

磁気流体力学(MHD)の定式化

吉田茂生・竹広真一・佐々木洋平・林祥介

2002年7月5日

目次

1	電磁流体の基礎方程式	3
1.1	電磁場の式とその簡単な復習	3
1.2	流体力学の式	6
2	MHD 近似	8
2.1	光速に比べ遅い現象の記述：MHD と EHD	8
2.2	MHD 近似の下での電荷保存則	12
2.3	MHD 近似の下でのオームの法則	13
2.4	誘導方程式の導出	15
2.5	ローレンツ力とマクスウェル応力テンソル	17
2.6	磁場のエネルギーの式とジュール熱	18
3	MHD の基礎方程式	20
4	電磁場の境界条件	21
4.1	法線成分	21
4.2	接線成分	23
4.3	境界条件まとめ	25
5	回転系での MHD 方程式	27
6	エネルギー保存則	28
6.1	運動エネルギー保存則	28
6.2	磁場エネルギー保存則	29
6.3	内部エネルギー保存則	30
6.4	全エネルギー保存則	31

概要

「磁気流体力学 (Magnetohydrodynamics, 以下 MHD)」は電気伝導性流体のゆっくりにした運動を記述するための基本的な理論の枠組である. ここでは MHD の基礎方程式系を導出する.

電気伝導性流体の運動を完全に記述するためには, 電磁場の基礎方程式 (マクスウェルの方程式とオームの法則) および流体の支配方程式 (質量保存則, 運動方程式, エネルギー保存則) を組み合わせる必要がある. しかしながら流体の速度が光速と比較して十分に小さく, かつ, 流体の電気伝導度が十分に大きく電荷の緩和時間に比べて系の特徴的な時間スケールが十分長い場合には, 電場を陽に用いず磁場だけで電磁場の振舞を表現することができるようになる. 結果として, 光速で伝わる電磁波が系から取り除かれることになっている. この事情はちょうど圧縮性を伴う流体から音波を取り除く非弾性近似あるいは非圧縮近似と良く似ている.

1 電磁流体の基礎方程式

1.1 電磁場の式とその簡単な復習

電磁場を支配する式はマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

である¹. ここで

\mathbf{D} 電気変位 (electrical displacement)

あるいは電束密度 (electrical flux density)

ρ_e 電荷密度 (electric charge density)

\mathbf{B} 磁束密度 (magnetic flux density)

\mathbf{E} 電場 (electric field)

\mathbf{H} 磁力 (magnetizing force)

あるいは磁場の強さ (magnetic field, magnetic (field) intensity, magnetic field strength)

\mathbf{J} 電流密度 (electric current density)

である.

(1) はガウスの法則と呼ばれる. 電荷が存在するとその正負によって電場が湧き出し, あるいは吸い込みとなることを表す.

(2) は, 磁場の湧き出しあるいは吸い込みにあたる磁気単極子が存在しないことを表しており, 磁束が途中で切れてしまわないことを意味している.

(3) はファラデーの電磁誘導の法則と呼ばれる. ある閉曲線で囲まれた面をつき抜ける磁束密度が変化すると, 閉曲線にそって電場が生じることを表している.

(4) はアンペールの法則と呼ばれる. 電束密度が時間変化しない場合にはある閉曲線で囲まれた面をつき抜ける電流の総量と, 閉曲線に沿った磁場が比例関係にある

¹本文書では単位系として MKSA 単位系を用いることとする.

ことを示している. $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は変位電流 (displacement current) と呼ばれ, 電場の時間変化が電流と同じ効果をもたらす磁場を伴うことを表している. この項が存在することの必然性は電荷の保存則から要請される.

アンペールの法則 (4) に対して $\nabla \cdot$ を作用すると,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}.$$

ここで $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ であることと, ガウスの法則 (1) を用いることで

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5)$$

が得られる. この式は電荷保存則と呼ばれ, 電荷密度の時間変化が, 電荷の流束であるところの電流の収束発散によってもたらされることを意味している. もしもアンペールの法則に変位電流の項が存在しなければ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ となってしまう, 電荷の保存則が導出できなくなる.

マクスウェル方程式だけでは系が閉じておらず, \mathbf{D} と \mathbf{E} , \mathbf{H} と \mathbf{B} の関係式である構成方程式

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (7)$$

が必要となる. ここで ε, μ はそれぞれ誘電率 (permittivity), 透磁率 (permeability) と呼ばれ, 物質毎に定まる量である².

さらに, 導体内部での電流密度と電場の間に線形関係 (オームの法則)

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}' \quad (8)$$

が成立するものと仮定する. σ は電気伝導度 (conductivity) である. 添字 ' は導体とともに動く系から見たときの量を表しており, その系でのみ上の表現が成り立つ³. 以上 8 本の方程式によって電磁場は完全に記述される.

ここであげた電磁場の支配方程式の本数は, マクスウェルの式が $(1+1+3+3)=8$ 本, 電荷保存則 1 本, 構成方程式が $(3+3)=6$ 本, オームの法則 3 本の計 18 本である. それに対して従属変数は $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \rho_e, \mathbf{J}$ であり, その成分毎の数は $(3 \times 5 + 1) = 16$ 個

²一般的には ε, μ はスカラーではない. 電磁氣的に異方的な性質を持つ物質の場合には 2 階テンソルとなる (ベクトルを線形的に結びつけるのは 2 階テンソル). 以下では簡単のため等方的で一般的な物質しか考えないこととする.

³マクスウェル方程式はどの慣性系でも同じ形である. いわゆる相対性原理.

であるから、変数の数に比べて式の数が多くなっている。そのため条件の与えすぎではないかという疑問が生じる。しかしながら、ガウスの法則 (1) と磁場のソレノイド条件 (2) は初期値についての制約でしかない。以下に示すようにファラデーの法則 (3) とアンペールの法則 (4) の発散をとると

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}), \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \rightarrow 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}, \\ &\rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_e).\end{aligned}$$

である。後者に関しては電荷保存則も用いた。これらの式から、ガウスの法則 (1) と磁場のソレノイド条件 (2) は初期値において満たされているならば、その後も常に満たされていることがわかる。よって、時間発展計算の際に考える方程式の本数は全部で 16 本となる。この数は従属変数の数 (16 個) と同じであり、条件の与えすぎにはならないことがわかる。

時間発展計算を考える場合、その手順は以下の通りになる。

1. ファラデーの法則 (3), アンペールの法則 (4), そして電荷保存則 (5) によって、各々 \mathbf{B} , \mathbf{D} , ρ_e の次の時間の場を計算する。
2. 電場と磁場についての構成方程式 (6) 及び (7) を用いて \mathbf{E} , \mathbf{H} を求める。
3. 最後に オームの法則 (8) を用いて電場から電流密度 \mathbf{J} を計算する。

本来、電流密度 \mathbf{J} の時間発展方程式 (流体のうちの電荷を持つ部分の運動方程式) が存在しているはずであるが、オームの法則はその時間変化を無視することによって得られるバランス方程式 (加速度と散逸がつりあっている) として位置付けられる。

1.2 流体力学の式

電磁場と相互作用する流体の支配方程式は, 連続の式 (質量保存則)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (9)$$

運動方程式 (運動量保存則)

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_V \quad (10)$$

熱の式

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s \right] = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \cdot (k \nabla T) + H_M \quad (11)$$

である. ここで

ρ	流体の密度
\mathbf{v}	速度ベクトル
p	圧力
$\boldsymbol{\tau}$	粘性応力テンソル
\mathbf{F}_M	電磁場から流体へと作用する力
s	エントロピー
T	温度
k	熱伝導率
H_M	電磁場から流体に加えられる熱

である⁴.

以上の方程式では系が閉じておらず, 流体の熱力学的構造を与える熱力学関数と応力と運動場との関係を与える構成方程式とが必要になる. 通常, 熱力学関数は状態方程式と基準圧力における比熱の値の組で与えられる.

$$\rho = \rho(p, T), \quad c_{p0} = c_p(p_0, T) \quad (p_0 \text{ は適当な基準圧力}) \quad (12)$$

また, 構成方程式は, 例えばいわゆるナビエ・ストークス流体においては

$$\tau_{ij} = \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

⁴流体力学の式の導出と応力テンソルの表現についてはシリーズ「連続体力学 (流体力学/弾性体力学) の定式化」を参照のこと.

である。ここで ν は物質毎に定まる量で、動粘性率と呼ばれる。

電磁場が導電性流体に作用する力 \mathbf{F}_M は

$$\mathbf{F}_M = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (14)$$

である。右辺第 1 項は電場からのクーロン力、第 2 項はローレンツ力である⁵。

電磁場から流体に加えられる熱 H_M の具体的な形はここでは示さない⁶。電気抵抗を持つ伝導体中を電流が流れることで生じるジュール熱はこの項に含まれることになる。

⁵電場による力を含めてローレンツ力と呼ぶ流儀もある (ex. 砂川, 理論電磁気学)。

⁶流体力学ハンドブックでは

$$H_M = -\rho_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{J} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

右辺第 1 項は電場からの仕事、第 2 項はジュール熱を表している。

2 磁気流体近似 (MHD 近似)

2.1 光速に比べ遅い現象の記述：MHD と EHD

いま, 考えている現象の時間スケールを τ , 空間スケールを l とする. また, 電場, 磁場の特徴的な大きさを E, B と表すことにする. マクスウェル方程式のうちファラデーの法則 (3), アンペールの法則 (4)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

において, 仮に両方の式の時間変化項が無視できないとし, 左辺とバランスするとすれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\nabla \times \mathbf{E}) &= \frac{E}{l}, & \mathcal{O}\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) &= \frac{B}{\tau}. \\ \mathcal{O}(\nabla \times \mathbf{H}) &= \frac{B}{l\mu}, & \mathcal{O}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) &= \varepsilon \frac{E}{\tau}. \end{aligned}$$

より

$$\frac{E}{l} = \frac{B}{\tau}, \quad \frac{B}{l\mu} = \varepsilon \frac{E}{\tau}.$$

すなわち

$$\tau = l\sqrt{\mu\varepsilon} \sim \frac{l}{c} \quad (15)$$

でなければならない. ここで, \sim は誘電率と透磁率が真空中の値と大きな差が無いとしたことを意味している. $c \equiv 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ は光速である. このようなバランスが成り立つ現象は光 (電磁波) である.

したがって, 光の伝播時間に比べて十分長い時間スケールで変化する現象

$$\tau \gg \frac{l}{c} \quad (16)$$

を扱うならば, 上記バランスのいずれかが成立しなくなり, ファラデーの法則 (3), もしくは アンペールの法則 (4) が含む時間変化項のうちどちらかが無視できることになるはずである. 以下で説明するように, アンペールの法則が含む時間変化項が無視できれば, 磁場が卓越する「MHD (磁気流体力学)」の式が導かれる. 一方で, ファラデーの法則が含む時間変化項が無視できれば電場が卓越する「EHD (電気流体力学)」の式が導かれる. それらの違いは, 電気が良く流れるかどうかで

決まる. 電気が良く流れる場合は MHD の世界になり, 流れない場合は EHD の世界になる.

いまファラデーの法則 (3) の時間変化項が無視できないものとする. すなわち,

$$\frac{E}{B} = \frac{l}{\tau} \quad (17)$$

が成り立っているとする ($E \ll cB$ である, すなわち磁場が卓越している). これを用いてアンペールの法則 (4) の右辺と左辺第 2 項の大きさを比較すると

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial \mathbf{D}/\partial t}{\nabla \times \mathbf{H}}\right) = \frac{\varepsilon E}{\tau} \cdot \frac{\mu l}{B} \sim \varepsilon_0 \mu_0 \frac{l}{\tau} \cdot \frac{E}{B} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{l}{\tau}\right)^2 \ll 1.$$

したがって変位電流の項を無視することができ, アンペールの法則が

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (18)$$

となる. これが成立するのが MHD の世界である.

一方, アンペールの法則 (4) の時間変化項が無視できないものとする ($E \gg cB$ である, すなわち磁場が卓越している). このときは, 前段落と同様にして

$$\frac{B}{E} = \varepsilon \mu \frac{l}{\tau} \sim \frac{1}{c^2} \frac{l}{\tau} \quad (19)$$

である. これを用いてファラデーの法則 (3) の右辺と左辺の大きさを比較すると

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial \mathbf{B}/\partial t}{\nabla \times \mathbf{E}}\right) = \frac{B}{\tau} \cdot \frac{l}{E} \sim \frac{1}{c^2} \left(\frac{l}{\tau}\right)^2 \ll 1.$$

したがって磁場変化の項を無視することができ, ファラデーの法則が

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (20)$$

となる. これが成立するのが EHD の世界である.

さて, 光より遅い世界で, MHD と EHD のどちらが成立するかを分けるものは何だろうか? それを見るために, アンペールの法則の方に注目してみよう. 1.1 節で見たように, アンペールの法則の発散は電荷保存則である. そこで, 導体に対して静止している座標系において考え, オームの法則 (8) とガウスの法則 (1)

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}', \quad \nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho'_e$$

を, 電荷の保存則 (5)

$$\frac{\partial \rho'_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}' = 0$$

に代入すると

$$\frac{\partial \rho'_e}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho'_e = 0$$

が得られる. ここで簡単のため σ は一定とした. この式より電荷の大きさが e^{-1} になる時間を電荷の緩和時間 $\tau_e \equiv \varepsilon/\sigma$ と定義することができる. すでに見たように, MHD 近似が成り立つということはアンペールの法則において変位電流が無視できるということであった. それは, 電荷の保存則にやきなおして考えると, $\partial \rho'_e/\partial t$ が無視できるということに他ならない. そのためには, 現象の変化の時間スケール τ が緩和時間 τ_e に比べて十分に長いことが必要である:

$$\tau \gg \tau_e = \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

それを言い換えれば, 電気を十分に良く流すので, 考える時間スケールよりも十分速やかに電氣的な中性が達成されるということである. そのため, 電荷密度が $\rho'_e \sim 0$ となる.

まとめると, MHD 近似の世界が現れるのは, 十分に電気を良く通し, 流体とともに動く系で電氣的な中性が速やかに達成されるような系である, ということになる.それほど電気を流さない系では EHD 近似の世界が現れる. 現実的に有用な系では MHD の世界が重要になる場合が多い. そこで, 以下ではずっと MHD 近似を扱う.

以上で議論は一応十分なのだが, いろいろな量の大きさをより明快にするために, 形式的なオーダリングにより MHD 近似を導いてみよう. 簡単のために以下の議論では導体に静止している座標系において考える. 電磁場の諸量を次の様に無次元化する:

$$\mathbf{E}' = E \mathbf{E}_*, \quad (21)$$

$$\mathbf{D}' = \varepsilon_0 E \mathbf{D}_*, \quad (22)$$

$$\mathbf{B}' = B \mathbf{B}_*, \quad (23)$$

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{\mu_0} B \mathbf{H}_*, \quad (24)$$

$$\mathbf{J}' = J_0 \mathbf{J}_*, \quad (25)$$

$$\rho'_e = \rho_{e0} \rho_{e*}. \quad (26)$$

ただし ρ_{e0} , J_0 はそれぞれ電荷密度, 電流密度のスケールであり, 添字 * は無次元量であることを意味している. 無次元化されたマクスウェル方程式は

$$\nabla_* \cdot \mathbf{D}_* = \frac{l \rho_{e0}}{\varepsilon_0 E} \rho_{e*}, \quad (27)$$

$$\nabla_* \cdot \mathbf{B}_* = 0, \quad (28)$$

$$\nabla_* \times \mathbf{E}_* = -\frac{l B}{\tau E} \frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t_*}, \quad (29)$$

$$\nabla_* \times \mathbf{H}_* = \frac{\mu_0 l J_0}{B} \mathbf{J}_* + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 l E}{\tau B} \frac{\partial \mathbf{D}_*}{\partial t_*} \quad (30)$$

となる.

オームの法則 (8) より,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \rightarrow J_0 \mathbf{J}_* = \sigma E \mathbf{E}_*$$

であるから,

$$J_0 = \sigma E = \frac{\varepsilon_0}{\tau_e} E$$

とするのがよい. ここで, $\tau_e \equiv \varepsilon_0 / \sigma$ は電荷の緩和時間である.

さて,

$$\epsilon \equiv \frac{l}{c\tau} \ll 1$$

を導入して無次元化されたファラデーの法則 (29) 及びアンペールの法則 (30) を書き直すと,

$$\nabla_* \times \mathbf{E}_* = -\epsilon \frac{cB}{E} \frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t_*}, \quad (31)$$

$$\nabla_* \times \mathbf{H}_* = \epsilon \frac{E}{cB} \left[\frac{\tau}{\tau_e} \mathbf{J}_* + \frac{\partial \mathbf{D}_*}{\partial t_*} \right]. \quad (32)$$

従って,

$E \sim \epsilon cB$ かつ $\tau \gg \tau_e$ ならば

$$\nabla_* \times \mathbf{E}_* = -\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t_*}, \quad (33)$$

$$\nabla_* \times \mathbf{H}_* = \epsilon^2 \frac{\tau}{\tau_e} \mathbf{J}_* \quad (34)$$

となり, MHD が成り立つ. ここで, $E = \epsilon cB$ とした.

一方

$E \sim \epsilon^{-1} cB$ ならば

$$\nabla_* \times \mathbf{E}_* = 0, \quad (35)$$

$$\nabla_* \times \mathbf{H}_* = \frac{\tau}{\tau_e} \mathbf{J}_* + \frac{\partial \mathbf{D}_*}{\partial t_*} \quad (36)$$

となり, EHD が成り立つ. ただし, $E = \epsilon^{-1} cB$ とした.

2.2 MHD 近似の下での電荷保存則

2.1 節より, MHD 近似の下ではマクスウェル方程式のうちアンペールの法則だけが変更される. すなわち (4) の変位電流が無視できることより, (18) が得られた:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

さらにこの発散を取ると, MHD 近似の下での電荷保存則

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (37)$$

が得られる. MHD 近似の元では電荷密度の時間変化が無視されていることに注意されたい. このことは導体中に電荷がほとんどたまらないということを意味している.

前節の導体に対して静止している系でのスケーリングを用いて考えるならば以下のような議論になる. 電荷密度のスケール ρ_{e0} を無次元化されたガウスの法則 (27) より

$$\rho_{e0} = \varepsilon_0 \frac{E}{l} \quad (38)$$

と選ぶことになる. その結果, 電荷保存則 (5) は

$$\frac{\tau_e}{\tau} \frac{\partial \rho_{e*}}{\partial t_*} + \nabla_* \cdot \mathbf{J}_* = 0. \quad (39)$$

従って $\tau \gg \tau_e$ である, MHD 近似が成立する条件の下では,

$$\nabla_* \cdot \mathbf{J}_* = 0 \quad (40)$$

が得られる. これに対応して,

$$\rho_{e*} = 0, \quad \nabla_* \cdot \mathbf{E}_* = 0 \quad (41)$$

であることになる

2.3 MHD 近似の下でのオームの法則

慣性系とそれに対して相対的に動いている系 (導体とともに動いている) での電磁場の諸量の変換則を MHD 近似の下で書き直し, 動いてる物質に対するオームの法則の表現を求めることにする.

電磁場中を速度 \mathbf{v} で運動している導体について考える. 導体に対して静止している系 (観測者に対して速度 \mathbf{v} で運動する系) の諸量に ' をつけて表し, 観測者のいる系での諸量はそのまま表記することにする. これらはローレンツ変換により

$$\mathbf{E}' = (1 - \gamma) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v}}{v^2} + \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (42)$$

$$\mathbf{B}' = (1 - \gamma) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v}}{v^2} + \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}\right), \quad (43)$$

$$\rho'_e = \gamma \left(\rho_e - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{c^2} \right), \quad (44)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma \rho_e \mathbf{v} \quad (45)$$

という関係で結ばれる. ここで

$$\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (46)$$

である⁷.

MHD 近似の下では, 導体の速さスケール $v = l/\tau$ が光速よりも十分に小さい事より,

$$\gamma = 1. \quad (47)$$

よってローレンツ変換は

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (48)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}, \quad (49)$$

$$\rho'_e = \rho_e - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{c^2}, \quad (50)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} - \rho_e \mathbf{v} \quad (51)$$

と近似される. さらに (49),(51) の右辺の項の大きさをガウスの法則 (1), 電場と磁場のスケールの比 (17), MHD 近似の下でのアンペールの法則 (18) を用いて比較す

⁷ローレンツ変換の導出については別文書を用意すべし

ると

$$\mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2}{\mathbf{B}}\right) = \frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad (52)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\rho_e \mathbf{v}}{\mathbf{J}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{D} \mathbf{v}}{\nabla \times \mathbf{H}}\right) \sim \frac{\varepsilon_0 E v \mu_0 l}{l B} = \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \quad (53)$$

よって (49), (51) の右辺第 2 項は無視することができる。これに対して, (48), (50) の右辺の各項はそれぞれ同じオーダーとなっている。

結果として, MHD 近似の下でのローレンツ変換

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (54)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (55)$$

$$\rho_e' = \rho_e - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{c^2}, \quad (56)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} \quad (57)$$

が得られる。磁場と電流は相対的に動いている系から見ても変わらないが, 電場と電荷密度は系によって見え方が違って来ることに注意されたい。

これらからオームの法則 (8) は

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (58)$$

となる。これが MHD 近似の元でのオームの法則である。

2.4 誘導方程式の導出

MHD 近似を施したマクスウェル方程式とオームの法則から, 磁場 \mathbf{B} 以外の電磁場の諸量を消去することにより, 磁場 \mathbf{B} の時間発展の式である「誘導方程式」を導出する.

MHD 近似の下でのオームの法則 (58) より,

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

である. 左辺の電流密度を (18) より磁場について書き直すと

$$\frac{1}{\sigma} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

である. この回転をとると,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma \mu} \nabla \times \mathbf{B} \right) = \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となる. ここでファラデーの法則 (3) より,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

であるから,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (59)$$

となる. この式は「誘導方程式 (Induction equation)」と呼ばれる. ここで $\eta = 1/\sigma\mu$ は磁気拡散率である. 特に η が場所によらず一定であるならば磁場のソレノイド条件 (2) より

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$$

であるから,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (60)$$

となり, 右辺第 2 項が磁場を拡散させる効果を表していることがわかる.

誘導方程式を用いて磁場 \mathbf{B} の時間発展の計算ができれば, その他の電磁場の量は \mathbf{B} および速度 \mathbf{v} から診断的に定められる. 電流 \mathbf{J} は MHD 近似の下でのアンペールの法則 (18) より

$$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu}. \quad (61)$$

電場 \mathbf{E} は MHD 近似の下でのオームの法則 (58) より

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \eta \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}.\end{aligned}\quad (62)$$

電荷密度は, (58) の発散をとり, (37) を用いると

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

さらに (1) を用いると,

$$\rho_e = -\varepsilon \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).\quad (63)$$

よく用いられる表現は, この右辺を展開し (18) を使うことにより

$$\begin{aligned}\rho_e &= -\varepsilon (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} + \varepsilon \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \\ \rho_e + \varepsilon (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} &= \mu \varepsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}\end{aligned}$$

すなわち

$$\rho_e + \varepsilon (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{c^2}\quad (64)$$

である

この式は, 2.3 節での MHD 近似の元でのローレンツ変換によって求められた電荷の式 (56) に矛盾するように見える. MHD 近似の元では導体に対して静止している系の電荷 ρ'_e は常にゼロであるので, (56) からは

$$0 = \rho_e - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{c^2}$$

となるからである. しかし, この矛盾は (56) が速度 \mathbf{v} が定数である場合 ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) の式であることをわすれていたために発生したものである. (62) は元々 MHD 近似の元での電場のローレンツ変換 (54) であった. (62) 以降の変形は (54) の発散を取っていることに他ならない:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}' &= \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \rightarrow \frac{\rho'_e}{\varepsilon} &= \frac{\rho_e}{\varepsilon} + (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \\ \rightarrow 0 &= \rho_e + \varepsilon (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} - \varepsilon \mu \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

これが (64) である. 速度が場所に依存する場合は $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ とは限らない, ということに注意する必要がある.

2.5 ローレンツ力とマクスウェル応力テンソル

MHD 近似の下での電磁場から流体へ加えられる力 F_M の形を導く. 電磁場から流体へ加わる力 (14) の右辺第 1,2 項の大きさを比較すると, ガウスの法則 (1), 電場と磁場のスケール比 (17), MHD 近似の下でのアンペールの法則 (18) より

$$\mathcal{O}\left(\frac{\rho_e \mathbf{E}}{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}\right) = \frac{\varepsilon E^2}{B^2/\mu} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll \mathcal{O}(1).$$

したがって電場による力は無視でき, (14) はローレンツ力のみとなる. すなわち

$$\mathbf{F}_M = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (65)$$

である.

ローレンツ力はアンペールの法則 (18) を用いて応力の形に変形することができる:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \left\{ -\frac{1}{2} \nabla |\mathbf{B}|^2 + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right\} \\ &= -\nabla \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right) + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \end{aligned}$$

右辺第 1 項の微分の中身 $|\mathbf{B}|^2/2\mu$ は磁気圧と呼ばれる. 運動方程式に代入したときに, 圧力項と同じ形をしているからである. 右辺第 2 項は磁気張力と呼ばれる. 磁力線を曲げたときにこれを真直に引き戻そうとする力が働くことを表している.

さらに成分で表して (2) を用いれば

$$F_{Mi} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{B_k B_k}{2\mu} \right) + \frac{1}{\mu} B_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B_k^2 \right)$$

したがって

$$F_{Mi} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j}, \quad m_{ij} = \frac{1}{\mu} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B_k^2 \right) \quad (66)$$

と表される. m_{ij} は MHD 近似でのマクスウェルの応力テンソルである⁸.

⁸電磁場が応力として作用することを先に知っていることとして力の表現を求めるというやり方もできる. その場合にはマクスウェルの応力テンソル

$$m_{ij} = \varepsilon \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B_k^2 \right)$$

から出発する. 右辺の項を比較すると MHD 近似の下では

$$\frac{\varepsilon |E_i E_j|}{|B_i B_j|/\mu} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll \mathcal{O}(1)$$

となり, 電場による応力の項を無視できることになる. したがって (66) が得られる. さらに応力テンソルの発散を取ったものが流体に働く力として計算され, (65) が得られる.

2.6 磁場のエネルギーの式とジュール熱

熱の式 (11) での電磁場から流体に加えられる熱 H_M の具体的な形を見出すために、磁場のエネルギーの式を導いてみる。簡単のため σ も一定とする。

誘導方程式 (59) の辺々と \mathbf{B}/μ との内積をとると

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}).$$

それぞれの項は

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right), \\ \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{\mu} \nabla \cdot [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] + \frac{1}{\mu} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu} \nabla \cdot [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} \\ &= \frac{1}{\mu} \nabla \cdot [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}), \\ -\frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \left[\frac{\eta}{\mu} (\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B}) \right] - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \left(\frac{\eta}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} \right), \\ &= \nabla \cdot (\eta \mathbf{B} \times \mathbf{J}) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma}. \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right) &= \frac{1}{\mu} \nabla \cdot [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\eta \mathbf{B} \times \mathbf{J}) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \\ &= \nabla \cdot \left[(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \eta \mathbf{B} \times \mathbf{J} \right] - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

さらに MHD 近似の元でのオームの法則 (58) を用いて右辺第 1 項目を変形すると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \eta \mathbf{B} \times \mathbf{J} \right] &= -\nabla \cdot \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \right) \right] \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times \mathbf{E} \right) = -\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right). \end{aligned}$$

よって磁場のエネルギーの式が次のように得られる:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right) = -\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma}. \quad (67)$$

左辺が磁場のエネルギーの時間変化、右辺第 1 項が磁場エネルギーフラックス (ポインティングベクトル) の収束による磁場エネルギーの増加、第 2 項目は磁場がロー

レンツ力を通じて流体に対して行う仕事である。第 3 項目は抵抗を持つ導体に電流が流れることで発生するジュール熱である。この項は常に正である。磁場のエネルギーが減少する分は、流体が熱として受とりあたまらなければならない。したがって

$$H_M = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \quad (68)$$

であることが見出される。

3 MHD の基礎方程式

以上より, MHD 近似を施した電磁流体の支配方程式 (MHD 方程式系) は次のようにえられる.

誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (69)$$

磁場のソレノイド条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (70)$$

アンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (71)$$

質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (72)$$

運動方程式

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (73)$$

熱の式

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s \right] = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \quad (74)$$

状態方程式と基準圧力における比熱の値

$$\rho = \rho(p, T), \quad c_p = c_{p0}(p_0, T) \quad (p_0 \text{ は適当な基準圧力}) \quad (75)$$

そして流体の構成方程式 (以下の式は, ナビエ・ストークス流体の場合)

$$\tau_{ij} = \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (76)$$

である.

透磁率 μ , 磁気拡散率 η , 熱伝導率 k , そして動粘性率 ν は適宜与えられなくてはならない.

4 電磁場の境界条件

電気伝導度の異なる 2 つの媒質の境界における電磁場の接続条件を導出する。

4.1 法線成分

場の法線成分の接続条件を導出する。図 1 のような、領域 1(図の上側)と 2(図の下側)を分ける境界を挟んだ微小体積 V を考える。境界面において領域 2 から 1 へ向かう法線ベクトル(図の上向き)を \mathbf{n} とする。面 S_1, S_2 は領域 V の上端と下端の面とする。以後、添字 1, 2 は領域 1, 2 の物理量を示しているとする。

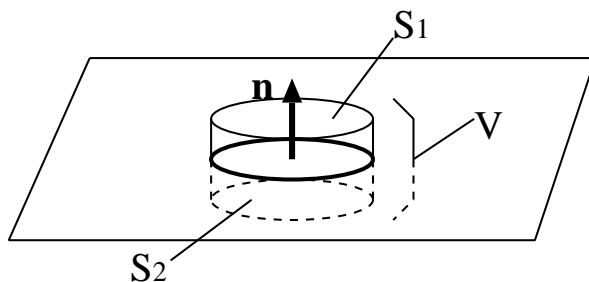


図 1: 法線成分の境界条件を考えるための積分領域

先ず磁束密度 \mathbf{B} について考える。磁場のソレノイド条件 (2) を領域 V で積分する。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0. \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_S dS = 0. \quad (77)$$

ここで \mathbf{n}_S は V を囲む閉曲面 S の外向き単位法線ベクトルである。領域を薄くしていくことにより、境界に平行な面の寄与だけが残る、

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (78)$$

となる。この式が任意の S_1, S_2 について成り立つには、

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0. \quad (79)$$

すなわち境界を挟んで $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ が連続でなければならない。

次に電流密度 \mathbf{J} について考える。MHD 近似の下での電荷保存則 (37) に対して \mathbf{B} と同様の計算を行うことで

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = 0, \quad \rightarrow \quad \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (80)$$

したがって境界において $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ が連続となる:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0. \quad (81)$$

最後に電場 \mathbf{E} について考える. \mathbf{E} に関しては特別の考慮が必要となる. これまで同様にガウスの法則 (1) を積分すると

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho_e}{\varepsilon} dV \rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_S dS = \int_V \frac{\rho_e}{\varepsilon} dV \quad (82)$$

となる. ここで電荷密度 ρ_e が有限であるならば領域を薄くしていくと $\int_V (\rho_e/\varepsilon) dV \rightarrow 0$ となり, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ は連続となる.

しかしながら, MHD 近似の下では電気伝導度が異なる伝導体との境界面において必ず電荷が存在すること, すなわち ρ_e が有限ではないことに注意しなければならない. このことは MHD 近似の下でのオームの法則 (58) において境界で $\mathbf{v} = 0$ であるとした場合を考えることで理解される. $\mathbf{v} = 0$ とおいたオームの法則

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

を閉曲面 S で面積分すると, 既に述べたように $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ は境界において連続であるから, $\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ も境界において連続である. しかし σ は境界を挟んで異なるので $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ は境界で不連続となる. これは境界表面に電荷が存在すること, すなわち積分領域を小さくしても積分 $\int_V \rho_e dV$ が 0 にならない事を意味している. よって境界面での単位面積あたりの電荷密度 σ_{eS} を導入する:

$$\int_V (\rho_e/\varepsilon) dV \rightarrow \int_S \sigma_{eS} dS. \quad (83)$$

従って

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \frac{\sigma_{eS}}{\varepsilon} dS. \quad (84)$$

よって電束密度の法線成分の境界条件は一般に次式で表される:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\sigma_{eS}}{\varepsilon}. \quad (85)$$

4.2 接線成分

電磁場の法線成分の接続条件を導出する. 図2のような領域 1 と 2 を分ける境界と直行して交わる微小平面 $S_3(A_1C_1C_2A_2)$ を考える. S_3 の法線ベクトルを \mathbf{n}_S とし, 境界面と S とが成す交線の単位接ベクトルを \mathbf{t} , 境界面全体の法線ベクトルを \mathbf{n} とする.

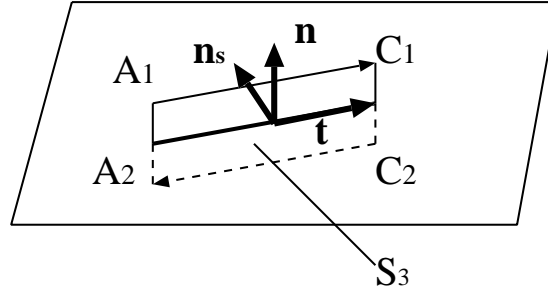


図 2: 接線成分の境界条件を考えるための積分領域

先ず電場 \mathbf{E} の接線成分について考える. ファラデーの法則 (3) を面 S に関して面積分する事で

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_S dS = - \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_S dS \rightarrow \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_S dS = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (86)$$

となる. ただし C は面 S を囲む閉曲線であり, $d\mathbf{l}$ はその単位接ベクトルである. 境界面を挟む方向の辺を短くして領域 S を小さくしていく. $\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_S dS \rightarrow 0$ となるので,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (87)$$

が成立する. すなわち電場の接線成分は連続でなければならない.

次に磁場 \mathbf{B} の接線成分を考えるため, MHD 近似の下でのアンペールの法則 (18) を面積分する.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_S dS = \int_S \mu \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_S dS \rightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mu \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_S dS. \quad (88)$$

\mathbf{J} が有限であれば $\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_S dS \rightarrow 0$ であるから, 閉曲線の積分も境界面に平行な部分からの寄与だけが残り, \mathbf{B} の接線成分が連続となる:

$$\int_{A_1 C_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl - \int_{C_2 A_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = 0. \quad (89)$$

しかしながら, 境界の一方が完全導体 (電気伝導度が無限大) の場合には境界面に集

中した電流が存在してしまう⁹. このため単位体積あたりの電流密度が無限大となり $\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_S dS \rightarrow 0$ とはならない. よって境界面での単位面積あたりの電流密度 \mathbf{J}_S を導入して

$$\int_S \mu \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_S dS \rightarrow \int_{CA} \mathbf{J}_S \cdot \mathbf{n}_S dl \quad (90)$$

とする. このことより,

$$\int_{CA} \mu \mathbf{J}_S \cdot \mathbf{n}_S dl = \int_{A_1 C_1} \mathbf{n}_S \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) dl - \int_{C_2 A_2} \mathbf{n}_S \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) dl$$

となる. ここで $\mathbf{t} = \mathbf{n}_S \times \mathbf{n}$ を用いた. この式が任意の面について成り立たねばならないので, 磁場の接線成分について

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu \mathbf{J}_S \quad (91)$$

が成立する.

最後に電流密度 \mathbf{J} の接線成分についてである. これは一般に不連続であることが MHD 近似の元でのオームの法則 (58) において速度が 0 となる場合

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

を考えると理解される. この式を閉曲線 C のまわりで周積分し, 境界を挟む方向の線分を短くして面 S を小さくしていくと, 既に見たように $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ は常に連続であるから, $\mathbf{n} \times (\sigma \mathbf{E})$ は一般に不連続であり, $\mathbf{n} \times \mathbf{J}$ も一般には不連続となる. すなわち:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \neq 0. \quad (92)$$

⁹電気伝導度が無限大であるため, 電場は常に $\mathbf{E} = 0$ (すぐに電荷が移動して電場を遮蔽する) であるにもかかわらず, \mathbf{J} が有限な値をとり得る事に起因する. 形式的にはオームの法則 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ において, $\sigma \rightarrow \infty$, $\mathbf{E} = 0$ であるから \mathbf{J} は不定形であり, 電場に全く関係のない電流が存在し得る事になる.

4.3 境界条件まとめ

導出された境界条件をまとめると

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu \mathbf{J}_S, \quad (93)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\rho_e S}{\varepsilon}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad (94)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \neq 0. \quad (95)$$

すでに述べた様に, 表面電流 \mathbf{J}_S は一方が完全導体である場合にのみ存在するので, それ以外の場合には $\mathbf{J}_S = 0$ としてよい.

これらの条件のうち実際に問題を解く上で必要となる条件はなんだろうか. 誘導方程式 (59) はそもそもマクスウェル方程式のうちファラデーの法則 (3) とアンペールの法則 (18) を使って導出された. よってこの二つから導かれる境界条件

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad (96)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (97)$$

が基本的には問題を解くのに必要な条件である. すなわち, 境界条件は電場と磁場の接線成分が境界において連続となることである.

上記二つの条件が満たされるならば残りの条件は問題を解くには不要である. そもそも磁場のソレノイド条件 (2) はファラデーの法則 (3) の発散の初期条件に対する制約であったから, (2) より導出される

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (98)$$

は (96) の初期条件に対する制約でしかなく, (96) が満たされていれば自動的に満たされていることになる. 同様に MHD 近似の元での電荷保存則 (37) はアンペールの法則 (18) の発散から得られるので,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0 \quad (99)$$

は, (97) が満たされれば, 自動的に満たされる. 最後に残った

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\rho_e S}{\varepsilon} \quad (100)$$

は, MHD 近似では高次の微小量になってしまうガウスの法則 (1) から得られるものなので, 表面電荷密度が必要となるときに使えば良いだけで磁場を解く際には関係がない.

境界面の一方が完全導体や絶縁体であるときには、特別の考慮が必要になる。まず、一方が絶縁体（電気伝導度が 0）である場合には、絶縁体側の電場が決まらなくなってしまい、電場の接線成分の連続条件 (96) が使えなくなる。しかし、磁場のソレノイド条件 (2) は依然として成り立っていないから¹⁰、(96) に代えて磁場の法線成分の連続条件 (98) を用いる。これらを組み合わせる事で境界条件は

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0,$$

すなわち、磁場 \mathbf{B} が境界で連続であることである¹¹：

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2. \quad (101)$$

一方が完全導体の場合には表面電流 \mathbf{J}_S が存在するので磁場の接線成分に関する条件

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu \mathbf{J}_S \quad (102)$$

は表面電流を決める式になり、境界条件として用いる事はできない。よって完全導体の場合に問題を解くための境界条件は

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0. \end{aligned}$$

となる。

¹⁰絶縁体側では $\sigma = 0$ であり $\mathbf{J} = 0$ となる。この場合の絶縁体側の磁場は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ と $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ から求められる。よくなされる解き方としては、 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ より $\mathbf{B} = \nabla V$ のように、磁気ポテンシャル V を導入する。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ よりこのポテンシャルは $\nabla^2 V = 0$ を満たす。このラプラス方程式を解けばよい。

¹¹ポテンシャル場では、磁場の法線成分、すなわち $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \partial V / \partial n$ が境界で決まれば、内部の磁場を求めることができる（第二種ディレクレ問題）。しかしこれは境界条件が磁場の法線成分の連続性だけで十分ということの意味するわけではない。

5 回転系での MHD 方程式

誘導方程式は回転系でも同じ形をしていることを示す. 誘導方程式 (69) の右辺第 2 項を展開すると.

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

となるので, 誘導方程式は

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (103)$$

となる. ここで D/Dt はラグランジュ微分

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$$

である.

次に慣性系に対して角速度 Ω で回転している座標への座標変換を考える. これらの座標の間では, 任意のベクトル \mathbf{A} とラグランジュ微分に対して

$$\left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_I = \left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_R + \Omega \times \mathbf{A}$$

が成立する. ここで添字 I, R はそれぞれ慣性系と回転系のものであることを表している. この関係式より, 慣性系と回転系での速度について

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v}_R + \Omega \times \mathbf{r}$$

が成立する. よって

$$\left(\frac{D\mathbf{B}}{Dt} \right)_I = \left(\frac{D\mathbf{B}}{Dt} \right)_R + \Omega \times \mathbf{B}$$

が成立する.

以上の関係式を用いて, (103) を回転系での表現に書き直すと,

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{B}}{Dt} \right)_I &= -\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}_I) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}_I + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \\ &= -\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}_R) - \mathbf{B}[\nabla \cdot (\Omega \times \mathbf{r})] + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}_R + (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\Omega \times \mathbf{r}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \end{aligned}$$

回転系での回転角速度 Ω が一定であるとする,

$$\left(\frac{D\mathbf{B}}{Dt} \right)_I - \Omega \times \mathbf{B} = -\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}_R) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}_R + \eta \nabla^2 \mathbf{B}.$$

したがって, 回転系での誘導方程式は

$$\left(\frac{D\mathbf{B}}{Dt} \right)_R = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}_R - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}_R) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (104)$$

となる. よって誘導方程式は回転系でも慣性系での表現と変わらないことがわかる.

6 エネルギー保存則

6.1 運動エネルギー保存則

運動エネルギーは, (73) に \boldsymbol{v} を内積することで得られる¹²:

$$\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \right] \cdot \boldsymbol{v} = \left(-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \boldsymbol{v}.$$

質量保存則 (9) を用いて流束形式に変形すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\boldsymbol{v}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\boldsymbol{v}|^2 \boldsymbol{v} \right) + \nabla \cdot (p \boldsymbol{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}) = p \nabla \cdot \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}, \quad (105)$$

となる. 左辺第 1 項が運動エネルギーの時間変化, 2,3,4 項が運動エネルギー流束密度の収束, 右辺第 1, 2 項が内部エネルギーとの変換項, 第 3 項がローレンツ力がする仕事であり, 磁場エネルギーとの変換を表している.

¹²磁場との相互作用がない場合のエネルギーの式はシリーズ「連続体力学 (流体力学/弾性体力学) の定式化」に詳しい.

6.2 磁場エネルギー保存則

既に第 2.6 節にて導出したように磁場のエネルギーは, (69) に \mathbf{B}/μ_0 を内積することで得られる:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right) = -\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma}. \quad (106)$$

左辺が磁場のエネルギーの時間変化, 右辺第 1 項が磁場エネルギーフラックス (ポインティングベクトル) の収束による磁場エネルギーの増加, 第 2 項目がローレンツ力を通じて流体に対して行う仕事である. 第 3 項目は抵抗を持つ導体に電流が流れることで発生するジュール熱である.

系が定常であり, 境界において磁場エネルギーフラックスの収支がゼロである場合に, (106) を系全体で体積分することで,

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_V \left\{ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \right\} dV \\ &\rightarrow \int_V \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV = - \int_V \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} dV. \end{aligned} \quad (107)$$

これは定常な系においては, 系全体では磁場が流体に体して行う仕事とジュール熱が等しい事を意味している.

6.3 内部エネルギー保存則

内部エネルギーの保存則は、既に示している熱の式を変形することで得られる。熱の式 (74) に対して熱力学関係式

$$Tds = du + pd(1/\rho) = du - \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

を用いて内部エネルギー u の式に書き直すと

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u \right] - \frac{p}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho \right] = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \cdot (k\nabla T) + \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma}.$$

この式は質量保存則を用いることにより

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u \right] + p\nabla \cdot \mathbf{v} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \cdot (k\nabla T) + \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma}$$

あるいは、

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \cdot (k\nabla T) + \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \quad (108)$$

と変形できる。

6.4 全エネルギー保存則

全エネルギーの保存則は、運動エネルギー・磁場エネルギー・内部エネルギーの式 (105), (106), (108) を足すことにより得られる:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(E_{tot})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} &= 0, \\ E_{tot} &= \rho \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \rho u + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu}, \\ \mathbf{F} &= \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + \rho u \mathbf{v} + p \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} - k \nabla T + \mathbf{E} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B}.\end{aligned}\tag{109}$$

参考文献

- Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.(著), 井上健夫, 安河内昂, 佐々木健 (共訳), 1962:
『電磁気学 – 連続媒質の電気力学 –』第 1 巻. ランダウリフシツ理論物理学
教程, 東京図書.
- 砂川 重信 1973: 理論電磁気学, 紀伊国屋書店, 459pp.
- 電磁流体力学, 第 2 版流体力学ハンドブック第 22 章, 丸善, 951–960.
- 吉田茂生, 1990: 電磁流体力学入門. GFD ノート 『電磁流体力学』第 1 章.
- Gubbins, D., and Roberts, P.H., 1987: Magnetohydrodynamics of the earth's core.
Jacobs, J.A., Ed., *Geomagnetism*, Vol.2, 1–184.
- Pedlosky, J., 1987 : Geophysical Fluid Dynamics. Springer Verlag, 710pp.

謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた、流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっているものである。原作版は吉田茂生による「電磁流体力学入門」(1990-07-03)であり、竹広真一、佐々木洋平、吉田茂生、林祥介によって「磁気流体力学の定式化」として書き直された(2002-07-05)。セミナー参加者および校正とデバッグに協力してくれたすべての方々に感謝するものである。

本資源は、地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

<http://www.gfd-dennou.org/arch/riron/mhd/teishiki/pub>

において公開されているものである。©吉田茂生・竹広真一・佐々木洋平・林祥介 (S. Yoshida, S. Takehiro, Y. Sasaki and Y.-Y. Hayashi) 2001. 本資源は、著作者の諸権利に抵触しない(迷惑をかけない)限りにおいて自由に利用していただいて構わない。なお、利用する際には今一度自ら内容を確認することを願います(無保証無責任原則)。

本資源に含まれる元資源提供者(図等の版元等を含む)からは、直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが、勝手ながら、「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ、学術標準の引用手順を守ることによって諸手続きを略させていただいている。本資源の利用者には、この点を理解の上、注意して扱っていただけるようお願いする。万一、不都合のある場合には

riron@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いです。