\delta_1 - \delta_3) \sin \lambda_2 h} \right]^2 \quad (3.20)$$

で, 全反射は $\lambda_1 = \lambda_3$ または $\lambda_2 h = m\pi (m = 0, 1, 2, \dots)$ の場合に起こる. これらの場合を仮定すると Layer 2 はやはり導波管の役割をする.

3.3 平均流が存在する場合

これまでの考察では平均流の存在は全く無視してきたが, いまシアーを持たない一様な平均流 U が存在すると仮定する. その場合, (3.8) は

$$n^2 = k^2 \left(\frac{N^2}{(\omega - kU)^2} - 1 \right)$$

と書ける. つまり平均流 U によって波の振動数が Doppler Shift している. さらに $\omega = 0$ とすると

$$n^2 = l^2 - k^2$$

である. ここで l^2 は $l^2 = N^2/U^2$ でスコアラ一定数と呼ばれる. これを使って層モデルを考える場合, 別の層では異なってもよいが, U は各層で一様とする. そうすれば, この層を細かく分割することで平均シアーが存在する場合を近似的に表現することが可能である.

3.4 平均シアーの存在を考慮する場合

層別に平均シアーを分割できないような場合について考える. この問題を数値的に解いた Jones (1972) をもとに議論を進めていく.

計算には三層の非粘性, 非圧縮の Boussinesq 近似のモデルを用いる. Layer ごとの平均風速は図 3.4 に示したとおりである. x 方向の速度の基本場を $U(z)$ とし基礎

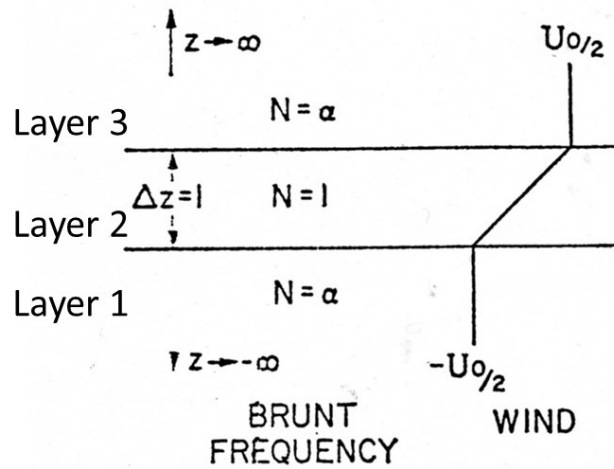


図 3.4: 平均シアが存在する場合の三層モデルの模式図 (Jones 1972 を加工したもの)

方程式を線形化すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho_0} \right), \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) - g \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (3.21b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0, \quad (3.21c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.21d)$$

いま変動量が (3.5) であると仮定し、鉛直方向の変位 Z を導入すると、(3.21) を使って

$$\frac{d\hat{Z}}{dz} = \frac{k^2}{(\omega - kU)^2} \hat{p} \quad (3.22)$$

$$\frac{d\hat{p}}{dz} = -[N^2 - (\omega - kU)^2] \hat{Z} \quad (3.23)$$

と書ける。ただし

$$N = 1, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$$

$$N = \alpha, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

ここで中間層の Brunt-Väisälä 振動数を 1, 中間層の厚さを 1 として無次元化を行っている。また Richardson 数は

$$Ri = U_0^{-2}$$

で与えられる^{*2}. ここではシア一流が安定である場合を考えるので Ri はすべて 0.25 よりも大きいとする. $z \rightarrow \infty$ で波は指数関数的に減少すると仮定している. ここでは U を定数として扱いこの問題を解析的に解き, Jones の計算結果と比較する.

(3.22) を U を z に対して定数であるとして (3.23) へ代入し, p/ρ_0 を消去すると

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 \left[\frac{N^2}{(\omega - kU)^2} - 1 \right] Z = 0. \quad (3.24)$$

この式の Z の係数を λ と置くと

$$\lambda^2 = k^2 \left[\frac{N^2}{(\omega - kU)^2} - 1 \right]. \quad (3.25)$$

この (3.25) を用いて計算結果との比較を行う.

(i) Layer 1, Layer 3 における

Brunt-Väisälä 振動数の変化による効果

図 3.5 は平均シアーがない場合 ($U_0 = 0$) の捕捉されるモードを示している. 平均シアーが存在しないので, Layer 2 での λ は

$$\lambda_2^2 = k^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - 1 \right) \quad (3.26)$$

となり, 通常の内部重力波と同じ伝播モードを示す.

図 3.5(a) の条件は $|z| > 1/2$ で $N = \alpha = 0$ である. この時 Layer 1, Layer 3 では

$$\omega^2 = \frac{k^2}{k^2 + \lambda_2^2} \quad (3.27)$$

となり, 外部波動的な解を持つことがわかる. よってこの場合は Layer 2 はすべてのモードに対して導波管の役割を果たす.

図 3.5(b,c) の条件は $|z| > 1/2$ で $N = \alpha$ である. この時 Layer 1, Layer 3 では

$$\lambda_1^2 = \lambda_3^2 = k^2 \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (3.28)$$

となる. この場合, $\omega > \alpha$ に対しては $\lambda_1^2 = \lambda_3^2 < 0$ となって Layer 2 は導波管の役割を果たす. しかし $\omega > \alpha$ に対しては $\lambda_1^2 = \lambda_3^2 > 0$ となって Layer 1 と Layer 3 で内部波動的な解を持つため, Layer 2 は導波管とならず遮断されてしまう (図の斜線部). この α が大きくなるほど低周波の波は遮断される傾向を持つことがわかる.

^{*2}Richardson 数はシア一流が安定であるか不安定であるかという指標である. 詳しくは付録 C を参照.

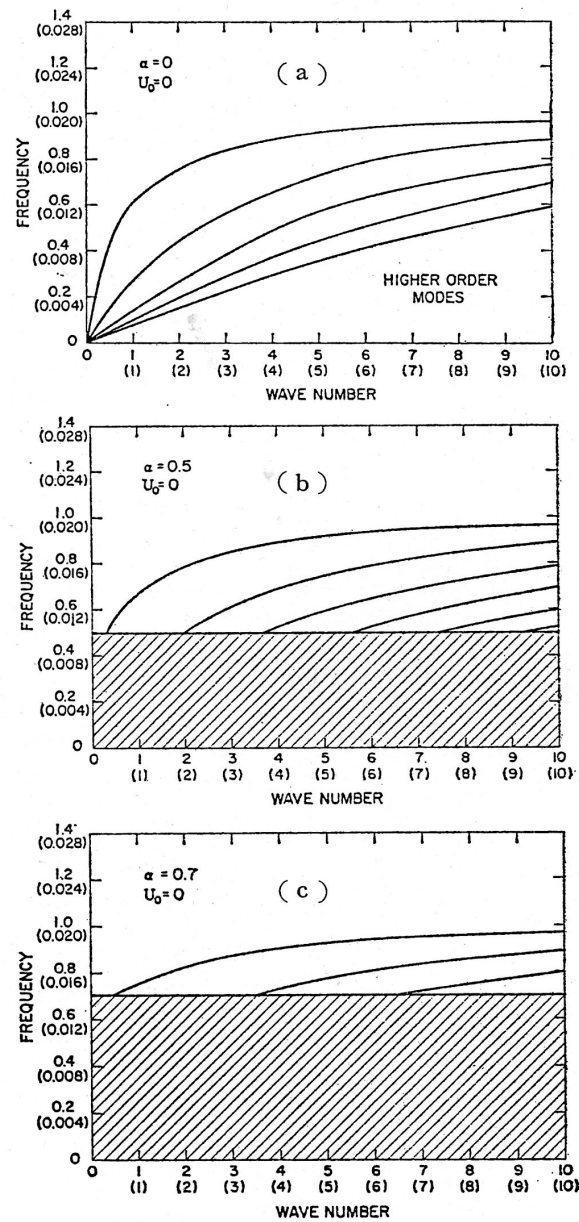


図 3.5: $U_0 = 0$ の場合の流体中のダクト伝播モード. 括弧の中の数字は有次元量:波数 (km^{-1}), 振動数 (sec^{-1}). また Layer 2 の厚さは 1 km, Brunt-Väisälä 振動数は 0.02 sec^{-1} としてある. (Jones 1972)

(ii) 平均シアーの変化による効果

図 3.6 は α が同じで, 平均シアーが存在する場合に捕捉されるモードを示している. Layer 2 では

$$\omega^2 = \frac{k^2}{k^2 + \lambda_2^2} + kU. \quad (3.29)$$

また Layer 1 と Layer 3 では

$$\lambda_1^2 = \lambda_3^2 = k^2 \left(\frac{\alpha^2}{(\omega - kU)^2} - 1 \right). \quad (3.30)$$

よって Layer 1, Layer 3 で外部波動的な解を持つ条件は,

$$\omega < \alpha + kU \quad (3.31)$$

である. (3.29), (3.31) と (i) 節とを比較すると, 伝播モード, 遮断領域ともに平均シアーの分だけ傾いていることがわかる. シアーが強くなるにつれて critical level が存在する可能性が強くなるため, ダクト伝播は抑制される^{*3}.

^{*3}critical level とは位相速度と平均場の風速が同じになる高度である. この場合, 今までの議論では $\omega - kU = 0$ となり, n または λ が無限大に発散してしまうため, critical level の問題を考えるには異なる条件を設定する必要がある. そのため今回はこれに関する議論は行わないことにする.

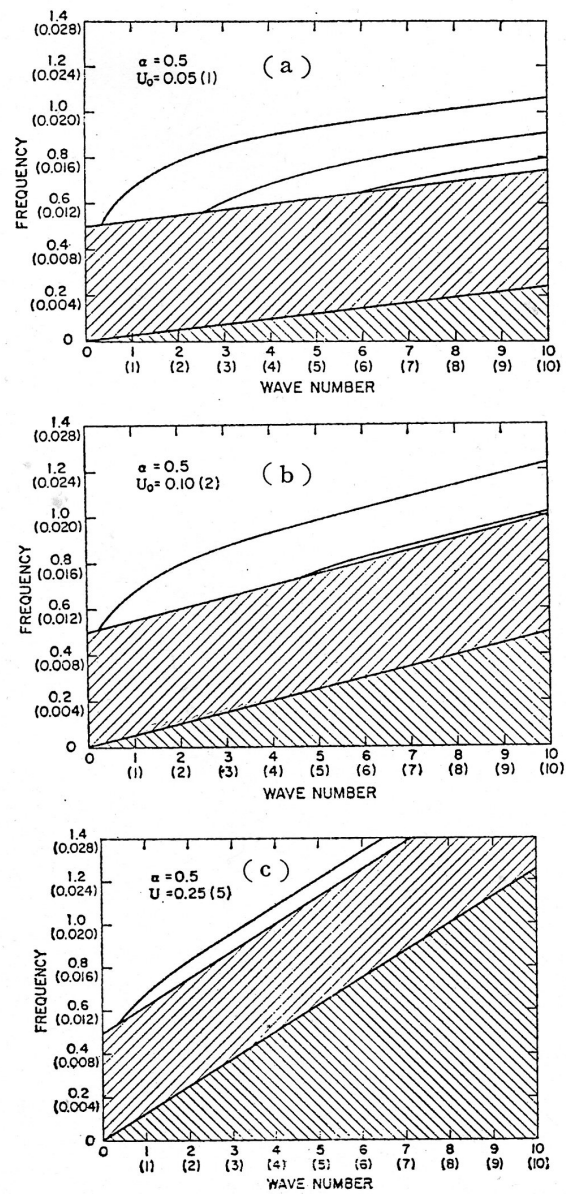


図 3.6: $U_0 \neq 0$ での流体中のダクト伝播モード. 他の条件は図 3.5 と同じ. (Jones 1972)

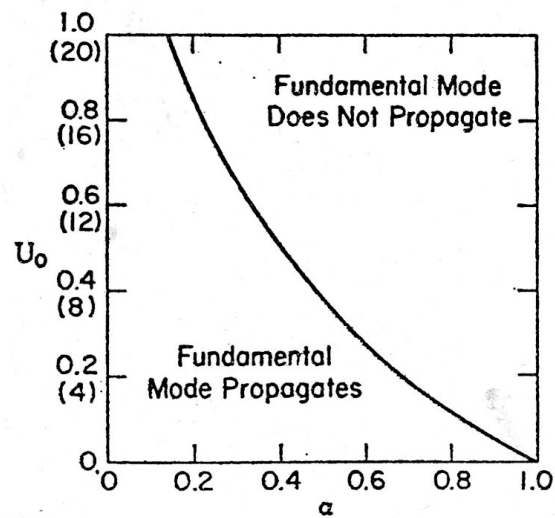


図 3.7: 基本モードのダクト伝播ダイヤグラム. 括弧内の数値の単位は m/sec. (Jones 1972)

図 3.7 はこれらの結果をまとめたものである. すなわち基本モードがダクト伝播するかをいろいろな U_0 と α について調べたものである. α , あるいは U_0 が大きくなると基本モードがダクト伝播しにくくなる傾向を持つ. このように強い安定層に捕捉されて伝播する内部重力波が非線形化して不安定化しないためには, その振幅が小さくなければならない. 振幅がある一定値を超えると, Richardson 数が局所的に 0.25 より小さくなる可能性がある. そうなるとケルビン - ヘルムホルツ不安定のために波は砕けて乱流化する.

第4章 内部重力波のエネルギー論

この章では基本場が静止しているときのエネルギーについて簡単に述べる。

(3.4) に従うような内部重力波のエネルギーの時間発展を考える。(3.4a) に $\rho_0 u$, (3.4b) に $\rho_0 w$ をかける。ここで Boussinesq 近似との妥当性から、圧力傾度力における密度 ρ_0 はあたかも定数として扱う。それぞれの両辺を足し合わせて連続の式 (3.4c) を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0 (u^2 + w^2) \right\} = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) - \rho w g \quad (4.1)$$

を得る。(4.1) の右辺第二項について、(3.4c) に ρ を乗じた式を使って ρw を消去し、整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_0 \left\{ u^2 + w^2 + \left(\frac{g\rho}{N\rho_0} \right)^2 \right\} \right] = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) \quad (4.2)$$

$\frac{1}{2} \rho_0 (u^2 + w^2)$ は単位体積あたりの変動量の運動エネルギー、 $\frac{1}{2} \left(\frac{g\rho}{N\rho_0} \right)^2$ は単位体積当たりの有効位置エネルギーである。この二つをたしたものが変動量の全エネルギーである。(4.2) はある局所的な場所におけるエネルギーの保存を表しており、ある点における変動量の全エネルギーの時間変化率は、その点を通過するフラックス $p\mathbf{u}$ の収束発散に等しいことを述べている。よってこのフラックスはエネルギーフラックスと解釈できる。以下 (4.2) の [] 内をエネルギー密度 E とおく。

エネルギーフラックスとエネルギーと密度の関係を導く。ここでそれぞれの変数の解について、 z 方向についても波型の解を仮定して

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ p/\rho_0 \\ \rho/\rho_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(k, n) \\ \hat{w}(k, n) \\ \hat{p}(k, n) \\ \hat{\rho}(k, n) \end{pmatrix} e^{i(kx+nz-\omega t)}$$

と置き直す. これを (3.4) に代入して整理すると, 偏波関係式

$$\hat{u} = \frac{k}{\omega} \hat{p}, \quad (4.3a)$$

$$\hat{w} = -\frac{k}{n} \hat{u} = -\frac{k^2}{n\omega} \hat{p}, \quad (4.3b)$$

$$\hat{\rho} = -i \frac{k^2 + n^2}{ng} \hat{p}, \quad (4.3c)$$

が得られる. これらを用いてエネルギーフラックス, エネルギー密度の一周期分の平均を見積もる. u, w, p, ρ が実数であることに注意すると, エネルギーフラックスについて,

$$\overline{p\mathbf{u}} = \frac{k\rho_0}{2\omega} |\hat{p}|^2 \left(1, -\frac{k}{m}\right) = \frac{\rho_0 (k^2 + n^2)^{1/2}}{N} |\hat{p}|^2 \left(1, -\frac{k}{m}\right), \quad (4.4)$$

エネルギー密度について

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{1}{4} \rho_0 \left[\frac{k^2}{\omega^2} |\hat{p}|^2 \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) + \frac{g^2}{N^2} \frac{(k^2 + n^2)^2}{n^2 g^2} |\hat{p}|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho_0 (k^2 + n^2)^2}{n^2 N^2} |\hat{p}|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで分散関係式 (3.8) を用いた. 一方, 群速度は

$$\mathbf{C}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) = \frac{n^2 N}{(k^2 + n^2)^{3/2}} \left(1, -\frac{k}{m}\right). \quad (4.6)$$

よって (4.4), (4.5), (4.6) より

$$\overline{p\mathbf{u}} = \bar{E} \mathbf{C}_g \quad (4.7)$$

の関係が成り立つ. すなわちエネルギーフラックスはエネルギー密度と群速度の積であらわされる. つまりエネルギーの伝播方向は群速度の向きであることがわかる. またこの式を用いると (4.2) は

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot (E \mathbf{C}_g) \quad (4.8)$$

と表すことができる.

第5章 まとめ

本論文は, 慣性系上の非粘性流体の基礎方程式から導かれる線形波動の分類を行った後, Boussinesq 近似を用いて内部重力波についての反射・透過の性質とエネルギー論について調べた.

まず, 圧縮性と密度成層の条件から, 慣性系上の非粘性流体の線形波動は外部波, 音波 (通常の音波と密度成層によって変化した音波), 内部重力波, acoustic gravity wave に分類することができた. 次に Boussinesq 近似を行って音波を除去し, Brunt-Väisälä 振動数が層をなす二層モデルと三層モデルを考えた. そして基本場が静止しているという仮定の下で層境界で反射や透過が起こる条件を調べた. その結果, 大気層が導波管の役割を果たす場合があることがわかった. 平均流が存在する場合についても簡単に考察した. また, 平均シアーが存在する場合について考え, Brunt-Väisälä 振動数の変化による効果やシアー流の変化による効果を調べた. 最後に基本場が静止している場合のエネルギー伝播について簡単にまとめた.

謝辞

本研究にあたり多くの方々のご指導ならびにご協力をいただきました。林祥介教授には研究内容の指針をいただきました。岩山隆寛准教授には研究内容の指針から理論や数値計算の手法など広範囲にわたってご指導や助言をいただきました。高橋芳幸准教授には論文の構成や発表資料など多くの有益なアドバイスをいただきました。また、博士後期課程の河合佑太氏をはじめとする地球および惑星大気科学研究室の皆様には計算機の利用や日々の議論まで様々な面でお世話になりました。ここに改めて皆様に心よりお礼を申し上げます。

計算結果の描画には、地球流体電脳倶楽部によって開発された Ruby DCL を使用させていただきました。

付録A 2章の式の導出

A.1 (2.18)の導出

(2.15), (2.16) に (2.17) を代入して整理する. (2.15) について

$$\begin{aligned} -\rho_0\omega^2\hat{u} &= -ikg\rho_0\hat{w} + ikC_0^2\left(ik\hat{u} + \frac{d\hat{w}}{dz}\right) \\ \Leftrightarrow \hat{u} &= \frac{ik}{\omega^2/C_0^2 - k^2}\left(-\frac{d\hat{w}}{dz} + \frac{g}{C_0^2}\hat{w}\right). \end{aligned} \quad (2.15')$$

(2.16) について

$$-\omega^2\rho_0\hat{w} = ikg\rho_0\hat{u} + \frac{d}{dz}\left[\rho_0C_0^2\left(ik\hat{u} + \frac{d\hat{w}}{dz}\right)\right]. \quad (2.16')$$

これに (2.15') を代入して \hat{u} を消去する. (2.16') の右辺第一項目について

$$ikg\rho_0\hat{u} = \frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2}\left(k^2g\frac{d\hat{w}}{dz} - \frac{k^2g^2}{C_0^2}\hat{w}\right).$$

右辺第二項について

$$ik\hat{u} + \frac{d\hat{w}}{dz} = \frac{1}{\omega^2/C_0^2 - k^2}\left(\frac{\omega^2}{C_0^2}\frac{d\hat{w}}{dz} - \frac{k^2g}{C_0^2}\hat{w}\right)$$

より

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left[\rho_0C_0^2\left(ik\hat{u} + \frac{d\hat{w}}{dz}\right)\right] \\ &= \frac{d}{dz}\left[\frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2}\left(\omega^2\frac{d\hat{w}}{dz} - k^2g\hat{w}\right)\right] \\ &= \left(\omega^2\frac{d\hat{w}}{dz} - k^2g\hat{w}\right)\frac{d}{dz}\left[\frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2}\right] + \frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2}\left(\omega^2\frac{d^2\hat{w}}{dz^2} - k^2g\frac{d\hat{w}}{dz}\right). \end{aligned}$$

(2.16') の両辺を $\frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2}$ で割って整理すると

$$\begin{aligned} & \left(k^2 g \frac{d\hat{w}}{dz} - \frac{k^2 g^2}{C_0^2} \hat{w} \right) + \left(\omega^2 \frac{d\hat{w}}{dz} - k^2 g \hat{w} \right) \frac{d}{dz} \left[\ln \frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2} \right] \\ & + \left(\omega^2 \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} - k^2 g \frac{d\hat{w}}{dz} \right) + \omega^2 \left(\frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 \right) \hat{w} = 0 \\ \Leftrightarrow & \omega^2 \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \omega^2 \frac{d}{dz} \left[\ln \frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2} \right] \frac{d\hat{w}}{dz} \\ & + \left[\omega^2 \left(\frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 \right) - k^2 g \frac{d}{dz} \left[\ln \frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2} \right] - \frac{k^2 g^2}{C_0^2} \right] \hat{w} = 0. \end{aligned}$$

さらに ω^2 で割ると

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(\ln \frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2} \right) \frac{d\hat{w}}{dz} \\ & + \left[\frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 - \frac{k^2}{\omega^2} g \frac{d}{dz} \left(\ln \frac{\rho_0}{\omega^2/C_0^2 - k^2} \right) - \frac{k^2 g^2}{\omega^2 C_0^2} \right] \hat{w} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

が導出できる。

A.2 (2.22), (2.23) の導出

(2.22) と (2.23) を導出する. (2.21) を (2.19) に代入して各項を計算する.

(2.22) の第二項について

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \rho_0}{dz} \frac{d\hat{w}}{dz} &= \frac{d \ln \rho_0}{dz} \left\{ \rho_0^{-\frac{1}{2}} \frac{dh}{dz} - \frac{1}{2} \rho_0^{-\frac{1}{2}} \frac{d \ln \rho_0}{dz} h \right\} \\ &= \rho_0^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d \ln \rho_0}{dz} \frac{dh}{dz} - \frac{1}{2} \left(\frac{d \ln \rho_0}{dz} \right)^2 h \right\}, \end{aligned}$$

また第一項について

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left[\rho_0^{-\frac{1}{2}} \frac{dh}{dz} - \frac{1}{2} \rho_0^{-\frac{1}{2}} \frac{d \ln \rho_0}{dz} h \right] \\ &= \rho_0^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d^2 h}{dz^2} - \frac{d \ln \rho_0}{dz} \frac{dh}{dz} + \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{d \ln \rho_0}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln \rho_0}{dz^2} \right\} h \right]. \end{aligned}$$

よって (2.19) は

$$\frac{d^2 h}{dz^2} + \left\{ \frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 + \frac{k^2 N^2}{\omega^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{d \ln \rho_0}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln \rho_0}{dz^2} \right\} h = 0$$

と書ける. この h の係数を n^2 と置くと

$$\frac{d^2 h}{dz^2} + n^2 h = 0, \quad (2.22)$$

$$n^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} - k^2 + \frac{k^2 N^2}{\omega^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{d \ln \rho_0}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln \rho_0}{dz^2} \quad (2.23)$$

となる.

付録B 3章の式の導出

B.1 (3.13)の導出

境界条件 (3.12a) より

$$A_1 + B_1 = A_2, \quad (\text{B.1})$$

また (3.12b) より

$$\lambda_1 (A_1 - B_1) = \lambda_2 A_2. \quad (\text{B.2})$$

(B.1) を (B.2) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{A_1} &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)}, \\ \gamma = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{3.13})$$

B.2 (3.15)の導出

境界条件 (3.12a), (3.12b) より

$$A_1 + B_1 = A_1, \quad (\text{B.3})$$

$$i\lambda_1 (A_1 - B_1) = \delta_2 A_2. \quad (\text{B.4})$$

(B.4) に (B.3) を代入するして整理すると

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{A_1} &= \frac{\lambda_1 - i\delta_2}{\lambda_1 + i\delta_2} \\ r = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} &= \left| \frac{\lambda_1 - i\delta_2}{\lambda_1 + i\delta_2} \right|^2 = 1. \end{aligned} \quad (\text{3.15})$$

B.3 (3.16)の導出

(3.16)ではLayer 2で内部波型を考えているので二層目での解は

$$h_2 = A_2 e^{i\lambda_2 z} + B_2 e^{-i\lambda_2 z}$$

である。境界条件(3.12a), (3.12b)より $z = 0$ において

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad \lambda_1(A_1 - B_1) = \lambda_2(A_2 - B_2).$$

これらの式より

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)A_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)B_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)A_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)B_2} \quad (\text{B.5})$$

である。また $z = h$ において

$$A_2 e^{i\lambda_2 h} + B_2 e^{-i\lambda_2 h} = A_3 e^{i\lambda_3 h}, \quad \lambda_2 (A_2 e^{i\lambda_2 h} - B_2 e^{-i\lambda_2 h}) = \lambda_3 A_3 e^{i\lambda_3 h},$$

から

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{e^{i\lambda_2 h}(\lambda_2 - \lambda_3)}{e^{-i\lambda_2 h}(\lambda_2 + \lambda_3)} \quad (\text{B.6})$$

である。(B.5)を(B.6)を用いて書き換えると

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{a_2 b_1 e^{-i\theta} + a_1 b_2 e^{i\theta}}{a_1 b_1 e^{-i\theta} + a_2 b_2 e^{i\theta}}. \quad (\text{B.7})$$

ここで

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_1 + \lambda_2, & a_2 &= \lambda_1 - \lambda_2, \\ b_1 &= \lambda_2 + \lambda_3, & b_2 &= \lambda_2 - \lambda_3, \\ \theta &= \lambda_2 h \end{aligned}$$

とした。(B.7)に複素共役をかけると

$$\begin{aligned} \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} &= \frac{a_2 b_1 e^{-i\theta} + a_1 b_2 e^{i\theta}}{a_1 b_1 e^{-i\theta} + a_2 b_2 e^{i\theta}} \cdot \frac{a_2 b_1 e^{i\theta} + a_1 b_2 e^{-i\theta}}{a_1 b_1 e^{i\theta} + a_2 b_2 e^{-i\theta}} \\ &= \frac{(a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2 + (a_1 b_1 a_2 b_2)(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})}{(a_1 b_1)^2 + (a_2 b_2)^2 + (a_1 b_1 a_2 b_2)(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})}. \end{aligned}$$

これを $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2(1 - 2 \sin^2 \theta)$ を用いて書き換えると

$$\frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 + 4(a_1 b_1 a_2 b_2) \sin^2 \theta}{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + 4(a_1 b_1 a_2 b_2) \sin^2 \theta}. \quad (\text{B.8})$$

a_1, b_1, a_2, b_2 について

$$\begin{aligned}(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 &= 4\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_3)^2, \\ (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 &= 4\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2, \\ a_1 b_1 a_2 b_2 &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\end{aligned}$$

なので, これらを (B.8) に代入すると

$$r = \frac{\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \sin^2 \lambda_2 h}{\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_3)^2 - (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \sin^2 \lambda_2 h} \quad (3.16)$$

が導かれる.

B.4 (3.17) の導出

(3.17) では Layer 2 で外部波型を考えているので二層目での解は

$$h_2 = A_2 e^{\delta_2 z} + B_2 e^{-\delta_2 z}$$

である. (3.16) の場合と同様に境界条件 (3.12a), (3.12b) から, $z = 0$ において

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad i\lambda_1(A_1 - B_1) = \delta_2(A_2 - B_2),$$

なので

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{(\lambda_1 + i\delta_2)A_2 + (\lambda_1 - i\delta_2)B_2}{(\lambda_1 - i\delta_2)A_2 + (\lambda_1 + i\delta_2)B_2}. \quad (B.9)$$

$z = h$ において

$$A_2 e^{\delta_2 h} + B_2 e^{-\delta_2 h} = A_3 e^{i\lambda_3 h}, \quad \delta_2 (A_2 e^{\delta_2 h} - B_2 e^{-\delta_2 h}) = i\lambda_3 A_3 e^{i\lambda_3 h},$$

なので

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{(\delta_2 - i\lambda_3)e^{\delta_2 h}}{(\delta_2 + i\lambda_3)e^{-\delta_2 h}} \quad (B.10)$$

である. (B.9) を (B.10) を用いて書き換えると

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{a b e^{-\theta'} + a^* b^* e^{\theta'}}{a^* b e^{-\theta'} + a b^* e^{\theta'}}. \quad (B.11)$$

ここで

$$\begin{aligned}a &= \lambda_1 + i\delta_2, \quad b = \delta_2 + i\lambda_3, \\ \theta' &= \delta_2 h\end{aligned}$$

で, *はその複素共役である. (B.11)に複素共役をかけ, $e^{2\theta'} + e^{-2\theta'} = 2(1 + 2 \sinh^2 \theta')$ を用いると

$$\begin{aligned} \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} &= \frac{abe^{-\theta'} + a^*b^*e^{\theta'}}{a^*be^{-\theta'} + ab^*e^{\theta'}} \cdot \frac{a^*b^*e^{-\theta'} + abe^{\theta'}}{ab^*e^{-\theta'} + a^*be^{\theta'}} \\ &= \frac{(ab)^2 + (a^*b^*)^2 + |a|^2|b|^2(e^{2\theta'} + e^{-2\theta'})}{(a^*b)^2 + (ab^*)^2 + |a|^2|b|^2(e^{2\theta'} + e^{-2\theta'})} \\ &= \frac{(ab + a^*b^*)^2 + 4|a|^2|b|^2 \sinh^2 \theta'}{(a^*b + ab^*)^2 + |a|^2|b|^2 \sinh^2 \theta'}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

a, b について

$$\begin{aligned} (ab + a^*b^*)^2 &= 4\delta_2^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2, \\ (a^*b + ab^*)^2 &= 4\delta_2^2(\lambda_1 + \lambda_3)^2, \\ |a|^2|b|^2 &= (\lambda_1^2 + \delta_2^2)(\delta_2^2 + \lambda_3^2) \end{aligned}$$

なのでこれらを (B.12) に代入すると

$$r = \frac{\delta_2^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\delta_2^2 + \lambda_1^2)(\lambda_3^2 + \delta_2^2) \sinh^2 \delta_2 h}{\delta_2^2(\lambda_1 + \lambda_3)^2 + (\delta_2^2 + \lambda_1^2)(\lambda_3^2 + \delta_2^2) \sinh^2 \delta_2 h} \quad (\text{3.17})$$

が得られる.

B.5 (3.20) の導出

境界条件 (3.12a), (3.12b) から, $z = 0$ において

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad \delta_1(A_1 - B_1) = i\lambda_2(A_2 - B_2),$$

なので

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{(\delta_1 + i\lambda_2)A_2 + (\delta_1 - i\lambda_2)B_2}{(\delta_1 - i\lambda_2)A_2 + (\delta_1 + i\lambda_2)B_2}. \quad (\text{B.13})$$

$z = h$ において

$$A_2 e^{i\lambda_2 h} + B_2 e^{-i\lambda_2 h} = A_3 e^{\delta_3 h}, \quad i\lambda_2 (A_2 e^{i\lambda_2 h} - B_2 e^{-i\lambda_2 h}) = \delta_3 A_3 e^{\delta_3 h},$$

なので

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{(i\lambda_2 - \delta_3)e^{i\lambda_2 h}}{(i\lambda_2 + \delta_3)e^{-i\lambda_2 h}} \quad (\text{B.14})$$

である. (B.13) を (B.14) を用いて書き換えると

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{(\delta_1 + i\lambda_2)(i\lambda_2 + \delta_3)e^{-i\lambda_2 h} + (\delta_1 - i\lambda_2)(i\lambda_2 - \delta_3)e^{i\lambda_2 h}}{(\delta_1 - i\lambda_2)(i\lambda_2 + \delta_3)e^{-i\lambda_2 h} + (\delta_1 + i\lambda_2)(i\lambda_2 - \delta_3)e^{i\lambda_2 h}}.$$

この式について複素共役をとると,

$$r = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \left[\frac{(\delta_1 \delta_3 + \lambda_2^2) \cos \lambda_2 h + \lambda_2 (\delta_1 + \delta_3) \sin \lambda_2 h}{(\delta_1 \delta_3 + \lambda_2^2) \cos \lambda_2 h + \lambda_2 (\delta_1 - \delta_3) \sin \lambda_2 h} \right]^2 \quad (3.20)$$

が得られる.

B.6 (3.22), (3.23) の導出

(3.5) のうち, 鉛直速度 \hat{w} は Z を用いて

$$\hat{w} = \frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + U \frac{\partial Z}{\partial x}$$

と書ける. Z について波型の解 $Z = \hat{Z} e^{i(kx - \omega t)}$ を仮定すると,

$$\hat{w} = -i(\omega - kU) \hat{Z} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (B.15)$$

w を除く (3.5) と (B.15) を (3.21) に代入して整理すると,

$$\left\{ \hat{u} + \frac{dU}{dz} \hat{Z} \right\} = \frac{k}{(\omega - kU)} \hat{p}, \quad (B.16a)$$

$$(\omega - kU)^2 \hat{Z} = \frac{d\hat{p}}{dz} + \hat{p}g, \quad (B.16b)$$

$$\hat{p} = -\frac{N^2}{g} \hat{Z}, \quad (B.16c)$$

$$\hat{u} = \frac{\omega - kU}{k} \frac{d\hat{Z}}{dz} - \frac{dU}{dz} \hat{Z}. \quad (B.16d)$$

ここで (B.16c) の変形に Brunt-Väisälä 振動数の定義を用いた. (B.16c), (B.16d) を用いて (B.16a), (B.16b) から \hat{u} , \hat{p} を消去すると, (B.16a) より

$$\frac{d\hat{Z}}{dz} = \frac{k^2}{(\omega - kU)^2} \hat{p}, \quad (3.22)$$

(B.16b) より

$$\frac{d\hat{p}}{dz} = -[N^2 - (\omega - kU)^2] \hat{Z} \quad (3.23)$$

が導かれる.

付録C Richardson 数について

Richardson 数はシア一流のある密度成層した系での安定と不安定の指標になる値である。ここでは Cushman-Roisin and Beckers (2011) を参考に成層シア一流の安定性について議論することで Richardson 数を導出する。

条件は 3.4 節と同様である。すなわち線形化した支配方程式は (3.21) である。変動量の流線関数 ψ ($u = +\partial\psi/\partial z$, $w = -\partial\psi/\partial x$) を導入し、水平方向について波型の解

$$\begin{pmatrix} \psi \\ p/\rho_0 \\ \rho/\rho_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}(z, k) \\ \hat{p}(z, k) \\ \hat{\rho}(z, k) \end{pmatrix} e^{ik(x-ct)}$$

を仮定すると、

$$(U - c) \left(\frac{d^2\psi}{dz^2} - k^2\psi \right) + \left(\frac{N^2}{U - c} - \frac{d^2U}{dz^2} \right) \psi = 0. \quad (\text{C.1})$$

ここで c は位相速度である。これは Taylor-Goldstein 方程式と呼ばれる。この式は成層した平行な流れにおける、変動量の鉛直構造を支配している。

次に境界条件を考える。 $z = 0$, $z = H$ のふたつの面に区切られた領域で、流線関数の項について

$$\psi(0) = \psi(H) = 0 \quad (\text{C.2})$$

を課す。すると位相速度 c が特定の固有値を取り、解が自明である ($\psi = 0$) ということがない限り、方程式と境界条件は固有値問題を作る。ふつう固有値は複素数だが、 c に対して固有関数が ψ ならば複素共役 c^* の固有関数は ψ^* であり、また c^* はもう一つの固有値である。これは (C.1) と (C.2) の複素共役を取れば容易に確かめられる。この固有値のペアのうち、片方は正の虚部を持つので指数関数的に増加する摂動と一致する。 c にゼロでない虚部が存在すれば、少なくとも一つは不安定なモードが存在することが自動的に保証される。逆にすべての可能な位相速度 c が純粋な実数ならば、基本場の流れは安定である。

任意のシア一流 $U(z)$ のような一般的な場合では (C.1), (C.2) は解けないので、積

分による拘束条件を導入する. 関数 ϕ を

$$\psi = \sqrt{U - c}\phi \quad (\text{C.3})$$

と定義すると, (C.1), (C.2) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[(U - c) \frac{d\phi}{dz} \right] - \left[k^2(U - c) + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dz^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{U - c} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - N^2 \right) \right] \phi = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\phi(0) = \phi(H) = 0. \quad (\text{C.5})$$

(C.4) に複素共役をかけて領域の鉛直方向に積分し, (C.5) を利用すると,

$$\begin{aligned} \int_0^H \left[N^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right] \frac{|\phi|^2}{U - c} dz \\ = \int_0^H (U - c) \left(\left| \frac{d\phi}{dz} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dz + \frac{1}{2} \int_0^H \frac{d^2 U}{dz^2} |\phi|^2 dz, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

ここで $||$ は複素数の絶対値を表す. この式の虚部は

$$\begin{aligned} c_i \int_0^H \left[N^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right] \frac{|\phi|^2}{|U - c|^2} dz \\ = -c_i \int_0^H \left(\left| \frac{d\phi}{dz} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dz, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

で, c_i は c の虚部である. もしいたるところで

$$N^2 > \frac{1}{4} \left(\frac{du}{dz} \right)^2$$

ならば, (C.7) は c_i に正の数を掛けたものと c_i に負の数を掛けたものと同じになる. すなわち $c_i = 0$ でなくてはならない. これは Richardson 数として定義され,

$$Ri = \frac{N^2}{(dU/dz)^2} \quad (\text{C.8})$$

である. 不等式

$$Ri > \frac{1}{4} \quad (\text{C.9})$$

を領域のいたるところで満たすとき, シア一流は安定であるという基準になる.

付録D 内部重力波の運動論

非粘性で非等方的な流体中の分散性を持つ微小振幅波動の運動について総括的に論じる.

いま位相関数 (phase function) を $\phi(x, t)$ とする. 波列の周波数を ω , 波数 k は位相関数を使って

$$\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad k = \nabla \phi \quad (\text{D.1})$$

と表すことができる. ここで ω と k の間には分散関係

$$\omega = \Omega(k, \Lambda) \quad (\text{D.2})$$

が成立しているとする. $\Lambda(x, t)$ は流体の局所的性質を含むパラメータであり, 内部重力波の場合は Brunt-Väisälä 振動数などが含まれる. よって ω と k の時間微分は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial t}, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x_i}. \quad (\text{D.4})$$

ここで

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + C_g \cdot \nabla$$

と定義し, 群速度 C_g は

$$C_{gi} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_i}$$

であることを用いると (D.3) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - C_g \cdot \nabla \omega \\ \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

(D.4) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_i}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\right) \\ &= -C_g \cdot \nabla k_i - \frac{\partial \Omega}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \\ \Leftrightarrow \frac{dk_i}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\end{aligned}\tag{D.6}$$

と書ける.

付録E ニュートン法のプログラム

2.2節の分散関係図の作成にあたっての数値計算にはニュートン法を用いた。このニュートン法について説明する。

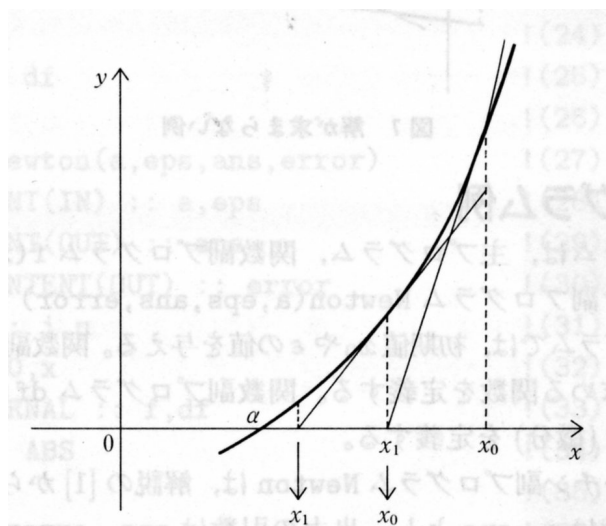


図 E.1: $f(x)$ とニュートン法の仕組み (東田 1994)

まず関数 $f(x)$ が図 E.1 のような状態とする。次に任意の初期値 x_0 を与え、 x_0 での $f(x)$ の接線を引く。その接線と x 軸との交点を x とする。接線の傾きは $df(x)/dx$ であり、点 $(x_0, f(x_0))$ を通るため、接線を表す式は

$$y = \frac{df(x)}{dx}(x - x_0) + f(x_0)$$

である。よって x 軸との交点の座標は

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{E.1})$$

と書ける。この x をまた次の初期値としてこれを繰り返し x と x_0 の差が非常に小さくなれば ($|x - x_0| < \epsilon$)、 x は解 α になったと判断する。

分散関係の数値計算ではまず適当な n と初期値 ω_i を与え, k の値に対応する ω の解を見つけていくという方法で計算を行った. 例として図 2.3 の計算に用いた Fortran のプログラムを以下に掲載する.

a-g_wave.f

```

C-----
C 卒論 (v) の分散関係式の数値計算
C  $\omega^4 - (k^2 + n^2 + 1)\omega^2 + \alpha k = 0$ 
C ニュートン法
C-----
      integer  i, j, n, i_max, j_max
      real*8   k, dk, k_min, k_max, eps
      real*8   omega, omega_i, alpha
      real*8   f, df
C-----
C n の初期値を設定する (n=0,1,2). n=0 が基本モード
      n=0 ! vertical mode
c file name -> omega_n1
Cc      l=a: 音波に対応する部分を計算する場合の初期値
c        omega_i=dbl(n)**2+1
cc      l=g: 内部重力波に対応する部分を計算する場合の初期値
          omega_i=0 ! initial guess
C-----
C 出力先のファイル名を設定 n と l によって変更する
      open(16, file='k-omega_0g.dat') ! <- change the file name
C-----
      i_max=500                                !与える k の個数
      eps=1.0E-6                               !解が収束したかを判断する値
      k_min=0.d+0                              !k の範囲指定
      k_max=5.d+0
      dk=(k_max-k_min)/dbl(i_max)             !k の値の幅を決める
      alpha=dbl(40)/dbl(49)                   !方程式中の係数
C-----
C                                     !k_min から順に対応する値を計算
      do i=1, i_max+1
        k=k_min+dbl(i-1)*dk
        do j=1, j
          C      omega_i での接線から新しい omega の値を導出する
            omega=omega_i-f(omega_i, k, n, alpha)/df(omega_i, k, n, alpha)
          C      !収束したらループから抜ける
            if (abs(omega-omega_i) <= eps) exit
          C      !収束していなければ omega_i に計算した omega を代入する
            omega_i=omega
        end do
      C      !k と omega の値をファイルに書き出し
        write(16,100) k, dsqrt(omega)
      end do

100 format (2(1x, e12.5))

      stop
      end
C-----
      real*8 function f(omega, k, n, alpha)
c 分散関係式
      integer n
      real*8 k, omega, alpha
      f=omega**2-(k**2+dbl(n)**2+dbl(1))*omega +alpha*k**2
      return
      end
C-----
      real*8 function df(omega, k, n, alpha)
c omega について微分した分散関係式
      integer n
      real*8 k, omega, alpha
      df=dbl(2)*omega-(k**2+dbl(n)**2+dbl(1))
      return
      end

```

参考文献

- [1] Cushman-Roisin, B. and Beckers J.M., 2011: *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects*, Academic Press, 397–401.
- [2] Jones, W.L., 1972: *Ducting of internal gravity waves on a stable layer with shear* **77**, 3879-3885.
- [3] Leighton, R.B., 1970: 現代物理学概論 (斎藤信彦 訳), 岩波書店, p.134.
- [4] 岩山隆寛, 2014: 地球および惑星大気科学 講義資料,
URL: http://www2.kobeu.ac.jp/iwayama/teach/gfd/2014_atmos/GW.pdf.
- [5] 小倉義光, 1997: メソ気象の基礎理論, 東京大学出版会.
- [6] 田中浩, 1975: 大気中の内部重力波, 気象研究ノート第 126 号, 日本気象学会.
- [7] 東田幸樹, 山本芳人, 熊沢友信, 1994: 入門 **Fortran90** 実践プログラミング, ソフトバンク, 119-122.
- [8] 細野敏夫 1973: 電波工学の基礎, 昭晃堂.
- [9] 松野太郎, 島崎達夫 1981: 成層圏と中間圏の大気, 大気科学講座 3 / 岸保勘三郎, 浅井富雄編, 東京大学出版会, p.133.