

大気中での音波と重力波

ここでは、大気中に発生する主な波である音波と重力波について、それぞれの波の分散関係を導出することで、異なった方程式系（近似度）においてそれぞれの波がどのように変調されるのかを考察する。

基礎方程式系は大気の 3 次元運動方程式：

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j [(\rho v_i) v_j] = -\partial_i p - \rho g \delta_{i3}, \quad (\text{ap13.2.1})$$

質量保存の式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j [\rho v_j] = 0, \quad (\text{ap13.2.2})$$

熱エネルギーの式：

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_j \partial_j \theta = 0, \quad (\text{ap13.2.3})$$

である *1. 表記の簡略化のため、アインシュタインの縮約表記を用いている。そのため、クロネッカーのデルタ δ は以下の性質をもつ：

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} .$$

また、微分表記は

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

である *2. このとき、各方程式における記号は以下のとおりである：

v_i = 速度, ρ = 密度, θ = エントロピー, p = 圧力, g = 重力加速度, Ω = 地球の自転角速度.

本節では大気が理想気体であると仮定する。よって、エントロピー θ は温位に比例し、理想気体の状態方程式が成立する。つまり、熱エネルギー方程式は温位が

$$\theta = \frac{p}{\rho R_d} p_0^{-\kappa} p^\kappa$$

という関係をもつことを用いて、

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_j \partial_j p = \gamma R_d T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \partial_j \rho \right), \quad (\text{ap13.2.4})$$

に書き換えられる。ただし、 $\gamma \equiv C_p/C_v$ という比熱比である。(ap13.2.1), (ap13.2.2), (ap13.2.4) の各変数について線形化を行う。その際、基本場は鉛直方向に静力学平衡した静止大気場をとることにする。すると、任意の熱力学変数 φ については、

$$\varphi = \varphi_0(x_3) + \varphi'(x_i, t)$$

*1 計算を簡単にするために地球の自転に由来するコリオリ力はここでは考えない。

*2 アインシュタインの縮約表記では、時間微分に関しても縮約されるが、今回は時間微分が分散関係の違いに依存するため区別しやすいように縮約していない。

という形で、力学変数については

$$v_i = v'_i(x_i, t)$$

という形で表現する。このとき、静力学平衡した場を添え字 0 で、そこからの摂動をプライムで表現する。静力学平衡場は常に以下の関係を満たす：

$$\partial_3 p_0 = -g\rho_0.$$

この表現を用いて、支配方程式を摂動についての線形方程式に近似すると、

$$\rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial t} = -\partial_i p' - \rho' g \delta_{i3}, \quad (\text{ap13.2.5})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \partial_j v'_j + v'_3 \partial_3 \rho_0 = 0, \quad (\text{ap13.2.6})$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - g\rho_0 v'_3 = \gamma R_d T_0 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v'_3 \partial_3 \rho_0 \right). \quad (\text{ap13.2.7})$$

静止大気を基本場にとった場合、非線形移流項は線形化の際に必ずゼロとなることに注意する。また、基本場の空間微分は鉛直成分しかもたないことに注意する：

$$\partial_j \varphi_0 = \partial_3 \varphi_0.$$

さらに、天降り的ではあるが計算の簡単化のため、各従属変数を以下のように密度で規格化しておく：

$$v_i^* \equiv \sqrt{\rho_0} v'_i, \quad p^* \equiv \frac{p'}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \rho^* \equiv \frac{\rho'}{\sqrt{\rho_0}}.$$

すると、(ap13.2.5), (ap13.2.6), (ap13.2.7) はそれぞれ、

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t} = -\partial_i p^* + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} (\partial_3 \rho_0) p^* \delta_{i3} - \rho^* g \delta_{i3}, \quad (\text{ap13.2.8})$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \partial_j v_j^* + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} (\partial_3 \rho_0) v_3^* = 0, \quad (\text{ap13.2.9})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} - g v_3^* = \gamma R_d T_0 \left[\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} (\partial_3 \rho_0) v_3^* \right]. \quad (\text{ap13.2.10})$$

さらに、大気は等温であると仮定すると^{*3},

$$c_s^2 \equiv \gamma R_d T_0, \quad -\frac{1}{H_0} \equiv -\frac{g}{R_d T_0} = \rho_0^{-1} \partial_3 \rho_0$$

という 2 つの定数が定義でき^{*4}, (ap13.2.8), (ap13.2.9), (ap13.2.10) はそれぞれ、

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t} = -\partial_i p^* - \frac{1}{2H_0} p^* \delta_{i3} - \rho^* g \delta_{i3}, \quad (\text{ap13.2.11})$$

^{*3}等温大気である場合、静力学場は圧力と密度のみが高度方向に変化し、その変化傾向は

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0 = -g \frac{p_0}{R_d T_0} \Rightarrow \begin{cases} p_0(z) = p_s e^{-g/R_d T_0 z}, \\ \rho_0(z) = \rho_s e^{-g/R_d T_0 z}, \end{cases}$$

と陽に計算できることに注意する。ここで、 p_s , ρ_s は地表面での値を表す。

^{*4}これらの定数はそれぞれ音波の位相速度と密度のスケールハイトに相当することに注意する。

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \partial_j v_j^* - \frac{1}{2H_0} v_3^* = 0, \quad (\text{ap13.2.12})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} - g v_3^* = c_s^2 \left(\frac{\partial \rho^*}{\partial t} - \frac{1}{H_0} v_3^* \right). \quad (\text{ap13.2.13})$$

ここで、大気場に以下のような平面波を設定する：

$$\begin{aligned} v_i^* &= V_i e^{i(k_j x_j - \omega t)}, \\ p^* &= P e^{i(k_j x_j - \omega_p t)}, \\ \rho^* &= R e^{i(k_j x_j - \omega_r t)}. \end{aligned}$$

ここで、 k_i , ω はそれぞれ平面波の波数と振動数を表す。また、後の議論のために、圧力由来の波と密度由来の波については振動数について区別できるようにしている。この段階では力学場の振動数と圧力、密度の振動数が異なっても構わない。すると、(ap13.2.11), (ap13.2.12), (ap13.2.13) 式は

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 0 & 0 & ik_1 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & ik_2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega_w & ik_3 - 1/2H_0 & g \\ ik_1 & ik_2 & ik_3 - 1/2H_0 & 0 & -i\omega_r \\ 0 & 0 & -g + c_s^2/H_0 & -i\omega_p & ic_s^2\omega_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ P \\ R \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{ap13.2.14})$$

となる。このとき、 V_i , P , R が非自明な解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} -i\omega & 0 & 0 & ik_1 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & ik_2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega_w & ik_3 - 1/2H_0 & g \\ ik_1 & ik_2 & ik_3 - 1/2H_0 & 0 & -i\omega_r \\ 0 & 0 & -g + c_s^2/H_0 & -i\omega_p & ic_s^2\omega_{rs} \end{vmatrix} = 0$$

でなければならない。これは ω , k について

$$\begin{aligned} &\omega \left[\omega \omega_p \omega_w \omega_r + \left(ik_3 - \frac{1}{2H_0} \right)^2 c_s^2 \omega_{rs} \omega + \left(ik_3 - \frac{1}{2H_0} \right) \left\{ g \omega \omega_p + \left(-g + \frac{c_s^2}{H_0} \right) \omega_r \omega \right\} \right. \\ &\quad \left. - c_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \omega_w \omega_{rs} + c_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \left(-\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_0} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{ap13.2.15})$$

という関係が成り立つことと同義である。今、 $\omega = \omega_w = \omega_p = \omega_r = \omega_{rs}$ となるモードのみ考えると、上式は

$$\omega \left[\omega^4 - \left\{ c_s^2 \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right) \right\} \omega^2 + c_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \left(-\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_0} \right) \right] = 0. \quad (\text{ap13.2.16})$$

このうち、非自明な根は以下の 4 種類である：

$$\omega = \pm \frac{c_s}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4N^2(k_1^2 + k_2^2)}{c_s^2 \left(|\mathbf{k}|^2 + 1/4H_0^2\right)^2}} \right]^{1/2}. \quad (\text{ap13.2.17})$$

ここで、

$$N^2 \equiv \frac{g}{H_0} - \frac{g^2}{c_s^2}$$

とおいた。この N はブラント・パイサラ振動数に等しい。なぜなら、 $\rho_0 = \rho_0(\theta_0, p_0)$ から、

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \theta_0}\right)_{p_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0}\right)_{\theta_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_3} = -\frac{\rho_0}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0}\right)_{\theta_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_3}$$

となるので、ブラント・パイサラ振動数を $\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}$ で定義すると、上式を温位の微分について書き直して

$$\begin{aligned} \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial x_3} &= -\frac{g}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0}\right)_{\theta_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_3} \right\} \\ &= -\frac{g}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} - \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_3} \right\} \\ &= \frac{g}{H_0} - \frac{g^2}{\gamma R_d T_0} \\ &= \frac{g}{H_0} - \frac{g^2}{c_s^2} \end{aligned}$$

となる。これは先に定義した N に等しくなるため、 N はブラント・パイサラ振動数に等しい。

(ap13.2.17) 式の振動数のうち、音波は

$$\omega_{s\pm} = \pm \frac{c_s}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4N^2(k_1^2 + k_2^2)}{c_s^2 \left(|\mathbf{k}|^2 + 1/4H_0^2\right)^2}} \right]^{1/2},$$

重力波は

$$\omega_{g\pm} = \pm \frac{c_s}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4N^2(k_1^2 + k_2^2)}{c_s^2 \left(|\mathbf{k}|^2 + 1/4H_0^2\right)^2}} \right]^{1/2}$$

である。それは、 $N \rightarrow 0$ という密度成層していない状況において、

$$\omega_{s\pm} \rightarrow \pm c_s \sqrt{\left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)}$$

となることから確認できる。なぜなら、 x_1 方向にしか波が伝播しない状況を考えると、上式から得られる波の位相速度 c_x は

$$c_x = \frac{\omega_{s\pm}}{k_1} = \pm c_s$$

となり、音波の速度に一致するからである。一方、重力波の振動数について密度成層していない極限を考えると、

$$\omega_{g\pm} \rightarrow 0$$

となり、密度成層していない状況では重力波は伝播しないことがわかる。これは、重力波が浮力を復元力に伝わる波であることを表している。密度成層していない環境では浮力が発生しないからである。さらに詳細に $N \rightarrow 0$ 周りの重力波の振る舞いを調べるために、

$$\frac{4N^2(k_1^2 + k_2^2)}{c_s^2(|\mathbf{k}|^2 + 1/4H_0^2)^2} \rightarrow 0$$

という状況で $\omega_{g\pm}$ を漸近展開すると、

$$\begin{aligned} \omega_{g\pm} &\rightarrow \pm \frac{c_s}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)} \left[1 - \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{4N^2(k_1^2 + k_2^2)}{c_s^2(|\mathbf{k}|^2 + 1/4H_0^2)^2}\right\}\right]^{1/2} \\ &= \pm N \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{(|\mathbf{k}|^2 + 1/4H_0^2)}} \end{aligned} \quad (\text{ap13.2.18})$$

が得られる。これが非静力学系における重力波の近似的な分散関係である。以降では、この重力波の分散関係を「非静力学系」の重力波分散関係と表記する。ここからはいくつかの近似を適用することで、伝播する波の性質がどのように変化するかを調べる。

初めの近似は「静力学近似」である。静力学近似は $\frac{\partial v_3^*}{\partial t} = 0$ にした近似である。つまり、(ap13.2.15) 式において、 $\omega_w = 0$ にすることと等価である。よって、分散関係は

$$\omega \left[\left(ik_3 - \frac{1}{2H_0}\right)^2 c_s^2 \omega_{rs} \omega + \left(ik_3 - \frac{1}{2H_0}\right) \left\{ g\omega \omega_p + \left(-g + \frac{c_s^2}{H_0}\right) \omega_r \omega \right\} + c_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \left(-\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_0}\right) \right] = 0$$

となる。 $\omega = \omega_p = \omega_r = \omega_{rs}$ とすると、

$$\omega \left[-\left(k_3^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right) \omega^2 + (k_1^2 + k_2^2) \left(-\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_0}\right) \right] = 0$$

なので、 ω について解くと、

$$\omega_{g\pm} = \pm N \sqrt{\frac{(k_1^2 + k_2^2)}{\left(k_3^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)}} \quad (\text{ap13.2.19})$$

が得られる。これは、先に導出した $N \rightarrow 0$ での漸近極限 (ap13.2.18) について

$$k_1^2 + k_2^2 \ll k_3^2$$

と近似した形に等しい^{*5}。これは、重力波の水平スケールが鉛直スケールよりはるかに大きければ、静力学近似を用いても重力波の表現についての誤差は小さいことを示している。また、この関係から明らかに音波は $\omega = 0$ となり、静力学近似系では音波の伝播は起こらない。

次の近似は「非弾性近似」と呼ばれる近似である。これは、Ogura and Phillips (1962) で提案されたもので、鉛直流の時間変化は無視しないが、連続の式において密度の時間変化を無視する系である^{*6}。つまり、(ap13.2.15) 式において、 $\omega_r = 0$ にすることと等価である。よって、分散関係は

$$\omega \left[\left(ik_3 - \frac{1}{2H_0} \right)^2 c_s^2 \omega_{rs} \omega + \left(ik_3 - \frac{1}{2H_0} \right) g \omega \omega_p - c_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \omega_w \omega_{rs} + c_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \left(-\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_0} \right) \right] = 0$$

となる。 $\omega = \omega_p = \omega_w = \omega_{rs}$ とすると、

$$\omega \left[\left\{ \left(-k_3^2 + \frac{1}{4H_0^2} - \frac{ik_3}{H_0} \right) + \left(ik_3 - \frac{1}{2H_0} \right) \frac{g}{c_s^2} \right\} \omega^2 - (k_1^2 + k_2^2) \omega^2 + (k_1^2 + k_2^2) \left(-\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_0} \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \omega \left[\left(\frac{1}{2H_0} - ik_3 \right) \left(-\frac{g}{H_0} + \frac{g^2}{c_s^2} \right) \frac{\omega^2}{g} - \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right) \omega^2 + (k_1^2 + k_2^2) \left(-\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_0} \right) \right] = 0$$

なので、 ω について解くと、

$$\omega_{g\pm} = \pm N (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \left\{ \frac{N^2}{g} \left(\frac{1}{2H_0} - ik_3 \right) + \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right) \right\}^{-1/2} \quad (\text{ap13.2.20})$$

^{*5}ap13.2.18) 式を $k_1^2 + k_2^2 \ll k_3^2$ という近似のもとで以下のように変形すれば明らかである：

$$\begin{aligned} \text{r.h.s.}(\text{ap13.2.18}) &= \pm N \sqrt{\frac{1}{1 + k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)^{-1} + (4H_0^2)^{-1} (k_1^2 + k_2^2)^{-1}}} \\ &\approx \pm N \sqrt{\frac{1}{k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)^{-1} + (4H_0^2)^{-1} (k_1^2 + k_2^2)^{-1}}} \\ &= \pm N \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{(k_3^2 + 1/4H_0^2)}}. \end{aligned}$$

^{*6}この系は非静力学であるが、音波を除去できる系である。なお、密度は時間変化のみ無視され、鉛直方向の変化は保持されている。

が得られる。極形式で表現すると、

$$\begin{aligned}
\omega_{g\pm} &= \pm N (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \left\{ \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} + \frac{N^2}{g} \frac{1}{2H_0} \right)^2 + \left(k_3 \frac{N^2}{g} \right)^2 \right\}^{-1/4} e^{-i\theta/2} \\
&= \pm N (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \left\{ \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right)^2 + \frac{N^2}{gH_0} \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right) + \frac{N^4}{4g^2H_0^2} + \left(k_3 \frac{N^2}{g} \right)^2 \right\}^{-1/4} e^{-i\theta/2} \\
&= \pm N \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{|\mathbf{k}|^2 + 1/4H_0^2}} \\
&\quad \times \left\{ 1 + \frac{N^2}{gH_0} \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right)^{-1} + \frac{N^4}{g^2} \left(\frac{1}{2H_0} + k_3 \right)^2 \left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right)^{-2} \right\}^{-1/4} e^{-i\theta/2}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\theta = \arctan \left[-\frac{\frac{k_3 N^2}{g}}{\left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2} + \frac{N^2}{g} \frac{1}{2H_0} \right)} \right]$$

となり、この位相分だけ振幅も変化することになる。しかし、いずれのモードも重力波のみで音波は現れない。

最後の近似は「ブシネスク近似」である。この近似は鉛直流の時間変化を無視しないが、非弾性近似と同様に連続の式における密度の時間変化を無視する。さらに、圧力の時間変化と基本場の密度、圧力の高度依存性も無視してしまう。つまり、 $\omega_r = \omega_p = 0$ でありかつ、

$$1/H_0 \ll k_3$$

とおくことに等しい。よって、このときの分散関係式は (ap13.2.15) 式から

$$\omega \left[-k_3^2 \omega_{rs} \omega - (k_1^2 + k_2^2) \omega_w \omega_{rs} + (k_1^2 + k_2^2) N^2 \right] = 0$$

となり、 $\omega_w = \omega_{rs} = \omega$ とすると、

$$\omega_{g\pm} = \pm N \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{|\mathbf{k}|^2}}.$$

この近似においても音波モードは現れない。

以上をまとめると、

— 3次元成層大気での波 —

- 非静力学系においては, 2つの音波モードと2つの重力波モードが現れる.
- このうち, 音波モードは以下の3種類の近似, いずれかを使用することで除去することができる:
 - 静力学近似 (鉛直流の時間変化がない)
 - 非弾性近似 (連続の式での密度の時間変化がない)
 - ブシネスク近似 (連続の式での密度の時間変化, 基本場熱力学変数の高度依存性がない)

- 静力学近似を適用する場合は, 扱う現象の空間アスペクト比が小さくなければならない.

$$k_1^2 + k_2^2 \ll k_3^2.$$

- 非弾性近似とブシネスク近似は音波が発生しない, 非静力学方程式系である.

静力学系では音波が除去されることを示した. しかし, 水平方向に地面のような固定の境界が存在する場合, 音波の特別な形が存在する. 水平方向の境界が $x_3 = 0$ に存在すると仮定すると, そこでは法線方向の速度である v_3^* が0となる^{*7}. この場合, 方程式系 (ap13.2.11) から (ap13.2.13) は

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial t} = -\partial_1 p^*, \quad (\text{ap13.2.21})$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t} = -\partial_2 p^*, \quad (\text{ap13.2.22})$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \partial_1 v_1^* + \partial_2 v_2^* = 0, \quad (\text{ap13.2.23})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} = c_s^2 \left(\frac{\partial \rho^*}{\partial t} \right). \quad (\text{ap13.2.24})$$

これに対応する平面波解は

$$\begin{aligned} v_1^* &= V_1 e^{-\mu z} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \\ v_2^* &= V_2 e^{-\mu z} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \\ v_3^* &= 0, \\ p^* &= P e^{-\mu z} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \\ \rho^* &= R e^{-\mu z} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)} \end{aligned}$$

^{*7}これは, 11章で出てきたケルビン波と同じように, ある方向の速度成分をまったくもたない波である.

となる*8. ここで, μ は上端境界条件において定義される係数である. これをもとの方程式系に代入すると,

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 0 & ik_1 & 0 \\ 0 & -i\omega & ik_2 & 0 \\ ik_1 & ik_2 & 0 & -i\omega \\ 0 & 0 & -i\omega & ic_s^2\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ P \\ R \end{pmatrix} = 0.$$

よって, このときの波の解は

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{k_1}{\omega} P e^{-\mu z} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \\ v_2^* &= \frac{k_2}{\omega} P e^{-\mu z} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \\ v_3^* &= 0, \\ p^* &= P e^{-\mu z} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}, \\ \rho^* &= c_s^{-2} P e^{-\mu z} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)}. \end{aligned} \tag{ap13.2.25}$$

さらに分散関係式は

$$\omega^3 [-\omega^2 + c_s^2 (k_1^2 + k_2^2)] = 0$$

から,

$$\omega_{l\pm} = \pm c_s \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \tag{ap13.2.26}$$

となり, 水平方向にのみ伝播する, 位相速度が音速に等しい波となる. この波を Lamb 波と呼ぶ. これは, 静力学系においても発生する波である.

最後に, 非静力学系と静力学系における重力波の伝播の違いについて議論する. 非静力学系における波の分散関係は (ap13.2.17) 式から

$$\omega = \pm \frac{c_s}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(|\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4N^2 (k_1^2 + k_2^2)}{c_s^2 \left(|\mathbf{k}|^2 + 1/4H_0^2\right)^2}} \right]^{1/2}, \tag{ap13.2.27}$$

静力学系における波の分散関係は (ap13.2.19) 式から

$$\omega_{g\pm} = \pm N \sqrt{\frac{(k_1^2 + k_2^2)}{\left(k_3^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)}}. \tag{ap13.2.28}$$

図 11.2 は非静力学系と静力学系における分散関係を波数空間で示したものである. 横軸は水平波数, 縦軸は振動数を示し, 等値線が非静力学系, カラーが静力学系を表している. また, 破線はそれぞれ "N" と表記のある線がプラントバイサラ振動数, "Lamb" の線がラム波に相当する線である. ラム波より高周波成分が音波に相当し, 低周波成分が重力波に相当する. この図から明らかなように, 非静力学系では音波と重力波の両方のモードが存在

*8今, 方程式系は z 依存性がないので, z 方向に波は伝播しない.

し、重力波についてはブラントバイサラ振動数より高周波成分は存在しないことがわかる。これは、重力波の波源が浮力振動数より早い周波数で振動している場合、波源の周辺に重力波は励起されないことを意味している。一方、静力学系では音波モードは存在せず、重力波モードのみ存在している。さらに、非静力学系と異なり、ブラントバイサラ振動数より大きい周波数の重力波も存在するようになる。これが、静力学系と非静力学系の重力波における大きな違いであり、 k_r が大きくなるほど両者のずれが大きくなっていることがわかる。先述したとおり、静力学系における重力波の分散関係は

$$k_1^2 + k_2^2 \ll k_3^2$$

という関係が満たされるなら、非静力学系の重力波の分散関係と等しくなる。これが、図における k_r の小さい領域を指している。一方、この条件が満たされない k_r が大きくなる領域では静力学系と非静力学系での重力波の振る舞いが異なる。波数空間における k_r の大きさは実空間における現象のスケールの逆数に比例する。つまり、 k_r が大きいほど実現象の水平スケールは小さいものを表す。よく、「積乱雲やスコールラインのモデル計算において静力学モデルでは現象を正確に再現できない」という根本的な原因はここに由来する。これらの現象を再現するには、トリガーとなる重力波の振る舞いを正確に表現しなければならない。しかし、積乱雲などのメソスケール以下の小規模現象は k_r が大きい領域に相当するため、静力学系と非静力学系での重力波の振る舞いが大きくことなる。よって、数値モデルでメソスケール現象を再現するには静力学系ではなく非静力学系で構築された数値モデルによる再現を試みる必要がある。

静力学モデルが適用できる最小スケールは 5 km 付近であると言われている。ここでは、これまでの議論を用いて、静力学系と非静力学系における重力波の分散関係の違いから、この 5 km という数値の根拠を定量的に評価することを試みる。

まず、数値モデルの解像度は格子点間隔で表現することができる。つまり、水平、鉛直方向の解像度はそれぞれの格子点間隔 Δh , Δz で表現される。気象現象がすべて波の形で表現されると考えると、数値モデル内で気象現象を再現するためには、この波の形が数値モデルの格子点で陽に表現されていなければならない。言い換えると、数値モデルの格子点間隔が各現象の 1 波長より小さければ、その波は数値モデル内で表現することが可能であると言える。この類推から、数値モデル内で表現できる現象のスケールは数値モデルの空間解像度と関連付けることができる。ここでは、モデルの格子点間隔と同じ長さの波長をもつ現象が、モデル内で表現できるかどうかの基準であると定義する。つまり、その臨界波数を k_c としたとき、モデルの空間解像度 Δ との間に

$$k_c \Delta = 2\pi$$

という関係をもつ。これより波数の小さい (水平スケールの大きい) 現象は数値モデルで表現することができるが、これより波数の大きい現象は表現することができない。上式から明らかなことは、モデルの解像度 Δ が小さくなればなるほど臨界波数は大きくなるということである。

今、静力学系 (ω_{hy}) と非静力学系 (ω_{nh}) の重力波の分散関係は (ap13.2.17), (ap13.2.19)

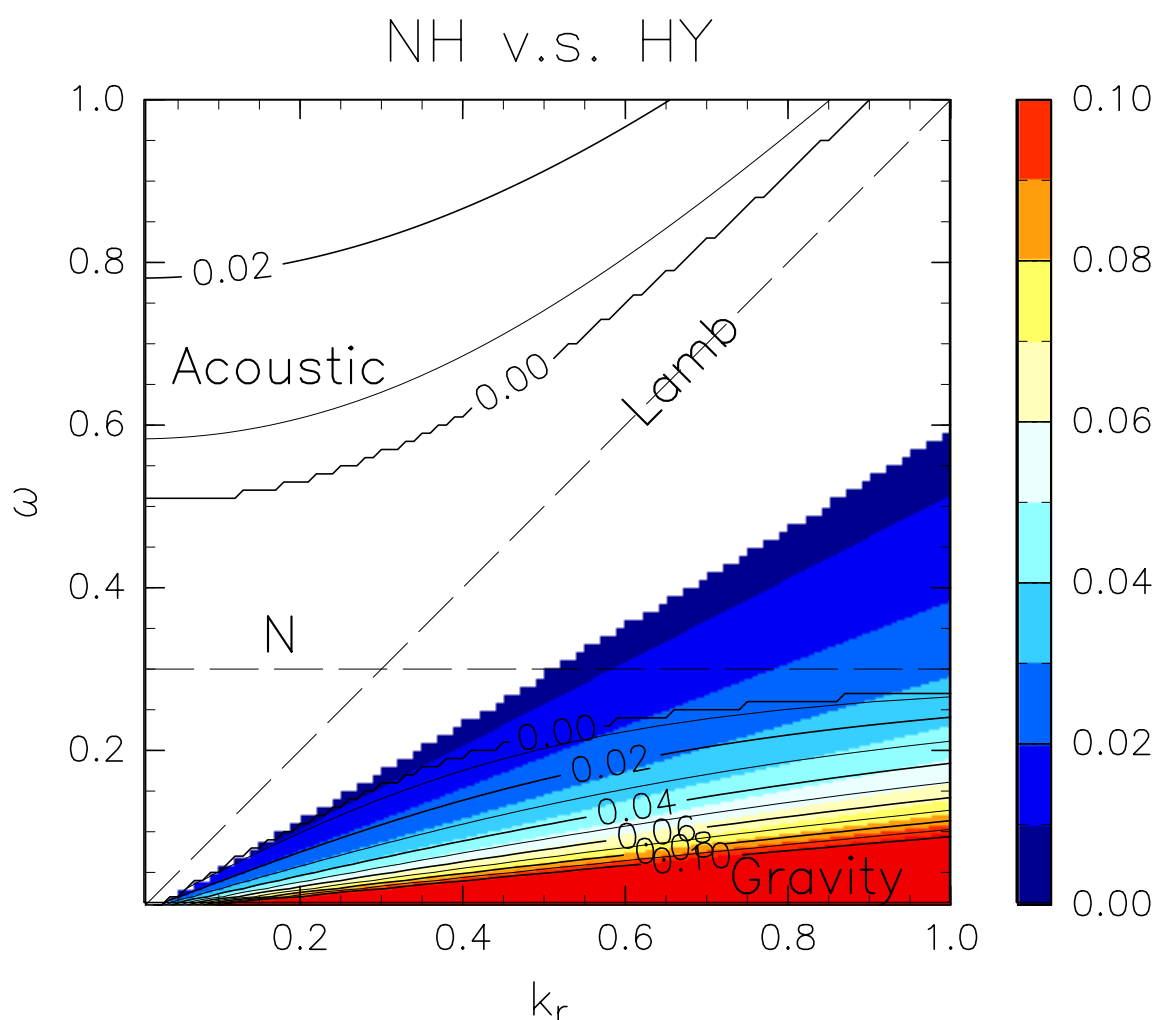


図 11.2: 非静力学系と静力学系における重力波の分散関係の違い。等値線が非静力学系, カラーが静力学系を表す。また, 振動数については音速で規格化され, 等値線とカラーの値は鉛直方向の波数の値に対応している。ただし, 等値線とカラーの値はそれぞれの最大値を 1 にするように規格化している。また, 横に走る破線はブラントバイサラ振動数, 斜めに走る破線はラム波に対応する線である。

から

$$\omega_{nh} = \pm \frac{c_s}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(k_r^2 + k_3^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4N^2 k_r^2}{c_s^2 (k_r^2 + k_3^2 + 1/4H_0^2)^2}}\right]^{1/2},$$

$$\omega_{hy} = \pm N k_r \left(k_3^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)^{-1/2}.$$

で与えられている. これらの振動数の違いを表す指標として, 振動数の比を用いる:

$$\frac{|\omega_{nh}|}{|\omega_{hy}|}.$$

大気の一般的な条件として,

$$c_s = 340 \text{ [m s}^{-1}\text{]}, \quad N = 1.0 \times 10^{-2} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad H_0 = 10 \text{ [km]}$$

を与えたとき, 数値モデルの鉛直解像度が 1 km であるなら, 振動数の水平解像度依存性は図 11.3 のようになる. この図はどちらも, 鉛直解像度 1 km のモデル内における非静力学系と静力学系でのそれぞれの重力波の振動数比に対する, モデルの水平解像度依存性を表したものであり, $\omega_{nh}/\omega_{hy} = 1$ に近いほど, 静力学系と非静力学系での重力波の振る舞いが似ている, つまり用いるモデルが静力学系であっても非静力学系であっても現象の再現性に対して差が小さいことを示唆している. これらの図から, モデルの水平解像度がおよそ 2-5 km 付近で振動数比の顕著な遷移が見られる. この領域より水平解像度が小さくなると重力波の振動数が静力学系と非静力学系で大きくずれることになる. 特に水平解像度 2 km 付近での振動数の差はおよそ 10% にもなる. 水平解像度 5 km 付近では振動数の差はおよそ 5% 程度であることがわかる. よって, この領域が非静力学系を静力学系と近似してモデル計算可能な最高解像度であることが示唆される^{*9}.

^{*9}ただし, 鉛直解像度にも依存して, このプロファイルは変化することに注意する. しかし, その傾向は変わらない.

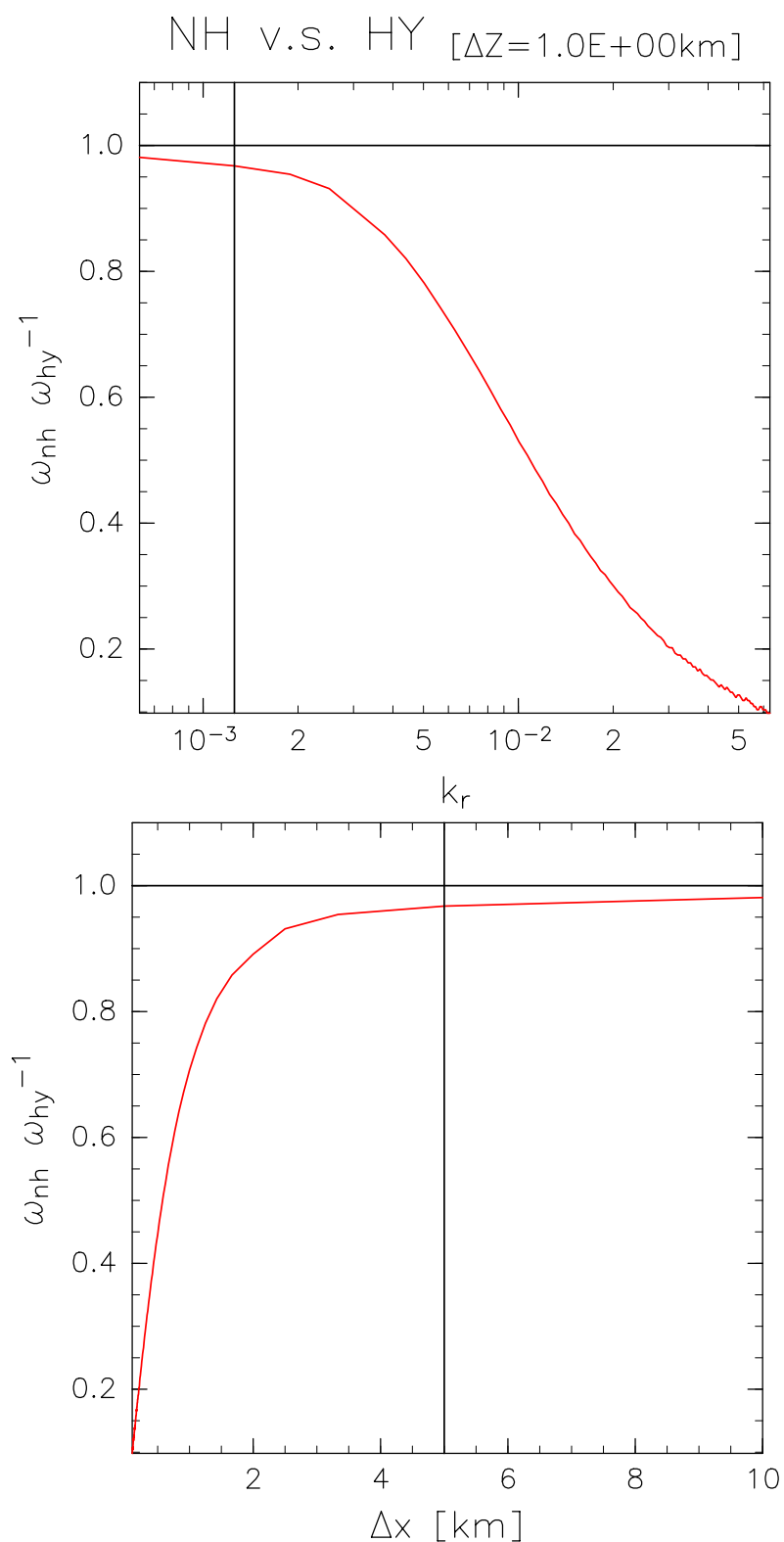


図 11.3: 非静力学系での重力波振動数 (ω_{nh}) と静力学系での重力波振動数 (ω_{hy}) の比に対する数値モデルの水平解像度依存性. 上は水平波数, 下はモデルの水平解像度で示したものの. 赤線が実際の重力波の振動数比を表し, 黒横線が $\omega_{nh} = \omega_{hy}$ となる線, 縦線が水平解像度 5 km の線である.