

## 神戸大集中講義 2012 Part 4

担当 高数縁 (東大大気海洋研究所)

## 「熱帯の気候形成：対流」

- 赤道波
- 大気に観測される赤道波
- Madden-Julian振動
  - 構造
  - MJO, 西風バースト, ENSO
  - MJOの降雨バンドによる運動量輸送 (NICAMモデル)

## 慣性重力波

微小振幅の浅水方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \dots(2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \dots(3)$$

$$(1)-(3)より \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0 \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} = gH \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$\eta = \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}$  の形の解を探す。

$\sigma \neq 0$ の時は、

$$\sigma = \pm [f_0^2 + gH(k^2 + l^2)]^{1/2} \quad : \text{慣性重力波の分散関係}$$

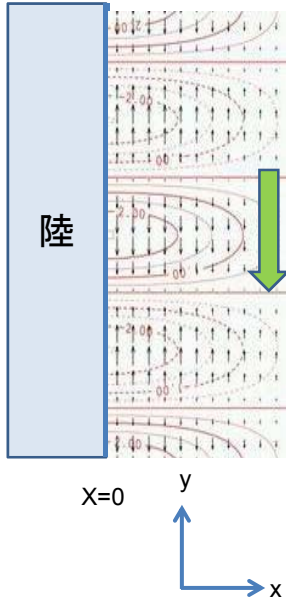
$$c = \frac{\sigma}{|K|} = \pm \sqrt{gH \left( 1 + \frac{f_0}{gH(k^2 + l^2)} \right)^{1/2}} \quad : \text{位相速度}$$

慣性重力波の振動数は  $f_0$  より大、位相速度は  $\sqrt{gH}$  より大。

..... 地球の回転の効果により modify された重力波。

波数が大きいと、特性は重力波に漸近する。

### Kelvin波



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0\right) \frac{\partial \eta}{\partial t} = gH \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots(4) \text{から始める。}$$

$x = 0$ にy方向に伸びた壁。境界条件 $x = 0$ で $u = 0$

$$\eta = \eta_0 e^{-x/\lambda} \sin[l(y + \sqrt{gH}t)]$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{gH}}{f_0} \quad : \text{ロスビーの変形半径}$$

$$u = 0$$

$$v = -\left(\frac{g}{H}\right)^{1/2} \eta_0 e^{-x/\lambda} \sin[l(y + \sqrt{gH}t)]$$

流体粒子の動きは常に壁に平行。

北半球では岸を右に見、南半球では左に見て

$\sqrt{gH}$ の速度で進む。

岸からロスビーの変形半径で指数関数的に振幅が減衰する。

### Rossby波

順圧流体、 $\beta$ 平面での渦度方程式。絶対渦度が保存。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \zeta + \beta v = 0 \quad \dots(1)$$

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad \zeta = \bar{\zeta} + \zeta', \quad \text{擾乱の流線関数 } \psi': \quad u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$(1) \text{を線形化して} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla_h^2 \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad \dots(2)$$

$$\psi' = A e^{i(kx + ly - \sigma t)} \quad \text{とする} \quad (-\sigma + k\bar{u})(-k^2 - l^2) + k\beta = 0 \quad \dots(3)$$

$$\sigma = \bar{u}k - \frac{\beta}{k^2 + l^2}$$

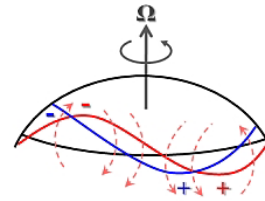
$$\text{基本流に相対的な位相速度は} \quad c_x - \bar{u} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2}$$

$\beta > 0$  基本流に相対的なロスビー波の東西位相速度は必ず西向き。

緯度45度で $\beta = 1.62 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ 。東西波長約6000km のロスビー波  $c_x - \bar{u} \approx -7.4 \text{ ms}^{-1}$

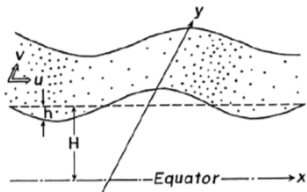
この緯度帯での西風は通常これより強い。総観規模のロスビー波は、地面に対しては東向きに基本流よりは遅い速度で進行する。

$$\text{定在ロスビー波は} \quad k^2 + l^2 = \frac{\beta}{\bar{u}} \quad \bar{u} = 15 \text{ ms}^{-1} \quad \text{の時、波長約8500m}$$



$$e^{i\omega t + ikx}$$

## Equatorial Waves (Matsuno 1966)



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + C_g^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

$C_g^2 = gH; u, v, \phi \propto e^{ikx + i\omega t}$

$u, v, \phi \sim e^{i\omega t + ikx}$  の解を仮定  $\frac{d^2 v}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{c_g^2} - k^2 + \frac{\beta k}{\omega} - \frac{\beta^2}{c_g^2} y^2 \right) v = 0$

Fig. 1. Model and Coordinates.

境界条件  $y \rightarrow \pm\infty$  で  $v \rightarrow 0$  を課すと、固有解が求まる。

$$\frac{c_g}{\beta} \left( \frac{\omega^2}{c_g^2} - k^2 + \frac{\beta k}{\omega} \right) = 2n + 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \dots(2)$$

(2)より、位相速度  $c = \omega/k$  として3つの近似関係が得られる。

$$\omega \gg \frac{k}{\beta} \quad c_{1,2} \approx \pm c_g \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\beta}{c_g} (2n+1)} \quad \dots \text{慣性重力波}$$

$$\omega \ll k \sqrt{gH} \quad c_3 \approx \beta / \left[ k^2 + \frac{\beta}{c_g} (2n+1) \right] \quad \dots \text{ロスビー波}$$

◎  $n = 0$  の場合、(2)式は、(MRG波)

$$\frac{\omega^2}{c_g^2} - k^2 + \frac{\beta k}{\omega} = \frac{\beta}{c_g} \rightarrow \omega^3 - c_g^2 k^2 \omega + c_g^2 \beta k - c_g^2 \beta \omega = 0$$

$$(\omega - c_g k)(\omega^2 + c_g k \omega - c_g \beta) = 0$$

3つの根  $c = c_g$  と  $c = c_g \left( -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta}{c_g k^2}} \right)$  のうち、

$c = c_g$  の解は、 $u$  の解の制約上許されないし、前述  $c_{1,2}, c_3$  に対応しない。

つまり  $n$  を連続的なパラメタと考えるならば、次のように3つの解を分けるとよい。

西進重力波は  $k \leq \sqrt{\beta/2c_g}$  の範囲、ロスビー波は  $k > \sqrt{\beta/2c_g}$  の範囲でのみ存在する。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c_g \left( -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta}{c_g k^2}} \right) && \text{東進重力波} \\ c_2 &= \begin{cases} c_g \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta}{c_g k^2}} \right) & \text{for } k \leq \sqrt{\beta/2c_g} \\ c_g \quad (\rightarrow \times) & \text{for } k > \sqrt{\beta/2c_g} \end{cases} && \text{西進重力波} \\ c_3 &= \begin{cases} c_g \quad (\rightarrow \times) & \text{for } k \leq \sqrt{\beta/2c_g} \\ c_g \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta}{c_g k^2}} \right) & \text{for } k > \sqrt{\beta/2c_g} \end{cases} && \text{ロスビー波} \end{aligned} \right\} \dots(5)$$

(Matsuno 1966)

◎(2)式に含まれない解 ( $v=0$ の解) があり得る。

(Kelvin波)

$$\left. \begin{aligned} i\omega u - \beta y v + ik\phi &= 0 \\ \text{基本方程式に戻ると、} \quad i\omega v + \beta y u + \frac{d\phi}{dy} &= 0 \\ i\omega\phi + c_g^2 \left(iku + \frac{dv}{dy}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \phi = -\frac{\omega}{k}u$$

$$(\omega^2 - c_g^2 k^2)u = 0 \quad (\omega - c_g k)(\omega + c_g k) = 0$$

$$\phi = c_g u = ce^{-\frac{1}{2}\beta^2 y^2} \quad \text{for } \omega = -c_g k$$

$$\phi = -c_g u = ce^{\frac{1}{2}\beta^2 y^2} \quad \text{for } \omega = c_g k \rightarrow \times$$

上の解は、(2)で  $n = -1$  に対応する。そこでこれを  $n = -1$  の解とする。

◎ これらの解で完備 直交系を成す。

( Matsuno 1966 )

### Dispersion relation

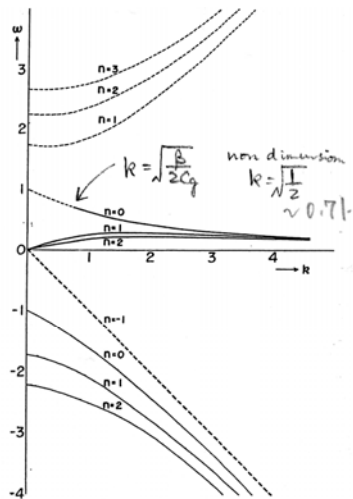


Fig. 3a. Frequencies as functions of wave number.  
Thin solid line: eastward propagating inertio-gravity waves.  
Thin dashed line: westward propagating inertio-gravity waves.  
Thick solid line: Rossby (quasi-geostrophic) waves.  
Thick dashed line: The Kelvin wave like wave

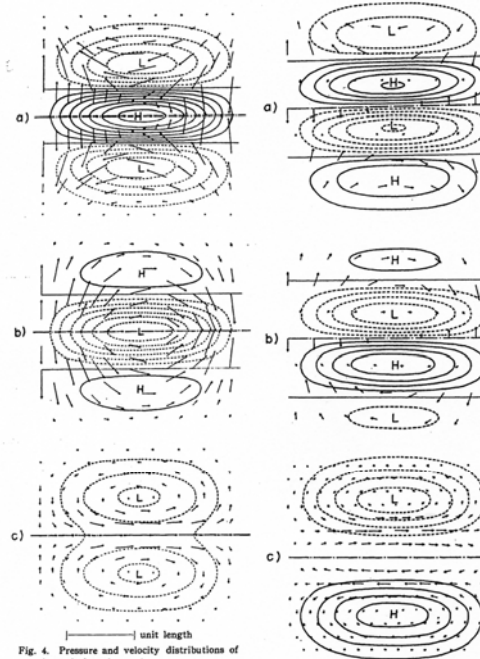


Fig. 4. Pressure and velocity distributions of eigensolutions for  $n=1$   
a: Eastward propagating inertio-gravity wave  
b: Westward propagating inertio-gravity wave  
c: Rossby wave.

( Matsuno 1966 )

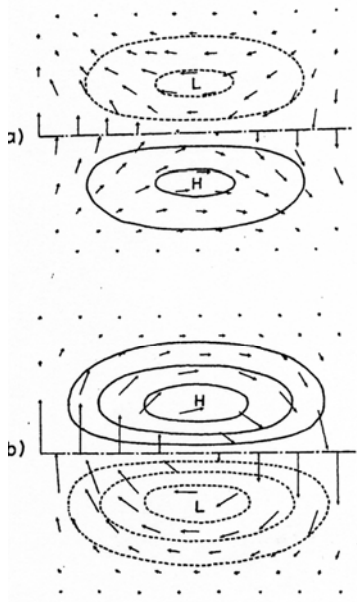


Fig. 6. Pressure and velocity distributions of eigensolutions for  $n=0$  and  $k=0.5$   
 a: Eastward moving inertio-gravity wave  
 b: Westward moving inertio-gravity wave.

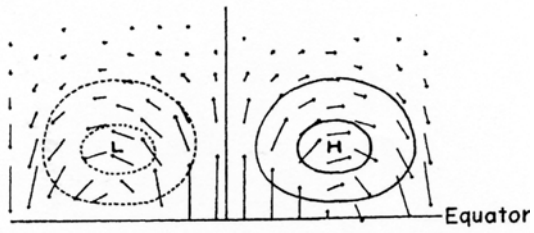


Fig. 7. Rossby type wave ( $n=0$   $k=1.0$ ).

西進波:

Fig.6bの $n=0, k=0.5$ の西進慣性重力波と Fig.7, $n=0, k=1.0$ のロスビー波との間に顕著な構造の違いは見られない。

高緯度側: 気圧場と風速場との関係はほぼ地衡風の

低緯度側: 非地衡風の風が卓越

→ ‘混合ロスビー重力波’

**Mixed Rossby-gravity wave**

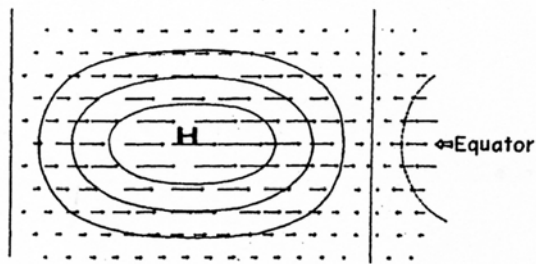


Fig. 8. Pressure and velocity distributions of eigensolution for  $n=-1$  and  $k=0.5$ .  
 This wave behaves like as the Kelvin wave.

X方向には純粋な重力波のように振る舞い、y方向には東西風と南北方向の気圧傾度とが地衡風の関係を持つ。

地形性のケルビン波と同じ振る舞いをする。

→赤道ケルビン波

( Matsuno 1966 )

## 赤道域の強制に対する定常応答

[ Forced stationary motion ]

(強制された定常運動)

$$\begin{cases} -fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = -\alpha u \\ fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = -\alpha v \\ H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\alpha h + Q \end{cases}$$

Q: mass source (sink)

- 自由波動の解は、完備な直交系を成すことが示されたので、この解もその固有モードの線形結合で表現できる。
- 定常forcingには、低周波数モードほど大きく共鳴する。

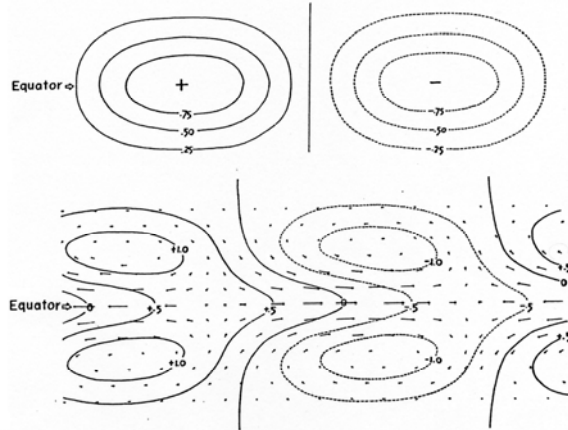


Fig. 9. Stationary circulation pattern (lower) caused by the mass source and sink (upper).

Rossby波 (+ Kelvin波)

( Matsuno 1966 )

$$(1) Q(x, y) = F(x) \exp\left(-\frac{1}{4}y^2\right), \quad F(x) = \begin{cases} \cos kx & |x| < L, \\ 0 & |x| > L \end{cases}, \quad k = \pi/2L$$

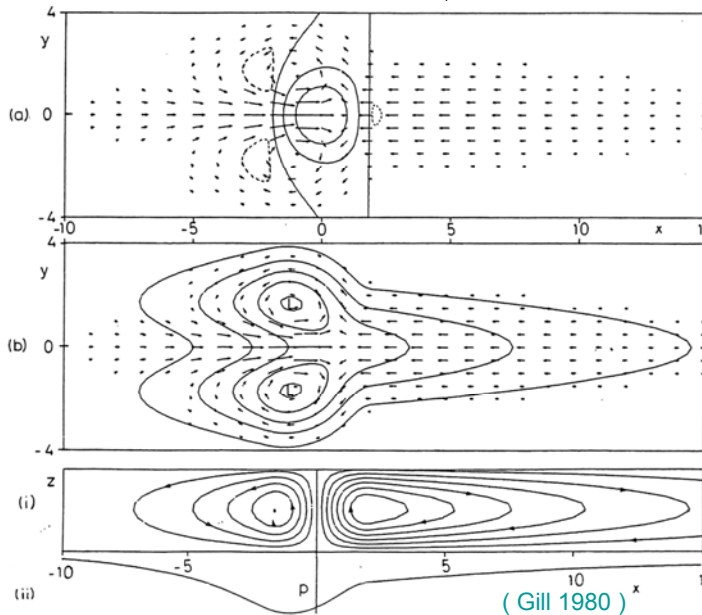


Figure 1. Solution for heating symmetric about the equator in the region  $|x| < 2$  for decay factor  $\epsilon = 0.1$ .

(a) Contours of vertical velocity  $w$  (solid contours are 0, 0.3, 0.6, broken contour is -0.1) superimposed on the velocity field for the lower layer. The field is dominated by the upward motion in the heating region where it has approximately the same shape as the heating function. Elsewhere there is subsidence with the same pattern as the pressure field.

(b) Contours of perturbation pressure  $p$  (contour interval 0.3) which is everywhere negative. There is a trough at the equator in the easterly regime to the east of the forcing region. On the other hand, the pressure in the westerlies to the west of the forcing region, though depressed, is high relative to its value off the equator. Two cyclones are found on the north-west and south-west flanks of the forcing region.

(c) The meridionally integrated flow showing (i) stream function contours, and (ii) perturbation pressure. Note the rising motion in the heating region (where there is a trough) and subsidence elsewhere. The circulation in the right-hand (Walker) cell is five times that in each of the Hadley cells shown in (c).

( Gill 1980 )

## 現実に観測される大気中の 赤道波ファミリー

- 下部成層圏の混合ロスビー重力波、ケルビン波
- 積雲対流と結合した赤道波
- 熱帯季節内振動(MJO)
- 海洋大陸周辺の平均風(定常応答: Gill1980)

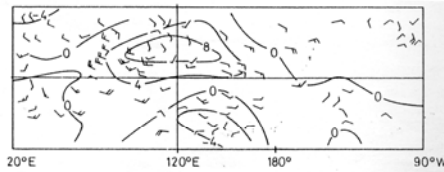
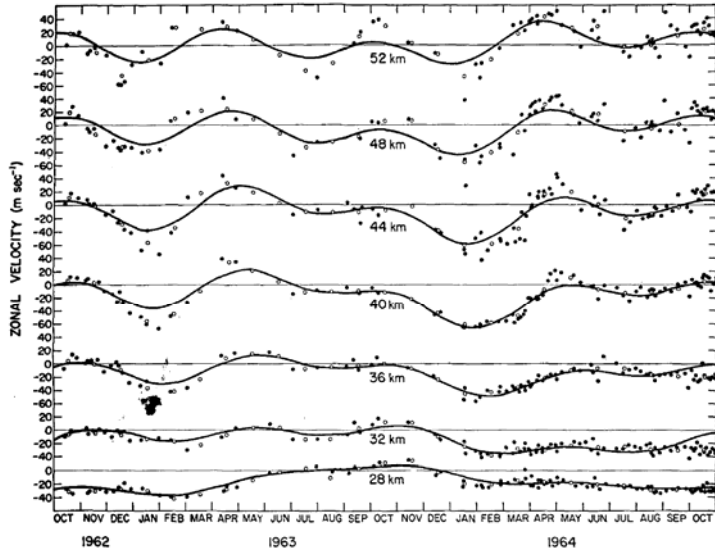


Figure 4. Contours of vertical velocity at 500 mb for the June-August season (units  $10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ , positive upwards) as deduced from the heat equation and presented in plate 9.1 of Newell *et al.* (1974). The contours are approximately those for the diabatic heating rate as the vertical velocity deduced this way is approximately equal to the heating rate divided by the temperature gradient. Also shown are 850 mb wind vectors after van de Boogaard (1977). (See e.g. Riehl 1979, Fig. 1.13.)

## STRATOSPHERIC WAVES

成層圏で観測された赤道波と関連研究

Quasi Biennial Oscillation : 準2年振動

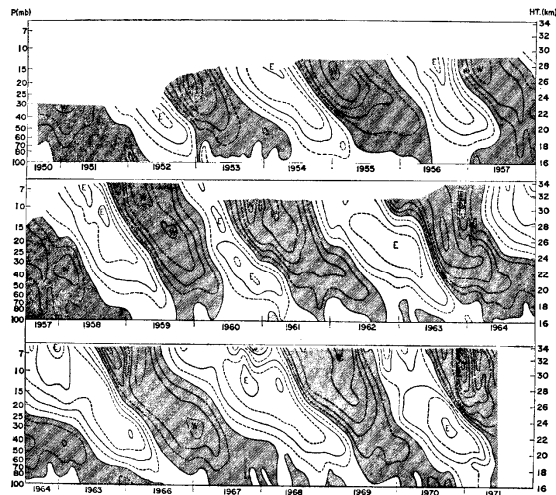


Ebdon (1960),  
Reed et al. (1961)  
により発見

Reed 1965

Fig. 1. Zonal wind velocity at Ascension Island (7°55'S, 14°25'W). Solid circles: individual observations; open circles: monthly means. Curves were drawn objectively by summing the first, second and fourth harmonics obtained from harmonic analyses of the monthly means.

Quasi Biennial Oscillation : 準2年振動



Wallace, 1973

図 3.3 緯度約 9°N にある観測地点カナルゾーンとケジェリンのデータを合わせて作成した 1950 年～1971 年の帯状風の時間-垂直断面。年変動, 半年変動は取り除いてある。等値線は 10 ms<sup>-1</sup>間隔 (ウォレンス, 1973)。

Wave-Mean Flow Interaction 長波の重力波による一般風加速の理論 (Lindzen and Holton 1968) → 東進波、西進波 さがしの時代



## Yanai-Maruyama 波 (Yanai and Maruyama, 1966)

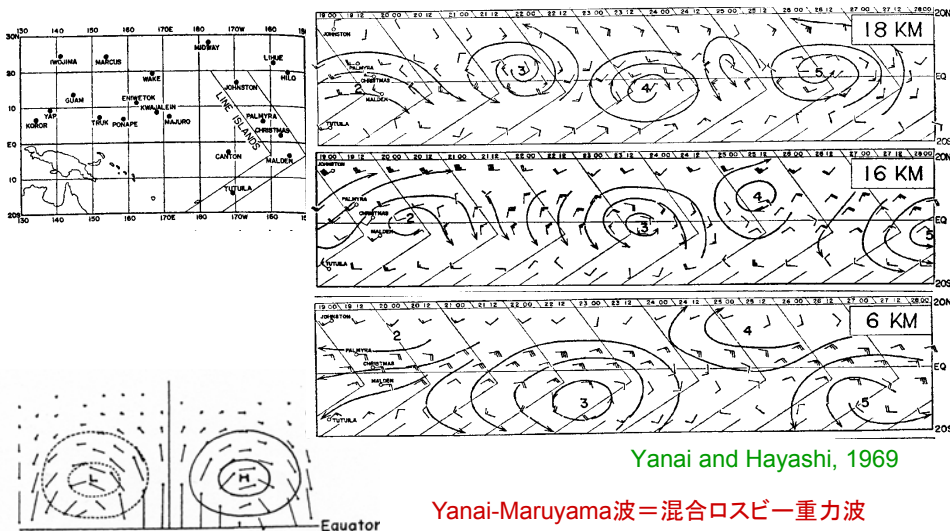


Fig. 7. Rossby type wave ( $n=0$   $k=1.0$ ).  
Matsuno, 1966 ~5日周期

## Yanai-Maruyama 波 (Yanai and Maruyama, 1966)

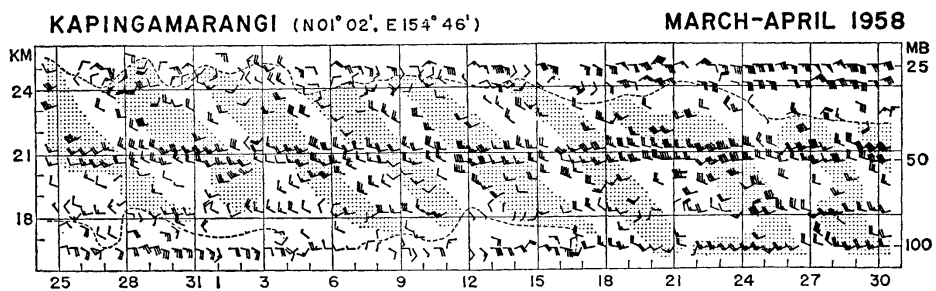
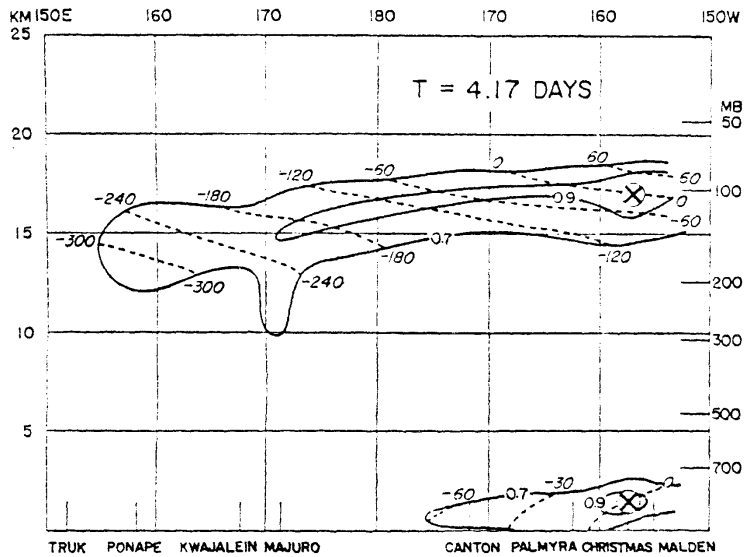


図 4.1 カピンガマランギ島の下部成層圏の風の変動。影は南風成分 (丸山, 1967).

Maruyama, 1967

COHERENCE AND PHASE DIFFERENCE APRIL - JULY 1962



(b) T = 4.17 days Yanai et al. 1968

Kelvin波 (Wallace and Kousky 1968)

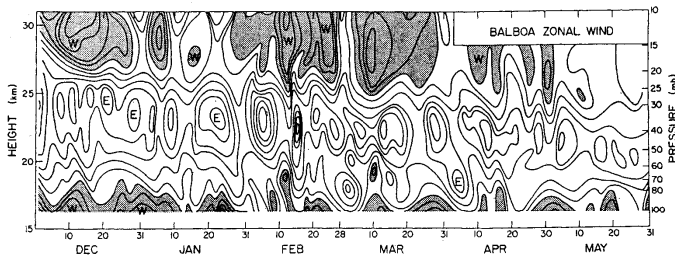


FIG. 2. Time-height section of zonal wind at Balboa. Isotachs are placed at intervals of 5 m sec<sup>-1</sup>. Westerlies are shaded.

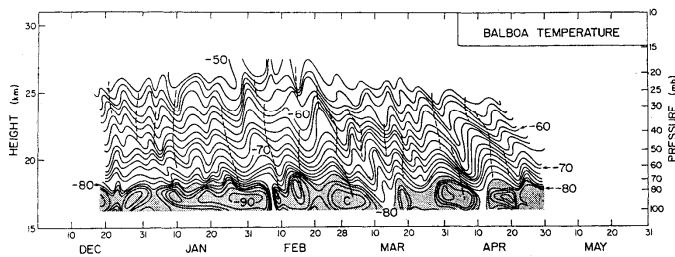
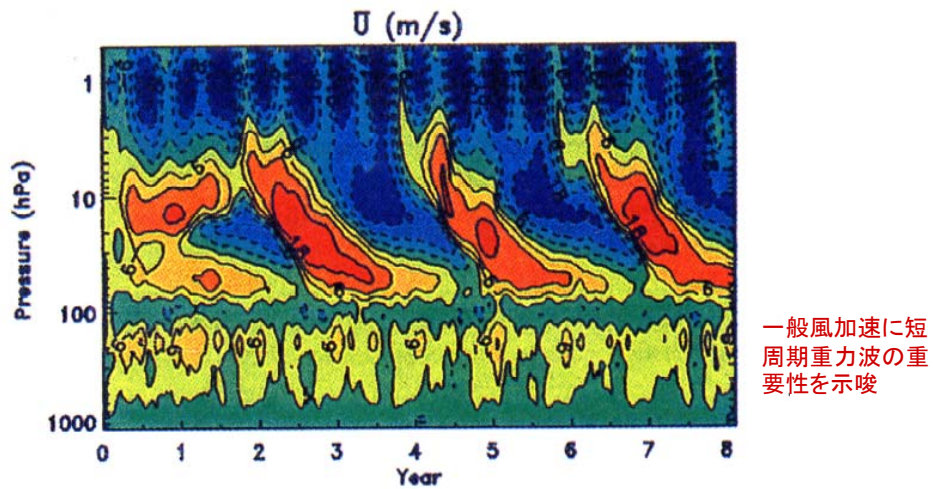


FIG. 3. Time-height section of temperature at Balboa. Isotherms are placed at intervals of 2°C. Temperatures below -80°C are shaded. Dashed lines represent axes of the more prominent easterly fluctuations shown in Fig. 2.

周期~15日  
 UとTに東進擾乱  
 TがUに1/4波長先行  
 振幅 8-12m/s,  
 3-5°C

Kelvin波に対応



**Figure 1.** Time-height section of the simulated zonal-mean zonal wind over the equator. The time coordinate ranges from day 0 (1 Jan. 0-th year) to 1 Feb. 8-th year. The contour interval is  $6 \text{ ms}^{-1}$ . The solid lines represent westerlies (red areas) and the dashed lines easterlies (blue areas).

Takahashi, M (1999)

## CONVECTIVELY-COUPLED WAVES

### Convectively coupled MRG wave

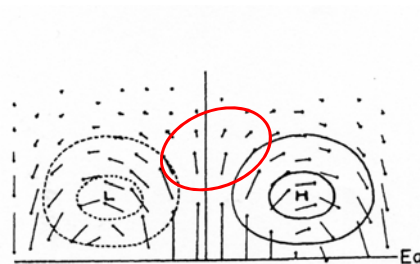
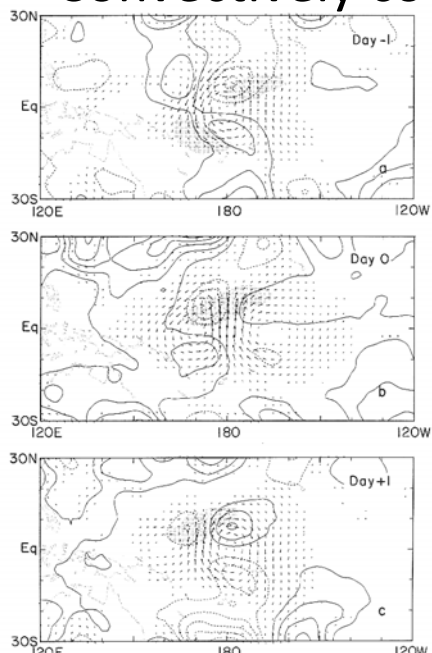
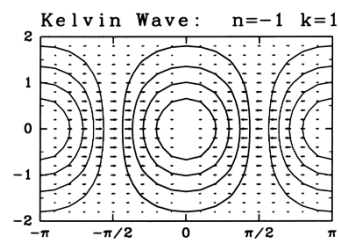
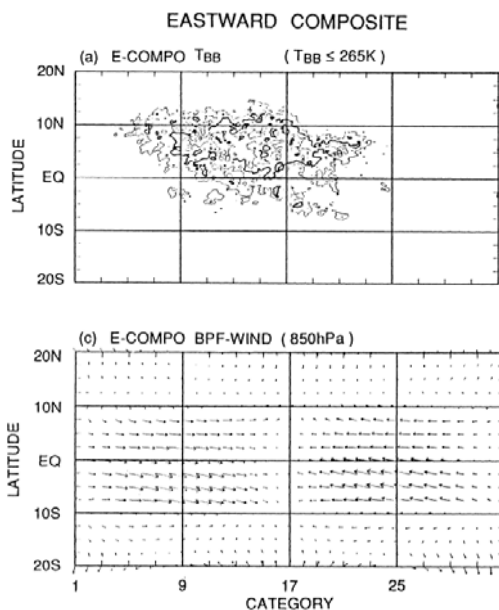


Fig. 7. Rossby type wave ( $n=0$   $k=1.0$ ).

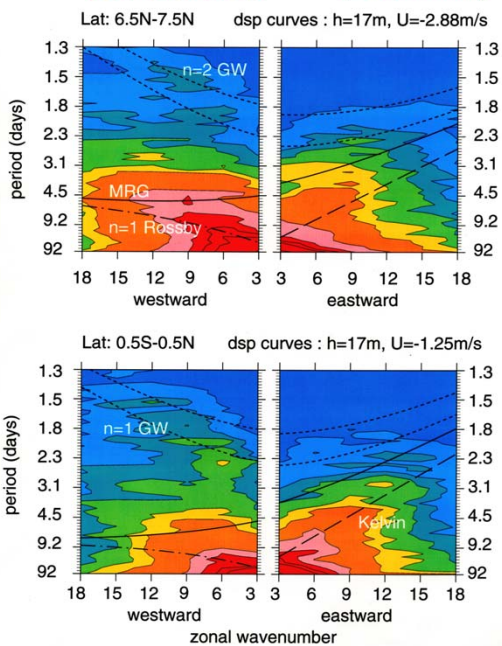
(Liebmann and Hendon 1990)

### Supercluster: Convectively coupled Kelvin wave



Takayabu and Murakami 1991

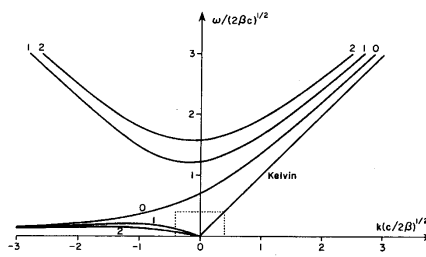
GMS IR Space-Time Power Spectra  
1981-1989 mean (Takayabu 1994)



IR TBBデータの  
時空間スペクトル解析

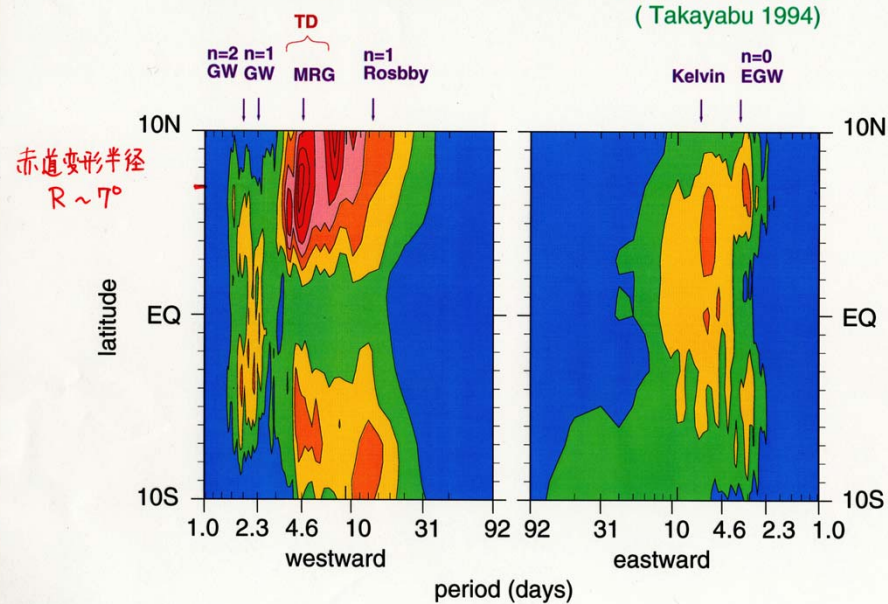
Equivalent Depth ~20m

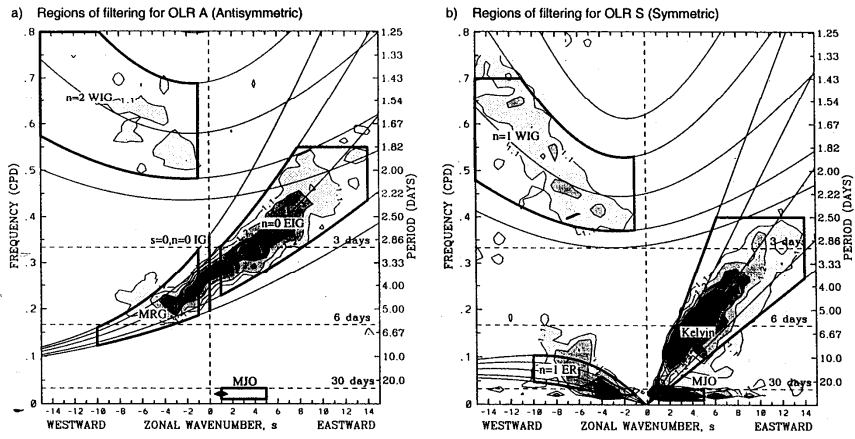
(Takayabu 1994)



赤道波の分散関係

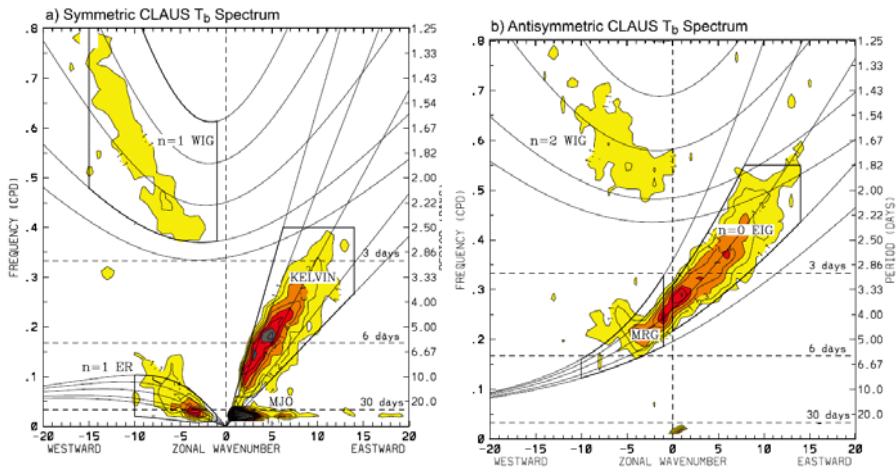
GMS IR Space-Time Power (Lat.-Frq.)  
1981-1989 mean wavelength : 40-120 dg  
(Takayabu 1994)



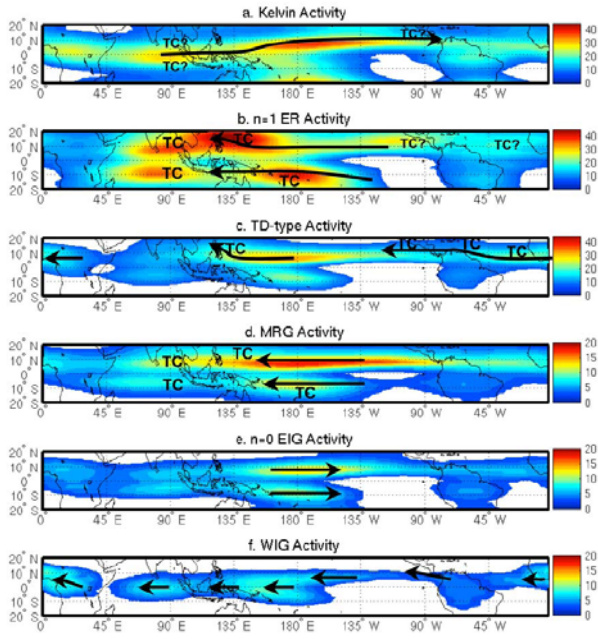


(Wheeler and Kiladis 1999)

Equivalent depth : 12-50m



Kiladis et al. (2009)



Kiladis et al. (2009)

Figure 5. Distribution of annual mean variance of CLAU S  $T_e$ , filtered for the (a) Kelvin, (b)  $n = 1$  ER,

## TOGA COARE spectra

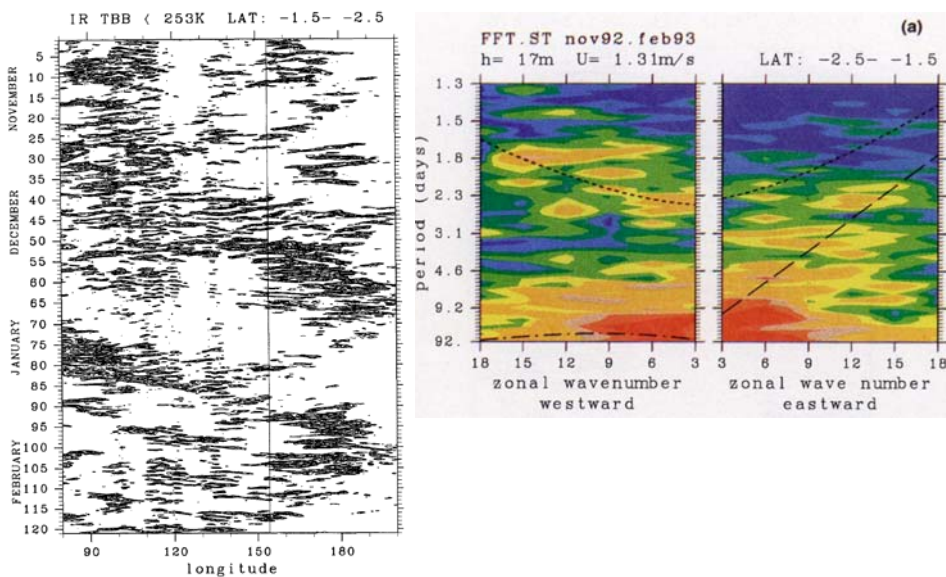
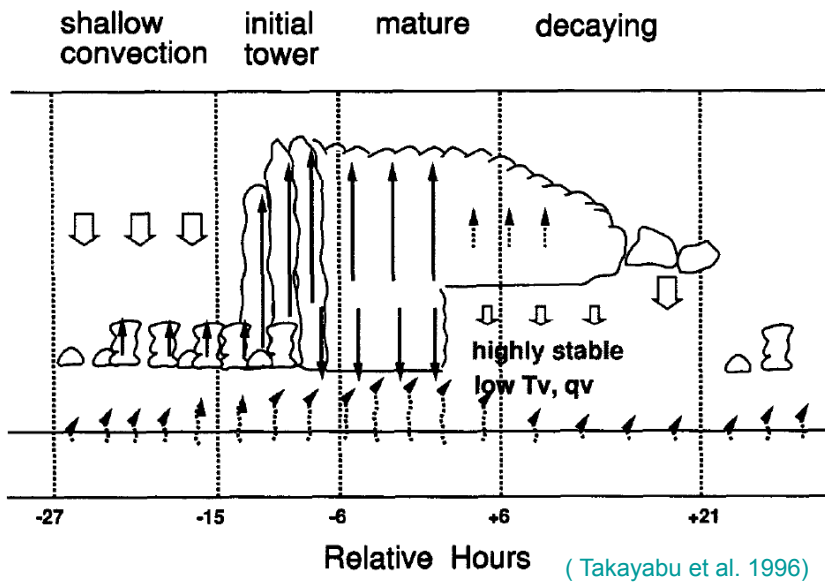
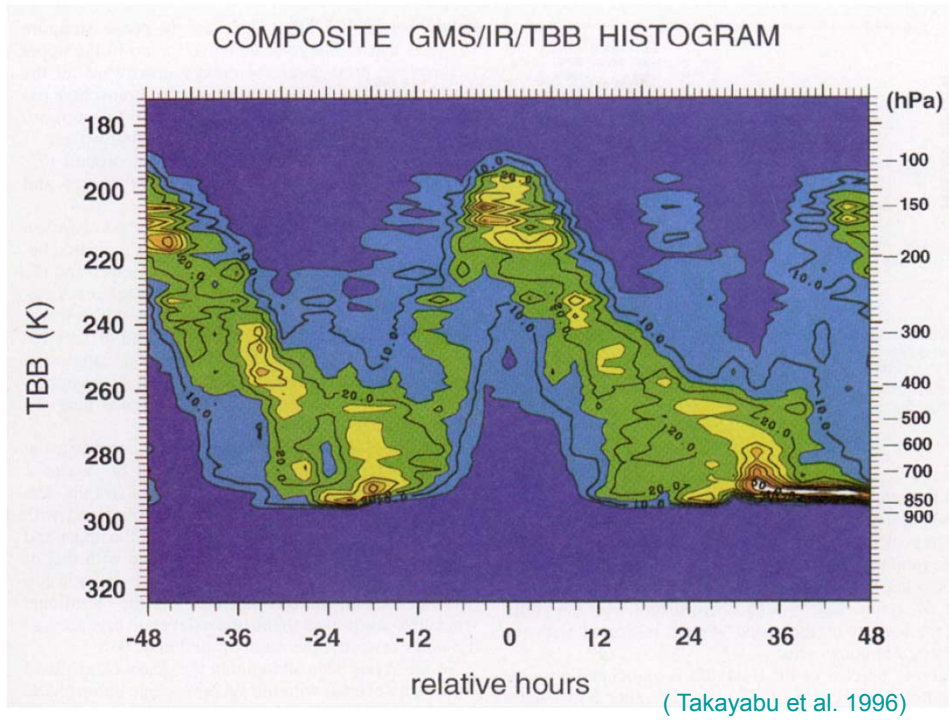


FIG. 2. Longitude-time section of 3-h GMS IR  $T_e$  data along 1.5°–2.5°S for TOGA COARE IOP.

( Takayabu et al. 1996)

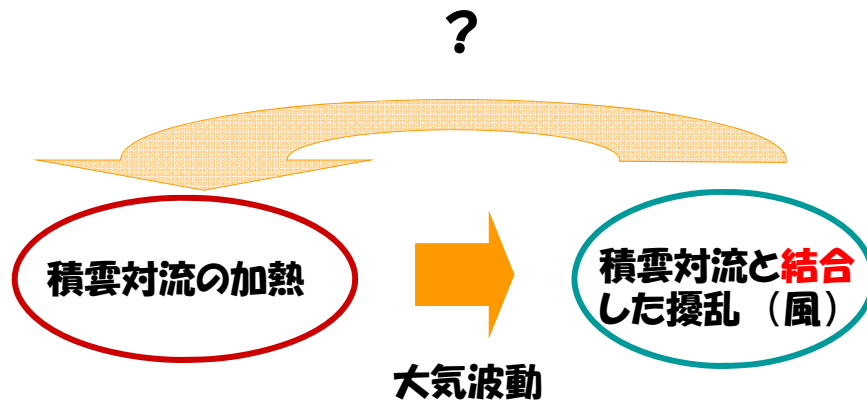


**Schematics for the quasi 2-day variation in TOGA COARE**

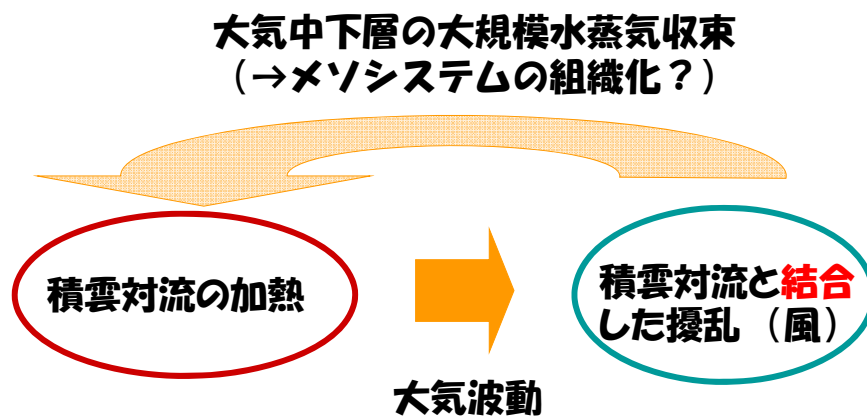
FIG. 19. Schematics for the quasi-2-day variation in TOGA COARE. Straight arrows indicate the vertical air motion and wavy arrows indicate the surface heat flux.



### 雲と大気運動の相互作用に関する考察

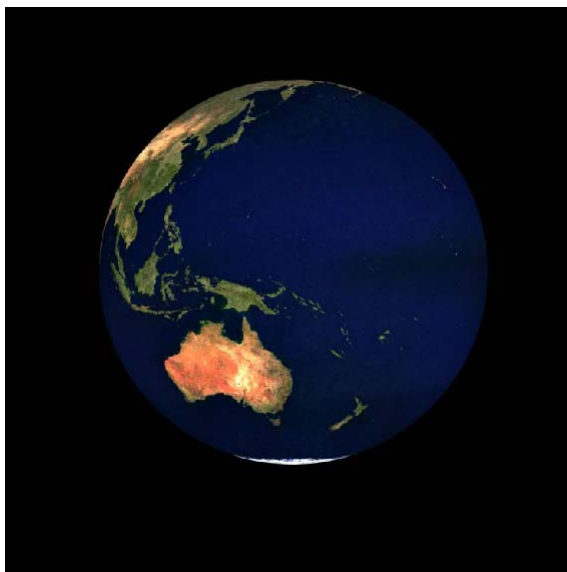


### 雲と大気運動の相互作用に関する考察

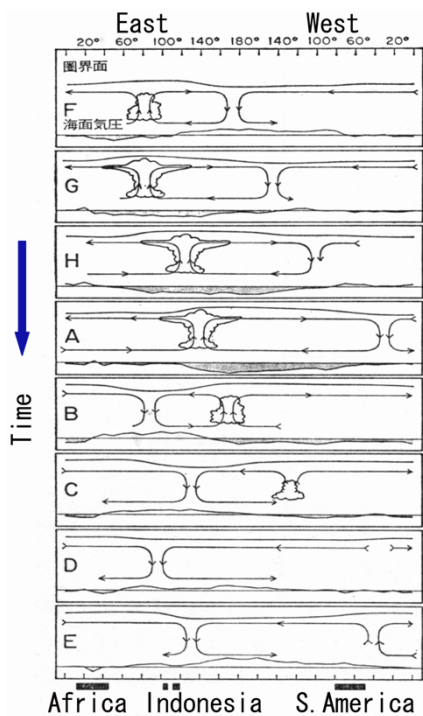


## MADDEN-JULIAN OSCILLATION

*MJO* マッデン・ジュリアン振動  
(最大規模に組織化した雲降水システム)



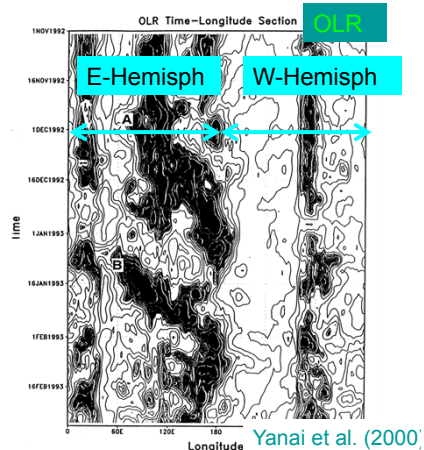
赤道域で雲が数1000km  
のサイズに組織化し、赤  
道をとりまく大気の循環  
と共に東に動く



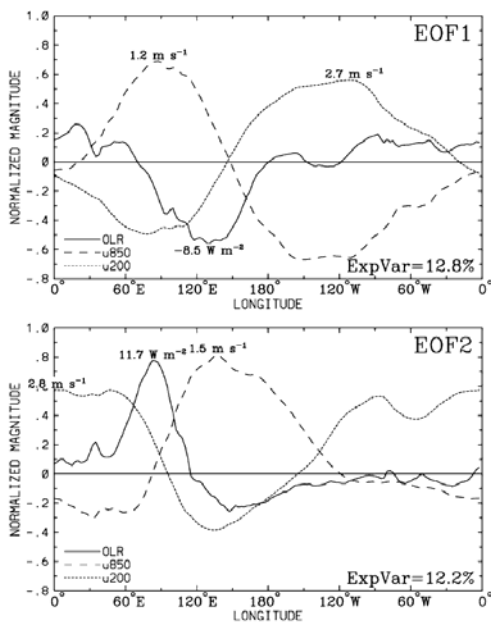
Madden-Julian振動

Madden and Julian (1972)

東半球では~5m/s程度の速度、西半球では雲フリーになって~20m/s程度の速度で東進する。結果、数十日周期で赤道域を一周する「振動」となる。



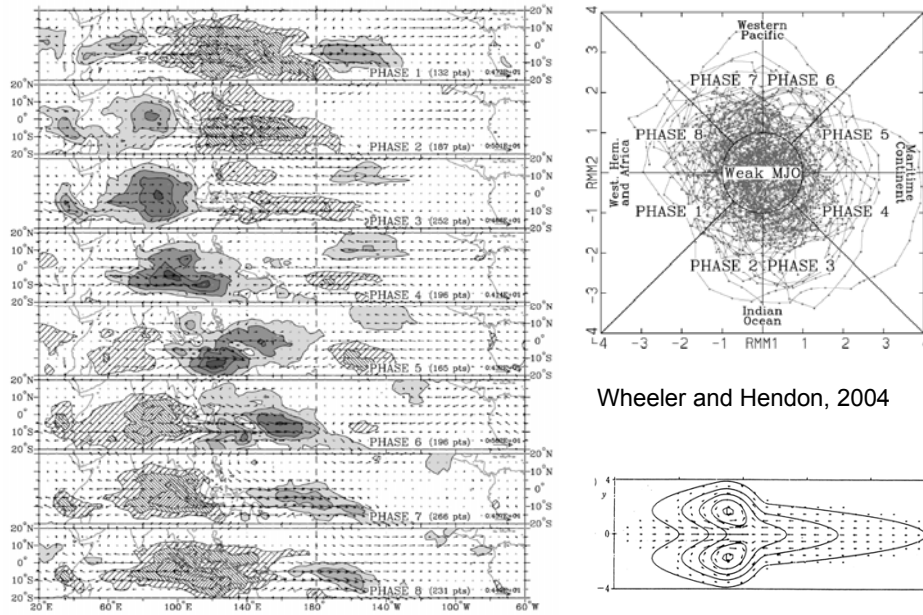
MJO index



Multivariate EOF, which consists of U850\*, U200\*, and OLR\*  
 \* denote variables averaged from 15N-15S and normalized by global variance of each variable, after subtracting seasonal and interannual variations.

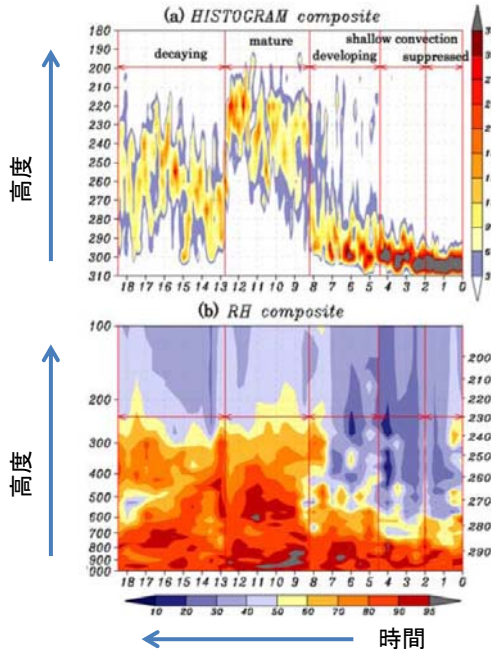
Wheeler and Hendon, 2004

# MJO phase



Wheeler and Hendon, 2004

## MJOに伴う雲と水蒸気場の特徴

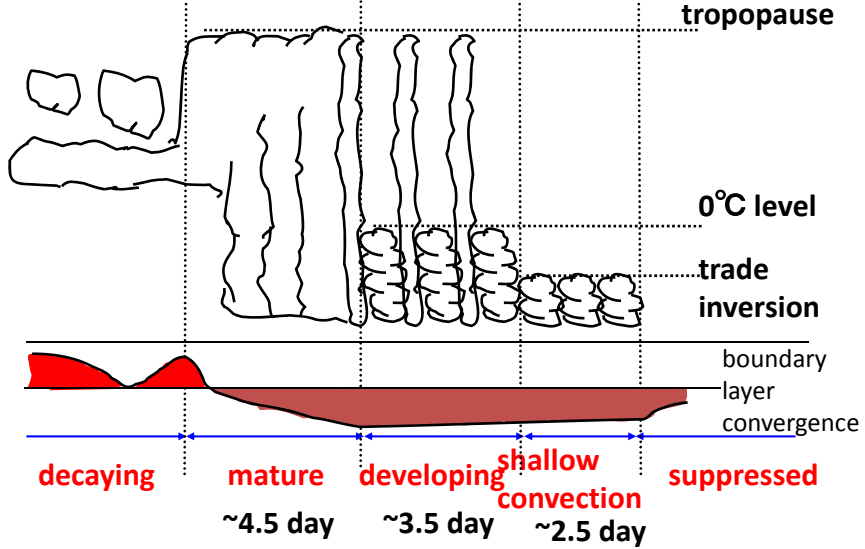


GMS IRヒストグラム  
コンポジット

TOGA-COARE  
高層ゾンデRHコンポジット

(Kikuchi and Takayabu, 2004)

A schematic of convective development associated with the MJO



(Kikuchi and Takayabu, 2004)

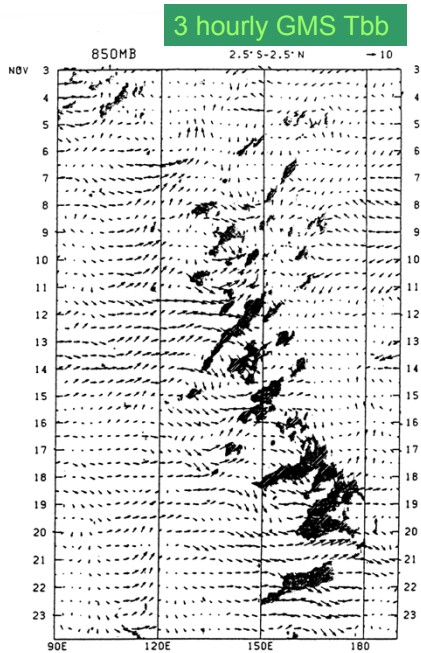


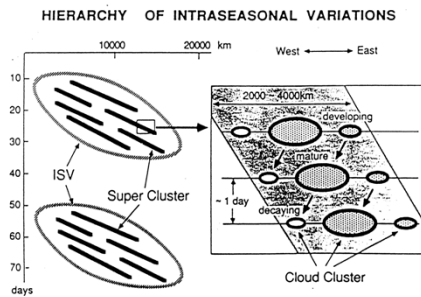
Fig. 11. Time-longitude section of  $T_{850}$  integrated from  $2.5^{\circ}\text{S}$  to  $2.5^{\circ}\text{N}$  for 3 November 00Z to 23 November 21Z. Shading denotes the area where the value exceeds 20. The 850 mb wind field is also shown by vectors.

Internal Structure

Nakazawa (1988)

Exhibited the eastward propagating MJO or super clusters consist of westward propagating systems.

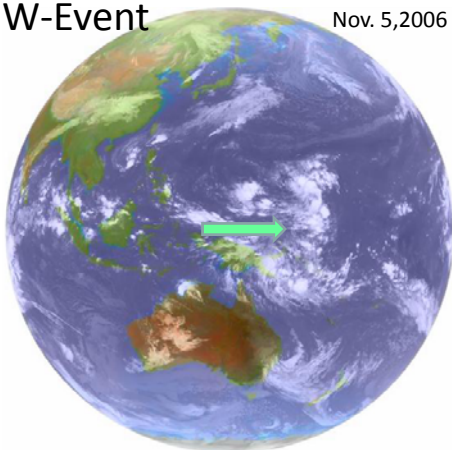
Although no model incorporates the concept of internal structure so far, it is considered to be an indispensable issue in future studies.



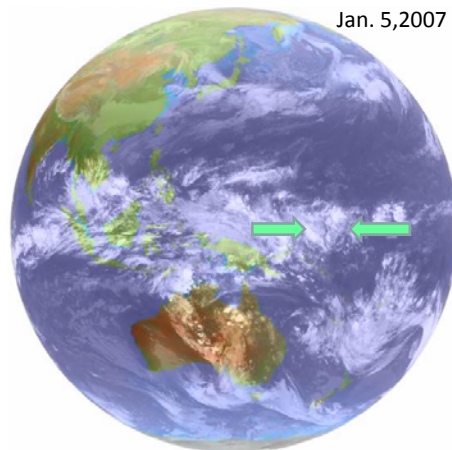
# MJO, WESTERLY WIND BURSTS, AND ENSO

## Interactions among westerly wind bursts, ENSO, and MJO

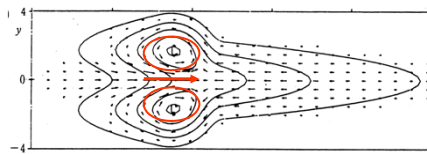
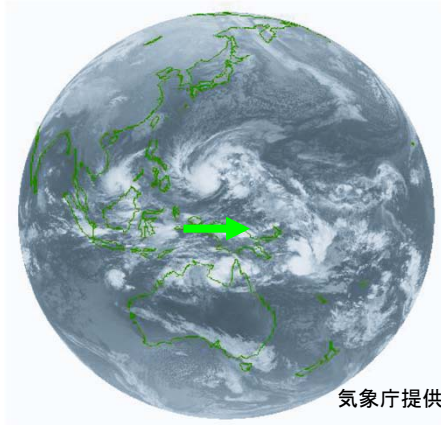
Development Phase of a W-Event  
Nov. 5, 2006



Pre-Termination  
Jan. 5, 2007



# 西風バースト



通常は風の弱い赤道域において強い西風が数日間持続的に吹く現象。

海洋のケルビン波励起によりエルニーニョの開始・維持にインパクト (e.g. McPhaden 1988)

MJOから双子低気圧の発達と共に発生することが多い

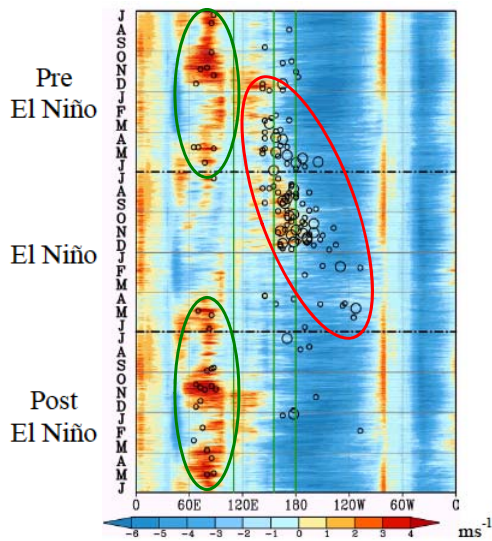
WWBの定義と抽出:  
( Seiki and Takayabu, 2007a,b)

- ERA40利用
- Surface東西風偏差(季節気候値から)が2.5°N-2.5°S平均で5m/s以上 (全体の0.5%)
  - 経度10°以上の広がり(約1100km)
  - 2日以上持続

## ENSO-composite of WWBs

Usfc (2.5N-2.5S mean) and WWBs

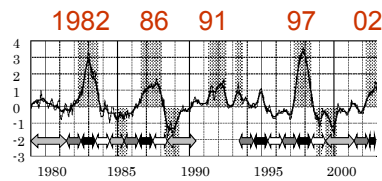
o: 5m/s < umax < 10m/s, O: umax > 10m/s



Composite occurrence frequencies of WWBs in Pre-El Niño, El Niño, and Post El Niño years

IO: PreEN and PostEN years Oct-Nov and around May

Pacific : aggregated WWBs from Pre-EN winter and migrates eastward toward EN winter



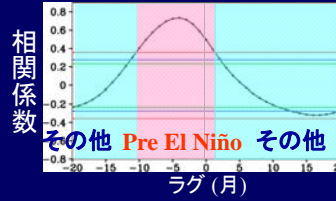
Seiki and Takayabu (2007)

## Seiki and Takayabu 2007b

振幅の強いMJO上位50個に対するコンポジット解析

MJOは総観規模以下の内部擾乱から成り立つ。

→総観規模以下の擾乱の発達メカニズムを調査



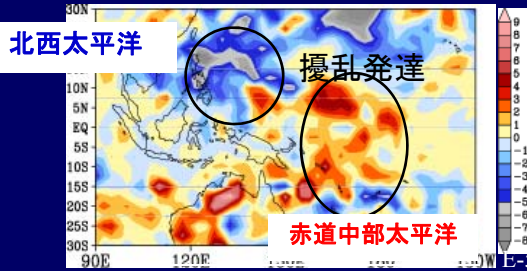
基本場: 11日移動平均  
擾乱場: 残差

$$\bar{K} \rightarrow K'$$

850hPa

APE' → K' (上層)も同様

差 Pre El Niño - その他

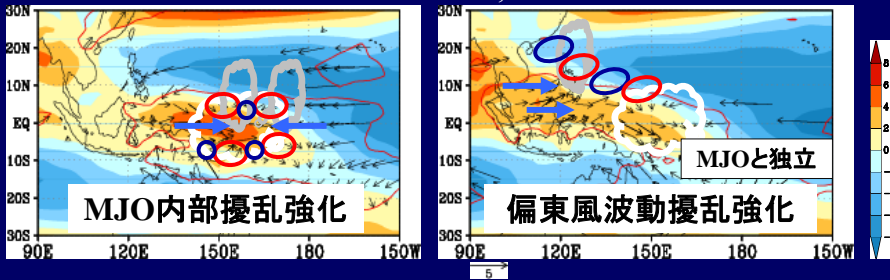


## Seiki and Takayabu 2007b

Pre El Niño

$\bar{U}$ , vector:  $\bar{u}; \bar{v}$

その他



→西風バースト→El Niño を促進

→北西太平洋での擾乱強化

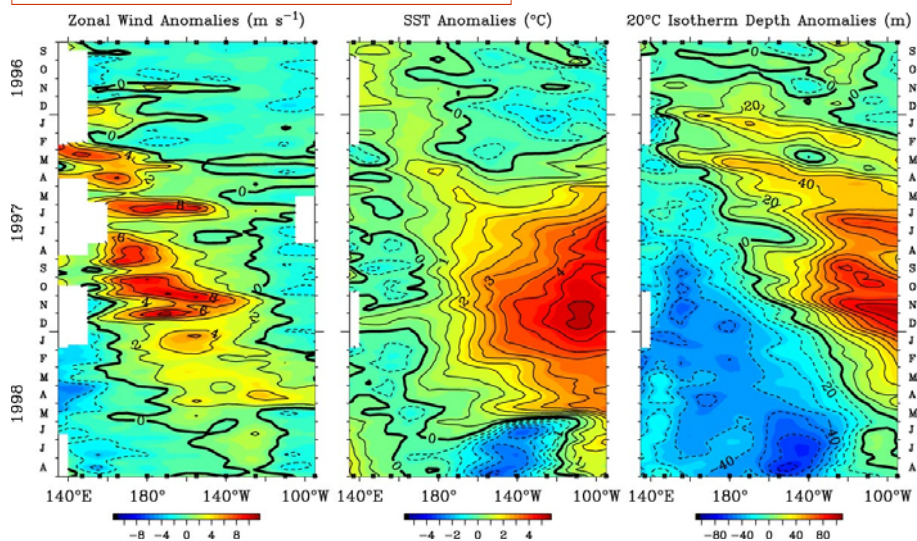
ENSOによる大規模場の違いが、

内部擾乱の発達を通じたMJOの構造変化(西風バースト)につながったり、一方で偏東風波動のようなMJO外部の総観規模擾乱を発達させたりする。



Multi-scale Interaction

MJO—WWB—ENSO



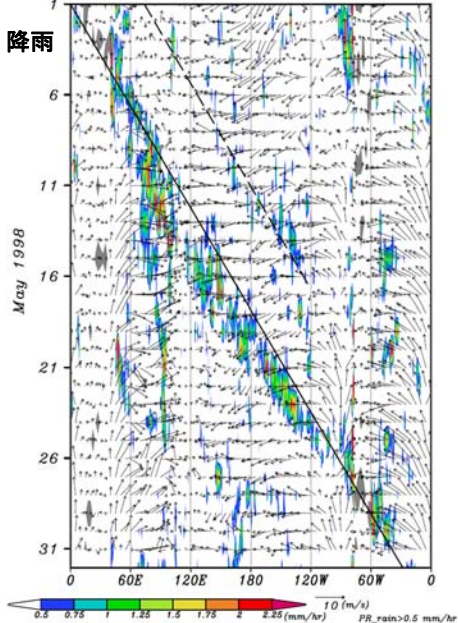
It is suggested that WWBs related to MJO, accelerate the development of El Niño, through generating oceanic Kelvin waves.

McPhaden (1999)

地球を一周した巨大積乱雲群:エルニーニョの終焉

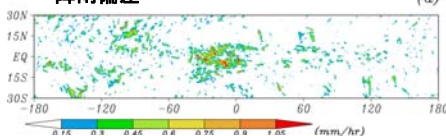


SSMI\_RAIN:10N10S, ECMWF\_WIND\_sfc:EQ

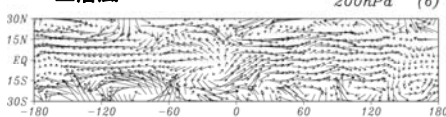


Takavabu et al. (1999)

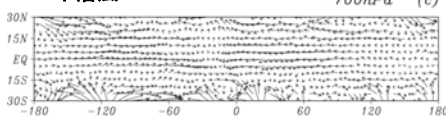
降雨偏差



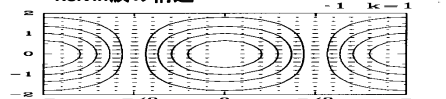
上層風



下層風

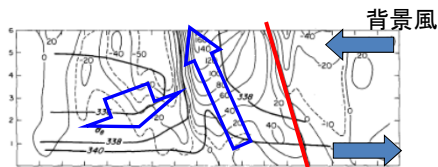


Kelvin波の構造

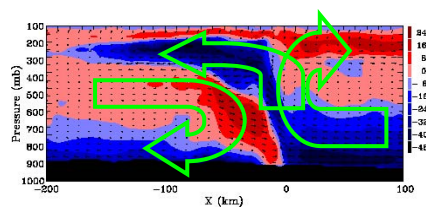


## CONVECTIVE MOMENTUM TRANSPORT ASSOCIATED WITH THE MJO (7KM NICAM)

背景 up gradient なCMTの存在

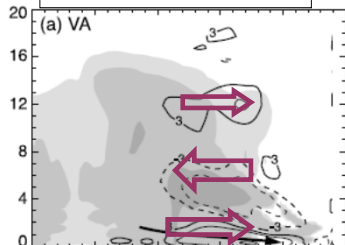


シアの方向に傾いたレインバンド  
(Lemone 1983, GATE観測より)



2次元雲解像モデルにより再現された  
スコールライン (Moncrieff, IUGG 発表より)

紫: flux鉛直収束による加速

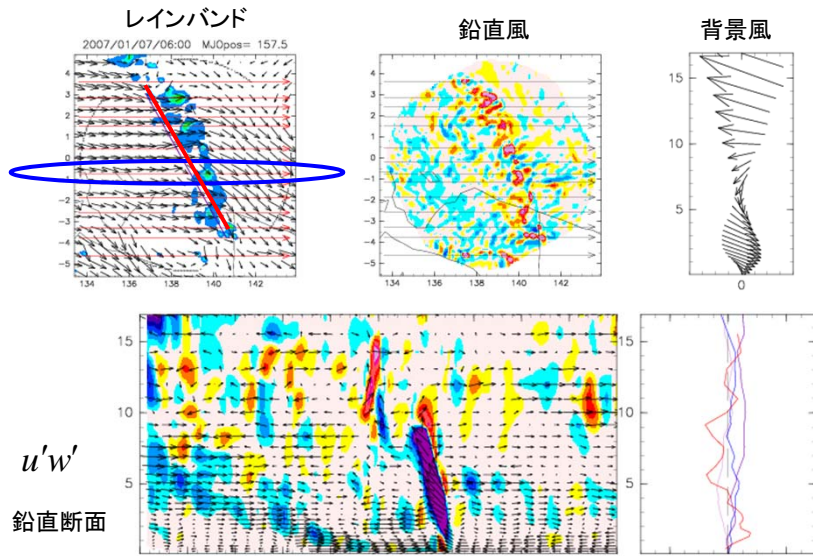


3次元雲解像モデルMM5により再現  
されたTOGACOAREで観測された  
スコールラインの層状雨域  
(Mechem et al, 2006)

観測, 2次元モデル, 3次元モデル  
による研究が行われている。

→ いずれにおいてもup gradient な  
運動量輸送の存在が確認されている

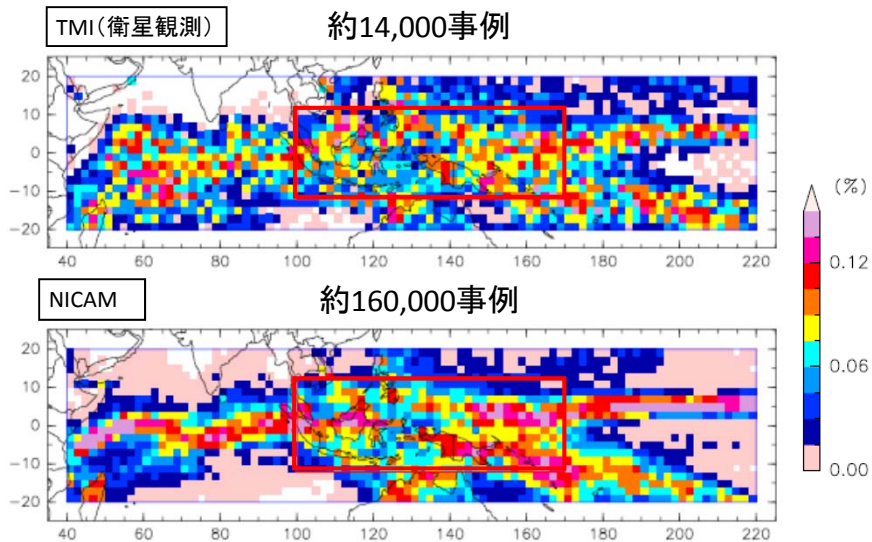
NICAMにおけるレインバンド例 1



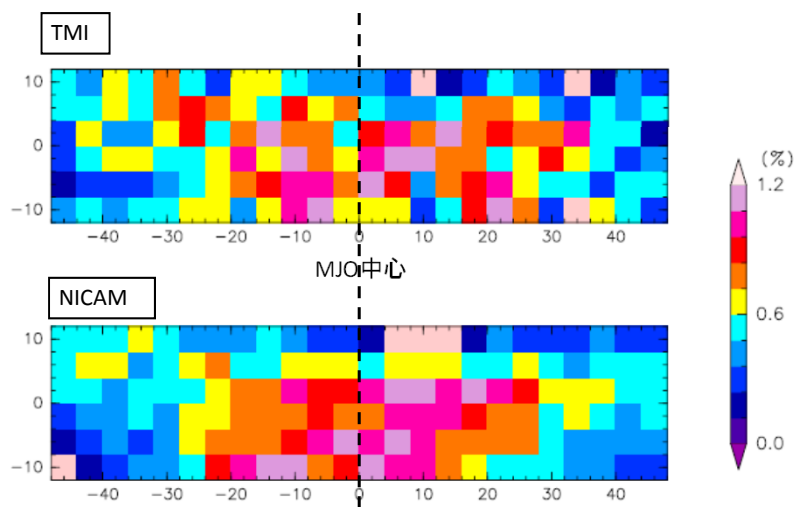
Miyakawa, 2010 学位論文

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{\rho u'w'}}{\partial z} \right) \text{ などの項の鉛直プロフィール}$$

レインバンドの検出頻度分布 TMIvsNICAM



頻度分布 TMIvsNICAM



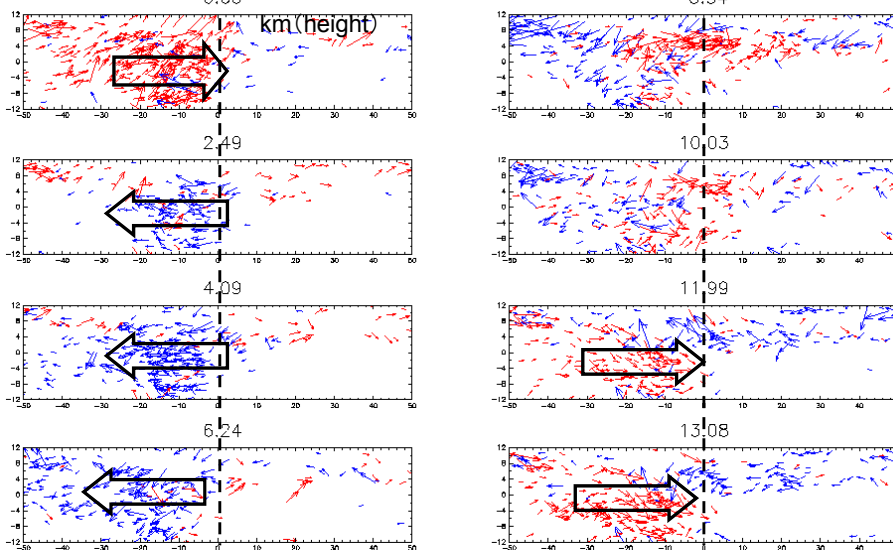
100-170Eの領域におけるレインバンドの  
MJO中心からの相対位置別の頻度分布

55

MJOの位相でコンポジットしたCMT水平マップ

$$\text{Vector} : \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho u' w'}{\partial z}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho v' w'}{\partial z} \right)$$

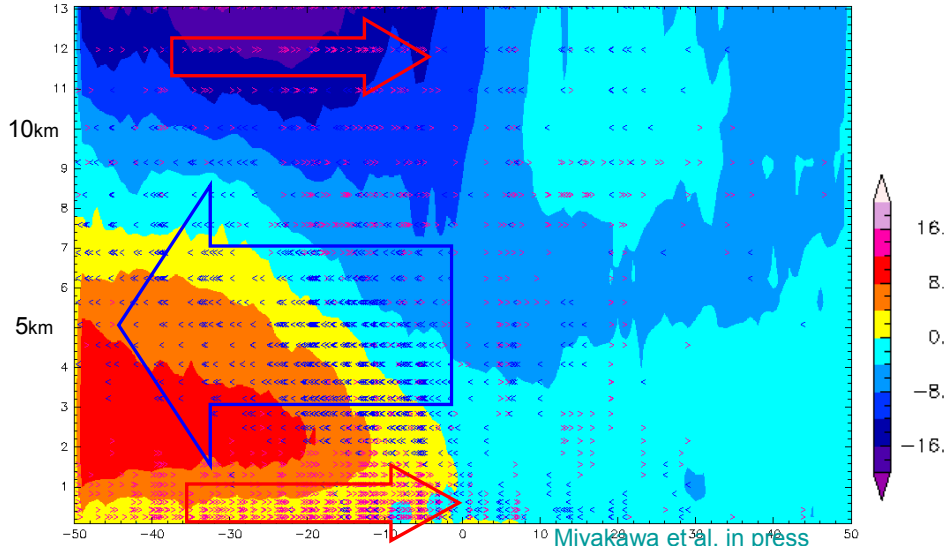
赤: x成分が正, 青: x成分が負



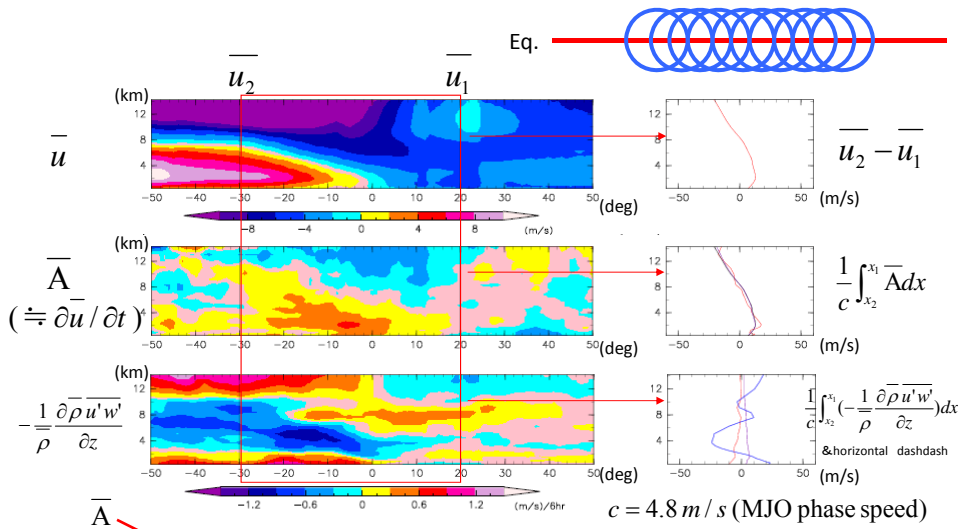
Miyakawa et al. 2012

### 4章 解析A コンポジットした背景風の赤道上の 東西鉛直断面とCMTによる加速

<: 西向き加速 >: 東向き加速 赤道±3度に中心を持つバンドのCMT

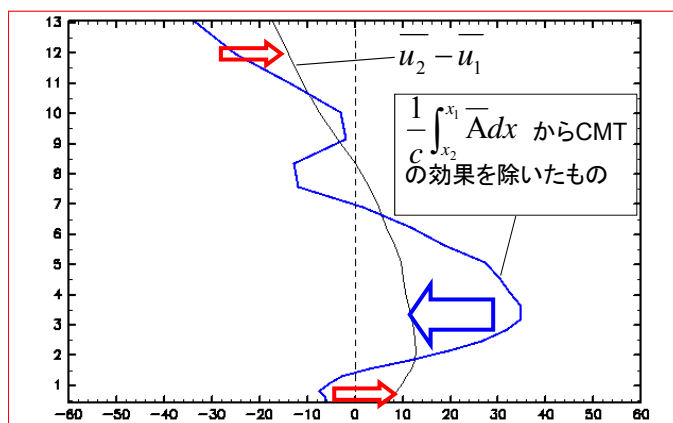


#### b. Quantitative evaluation of the impact of CMT on $\bar{u}$

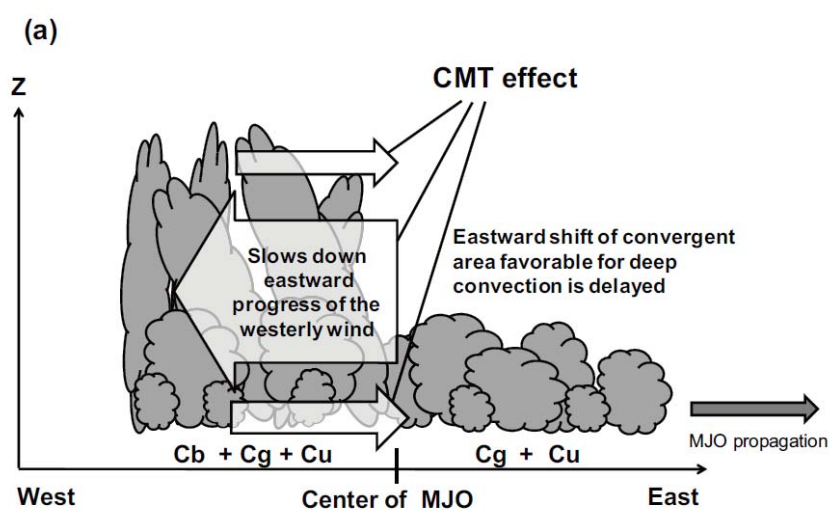


$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} + \frac{\partial \rho u' u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho u' v'}{\partial y} + \frac{\partial \rho u' w'}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \bar{F}$$

CMTによる の時間変化への影響の評価

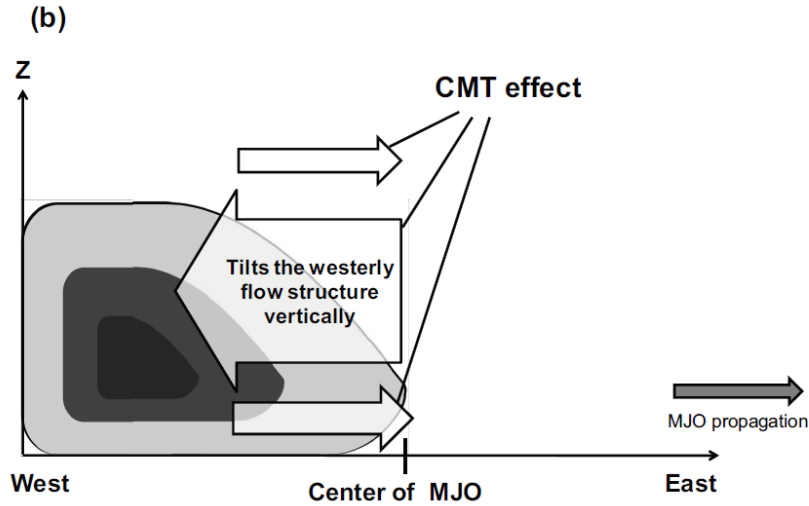


降雨バンドのCMTがMJOに及ぼす効果(考察1)



Miyakawa et al. 2012, JAS

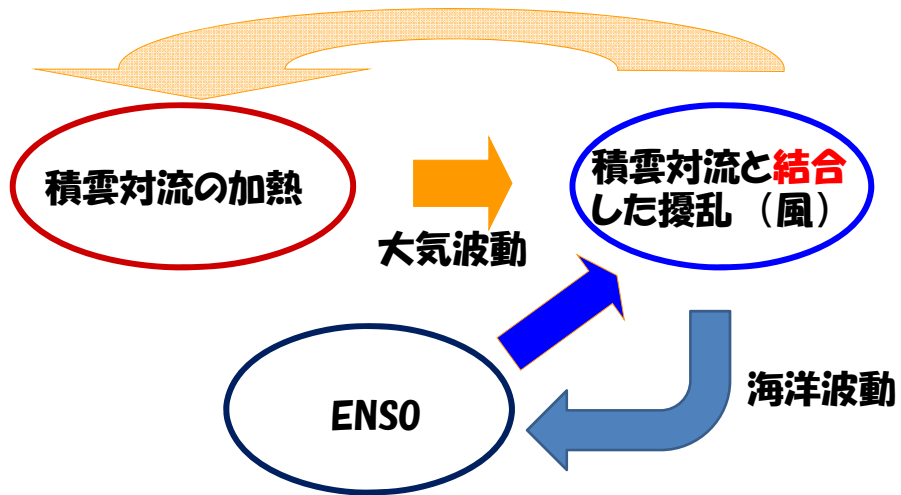
降雨バンドのCMTがMJOに及ぼす効果(考察2)



Miyakawa et al. 2012, JAS

雲・大気・海洋の相互作用に関する考察

大気中下層の大規模水蒸気収束  
(→メソシステムの組織化?)



## 参考文献

## 1. Text Books

- 新田, 1982: 気象学のプロムナード7 熱帯の気象, 東京堂出版, 215pp.
- 小倉義光 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会, 249pp.
- 小倉義光 2000: 総観気象学入門 東京大学出版会, 289pp.
- Holton, 1994: An introduction to dynamic meteorology 3rd Ed., Academic Press, 511pp.
- Holton, 2004: An introduction to dynamic meteorology 4th Ed., Academic Press, 535 pp.

## 2. Papers

- Chang, C.-P. 1970, Westward propagating cloud patterns in the tropical Pacific as seen from time-composite satellite photographs. *J. Atmos. Sci.*, 27, 133-138.
- Gill, A.E., 1980: Some simple solutions for heat-induced tropical circulation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 106, 447-462.
- Hayashi, Y. 1971 A generalized method of resolving disturbances into progressive and retrogressive waves by space Fourier and time cross-spectral analyses, *J. Meteor. Soc. Japan*, 49, 125-128.
- Kiladis, G. N., M. C. Wheeler, P. T. Haertel, K. H. Straub, P. E. Roundy, 2009: Convectively Coupled Equatorial Waves, *Rev. Geophys.*, 47, RG2003. 42pp.
- Liebmann and Hendon, H.-H., 1990: Synoptic-scale disturbances near the equator, *J. Atmos. Sci.*, 47, 1463-1479.
- Matsuno, T., 1966: Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. *J. Meteorol. Soc. Japan*, 44, 25-43.
- Miyakawa, T., Y. N. Takayabu, T. Nasuno, H. Miura, M. Satoh, and M. W. Moncrieff, 2012: Convective momentum transport by rainbands within a Madden-Julian Oscillation in a global nonhydrostatic model with explicit deep convective processes. Part I: Methodology and general results. *J. Atmos. Sci.*, 69, 1317-1338.
- Seiki, A. and Y. N. Takayabu 2007, Westerly wind bursts and their relationship with intraseasonal variations and ENSO. Part II: Energetics over the Western and Central Pacific. *Mon. Wea. Rev.*, 135, 3346-3361.
- Seiki, A. and Y. N. Takayabu 2007, Westerly wind bursts and their relationship with intraseasonal variations and ENSO. Part I: Statistics. *Mon. Wea. Rev.*, 135, 3325-3345.

- Takayabu, Y.N., 1994; Large-scale cloud disturbances associated with equatorial waves. Part I: Spectral features of the cloud disturbances., *J. Meteor. Soc. Japan*, vol.72, 433-449.
- Takayabu, Y.N., 1994; Large-scale cloud disturbances associated with equatorial waves. Part II: Westward-propagating inertio-gravity waves., *J. Meteor. Soc. Japan*, vol.72, 451-465.
- Takayabu, Y. N., K.-M. Lau and C.-H. Sui, 1996; Observation of a quasi-2-day wave during TOGA COARE, *Mon. Wea. Rev.*, vol.124, 1892-1913.
- Takayabu, Y.N. and M. Murakami, 1991; The composite structure of super cloud clusters observed over the Pacific Ocean in June 1-20, 1986 and their relationship with easterly waves., *J. Meteor. Soc. Japan*, vol.69, 105-125.
- Wallace and Gousky, 1968: Observational evidence of Kelvin waves in the tropical stratosphere, *J. Atmos. Sci.*, 25, 900-907.
- Wheeler and Kiladis, G. 1999: Convectively coupled equatorial waves: Analysis of clouds and temperature in the wavenumber-frequency domain. *J. Atmos. Sci.*, 56, 374-399.
- Yanai, M., and T. Maruyama, 1966: Stratospheric wave disturbances propagating over the equatorial Pacific, *J. Meteor. Soc. Japan*, 44, 291-294.
- Yanai, M., Maruyama, T., Nitta, Ts, and Y. Hayashi, 1968: Power spectra of large-scale disturbances over the tropical Pacific. *J. Meteor. Soc. Japan*, 46, 308-323.
- Yanai, M. and Y. Hayashi, 1969:
- Yanai, M., S. Esbensen and J. Chu, 1973: Determination of average bulk properties of tropical cloud clusters from large-scale heat and moisture budgets. *J. Atmos. Sci.*, 30, 611-627.



## APPENDIX

背景 CMT(対流による運動量輸送)について

背景東西風  $\bar{u}$  の tendency

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{w}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \bar{F}$$

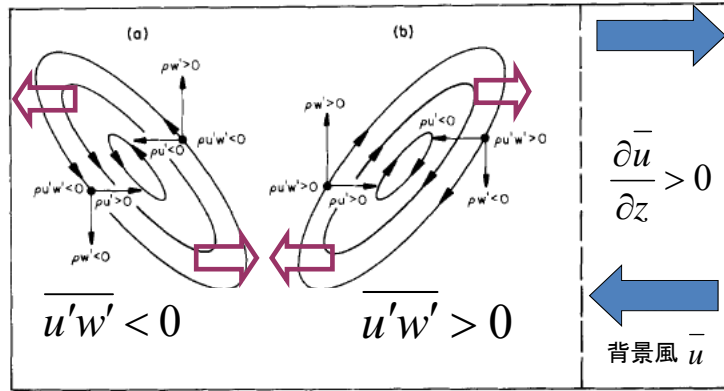
$u, v, w$  を ( $u = \bar{u} + u'$ ) のように背景場と擾乱項に置き換えて移流項を整理

$$(\text{移流項}) = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} w'}{\partial z} \right)$$

青: 背景場による移流    茶: 水平の擾乱項の相関の効果 ... 通常小さい  
(Arakawa and Schubert 1974, Wu 1994)

赤: 水平と鉛直の擾乱項の相関による効果 ≡ CMTの効果

背景 CMT(対流による運動量輸送)の要点



(Moncrieff, 1992)

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{\rho u'w'}}{\partial z} \right)$$

は背景場の水平風  $\bar{u}$  の時間変化に寄与する。

$$\frac{\overline{u'w'}}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} > 0$$

の場合、運動量輸送が水平風の鉛直シアを強める方向に働く。  
→ up gradient

Miyakawa 2010, 学位論文

### 慣性重力波

微小振幅の浅水方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \dots(2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \dots(3)$$

(1),(2)より

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0 \right) u = -g \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} - g f_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \dots(4)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0 \right) v = -g \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial y} + g f_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots(5) \rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0 \right) \nabla \cdot \vec{v} = -g \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta$$

(3)を入れて

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0 \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} = gH \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots(6)$$

$\eta = \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma)}$  の形の解を探す。(6)に入れて

$$\sigma[\sigma^2 - f_0^2 - gH(k^2 + l^2)] = 0 \quad \dots(7)$$

$\sigma = 0$ の解は、

$$f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad f_0 v = g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \dots \text{地衡流}$$

$\sigma \neq 0$ の時は、

$$\sigma = \pm [f_0^2 + gH(k^2 + l^2)]^{1/2} \quad \dots(8) \quad : \text{慣性重力波の分散関係}$$

$$c = \frac{\sigma}{|K|} = \pm \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{f_0^2}{gH(k^2 + l^2)} \right)^{1/2} \quad \dots(9) \quad : \text{位相速度}$$

慣性重力波の振動数は  $f_0$  より大、位相速度は  $\sqrt{gH}$  より大。

..... 地球の回転の効果により modify された重力波。

波数が大きいと、特性は重力波に漸近する。

解の形

$$u = \frac{\sigma k + i f_0 l}{\sigma^2 - f_0^2} g \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma)} \quad \dots(10)$$

$$v = \frac{\sigma l - i f_0 k}{\sigma^2 - f_0^2} g \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma)} \quad \dots(11)$$

質量保存式を  $-H$  から  $z$  まで積分して

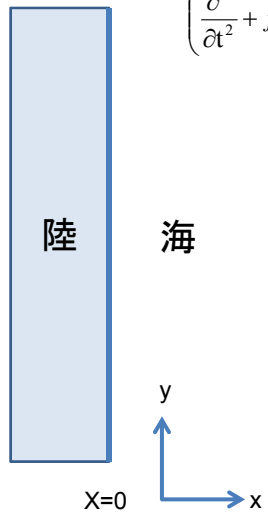
$$w = -(z+H) \nabla \cdot \vec{v} = i \sigma \left( 1 + \frac{z}{H} \right) \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma)} \quad \dots(12)$$

$$l = 0 \text{の時、} \quad u = \frac{\sigma \eta_0}{kH} \cos(kx - \sigma) \quad \dots(13)$$

$$v = \frac{f_0 \eta_0}{kH} \sin(kx - \sigma) \quad \dots(14)$$

$$w = \sigma \eta_0 \left( 1 + \frac{z}{H} \right) \sin(kx - \sigma) \quad \dots(15)$$

## Kelvin波



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0\right) \frac{\partial \eta}{\partial t} = gH \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots(6) \text{から始める。}$$

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}$$

$$u = \frac{\sigma k + if_0 l}{\sigma^2 - f_0^2} g \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}$$

$$v = \frac{\sigma l - if_0 k}{\sigma^2 - f_0^2} g \eta_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}$$

x = 0において、y方向に伸びた壁がある時  
境界条件 x = 0 で u = 0

(4)式  $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0\right) u = -g \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} - gf_0 \frac{\partial \eta}{\partial y}$  から

x = 0 で  $f_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} = 0 \quad \dots(16)$

x → ∞ で  $\eta \rightarrow 0 \quad \dots(17)$

y方向にのみ波が伝わる解を  $\eta = F(x) \sin l(y - ct) \quad \dots(18)$

(6)に代入すると、 $(-l^2 c^2 + f_0^2) F = gH \left(\frac{d^2 F}{dx^2} - l^2 F\right) \quad \dots(19)$

(17)の境界条件から、 $F(x) = \eta_0 e^{-\alpha x} \quad \dots(20) \quad \alpha > 0$

(19)に入れて  $\alpha^2 = \frac{f_0^2}{gH} + l^2 \left(1 - \frac{c^2}{gH}\right) \quad \dots(21)$

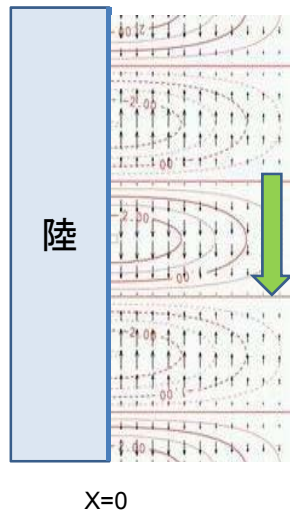
一方、(18),(20)を(16)のx = 0でのB.C.に入れると  $f_0 + \alpha c = 0 \quad \dots(22)$

(21)は、 $\alpha^2 = \frac{f_0^2}{gH} + l^2 - \frac{l^2}{gH} \frac{f_0^2}{\alpha^2} \quad \dots(23)$

$$\left(\alpha^2 - \frac{f_0^2}{gH}\right)(\alpha^2 - l^2) = 0$$

$\alpha > 0$  ひとつは  $\alpha = l$ , (22)から  $c = -\frac{f_0}{l} \quad \dots(24)$

もうひとつは  $\alpha = \frac{f_0}{\sqrt{gH}}$ ,  $c = -\frac{f_0}{\alpha} = -\sqrt{gH} \quad \dots(25)$



$$\begin{aligned} \therefore \eta &= \eta_0 e^{-x/\lambda} \sin[l(y + \sqrt{gH}t)] \\ \lambda &= \frac{\sqrt{gH}}{f_0} \quad : \text{ロスビーの変形半径} \\ u &= 0 \\ v &= -\left(\frac{g}{H}\right)^{1/2} \eta_0 e^{-x/\lambda} \sin[l(y + \sqrt{gH}t)] \end{aligned}$$

流体粒子の動きは常に壁に平行。  
北半球では岸を右に見、南半球では左に見て  $\sqrt{gH}$  の速度で進む。  
岸からロスビーの変形半径で指数関数的に振幅が減衰する。

### Rossby波

深さが一定の非粘性順圧流体では、絶対渦度が保存。時刻  $t_0$  に相対渦度  $\zeta = 0$  であったパーセルが、時刻  $t_1$  に  $\delta y$  まで動かされたとする。

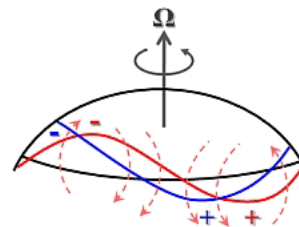
コリオリパラメタ  $f = f_0 + \beta y$  の  $\beta$  平面で考える。

$$(\zeta + f)_{t_1} = f_{t_0}$$

$$\therefore \zeta_{t_1} = f_{t_0} - f_{t_1} = -\beta \delta y$$

つまり、時刻  $t_1$  での相対渦度は、南向き変位で正、北向き変位で負。図のように、経度方向にサイン型の変位を考えると、このパターンは全体に西に動かされることがわかる。

このようにRossby波は、 $f$  の南北勾配  $\beta$  を復元力とする波である。



Holton (1994)を参考にして描かれた図。赤の太線が  $t_1$  での変位、矢印のついた破線は、励起される相対渦度。これに伴う循環によって次の時刻の変位は青線のように移動する。

## Rossby波

順圧流体、 $\beta$ 平面での渦度方程式。絶対渦度が保存。

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta + \beta v = 0 \quad \dots(1)$$

運動は、東西方向の基本流とそれに重なった無限小振幅の擾乱

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad \zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$$

擾乱の流線関数 $\psi'$

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad \zeta' = \nabla_h^2 \psi'$$

(1)を線形化すると

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla_h^2 \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad \dots(2)$$

$\psi' = A e^{i(kx+ly-\sigma t)}$  とおいて(2)に代入すると

$$(-\sigma + k\bar{u})(-k^2 - l^2) + k\beta = 0 \quad \dots(3)$$

$$\sigma = \bar{u}k - \frac{\beta}{k^2 + l^2}$$

東西方向の位相速度 $c_x = \frac{\sigma}{k}$ だから、基本流に相対的な位相速度は

$$c_x - \bar{u} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2}$$

$\beta > 0$  だから、基本流に相対的なロスビー波の東西位相速度は必ず西向きである。

緯度45度で $\beta = 1.62 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  であるから、東西波長約6000km

のロスビー波は  $c_x - \bar{u} \approx -7.4 \text{ ms}^{-1}$

この緯度帯での西風は通常これより強いので、総観規模の

ロスビー波は、地面に対しては東向きに基本流よりは遅い速度で進行する。

定在ロスビー波は  $k^2 + l^2 = \frac{\beta}{\bar{u}}$

$\bar{u} = 15 \text{ ms}^{-1}$  の時、波長約8500m である

## Equivalent Depth (等価深度)

非圧縮流体・微小擾乱・静水圧近似 ( $L \gg H$ )

$$\text{連続の式 : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad -①$$

$$\text{運動方程式 : } \left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} \end{aligned} \right\} -②$$

$$\text{静水圧 : } 0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \quad -③$$

$$\text{非圧縮の式 : } \frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \quad -④$$

$$\frac{\partial}{\partial t} ① \text{ と } \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} ② \text{ から}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p' \quad - ⑤$$

$$\frac{\partial}{\partial t} ③ - g \times ④ \text{ から}$$

$$N^2 w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial t} \quad -⑥$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad -⑦$$

(5), (6)の解は変数分離できる。

$$\left. \begin{aligned} w &= \hat{h}(z) \tilde{w}(x, y, t) \\ p' &= \hat{p}(z) \tilde{\eta}(x, y, t) \end{aligned} \right\} -⑧$$

(8)を(5),(6)に代入すると、

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \hat{h}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} &= \hat{p} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{\eta} \quad - ⑨ \\ N^2 \hat{h} \cdot \tilde{w} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \quad - ⑩ \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} / \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{\eta} &= \hat{p} / \rho_0 \frac{\partial \hat{h}}{\partial z} = C e^2 \quad - ⑪ \\ \tilde{w} / \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} / N^2 \hat{h} \quad - ⑫ \end{aligned} \right.$$

鉛直方向については、

$$\rho_0(z)^{-1} \hat{p} = C_e^2 \frac{\partial \hat{h}}{\partial z} \quad -⑬$$

$$\rho_0(z)^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = -N(z)^2 \hat{h} \quad -⑭$$

水平・時間方向については、

$$\tilde{w} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \quad - ⑮$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = C_e^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{\eta} \quad - ⑯$$

⑮・⑯は自由表面の変位 $\eta$ の均質流体の方程式と同一であり、波動方程式を作る。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} = C_e^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{\eta} \quad -⑰$$

: $C_e$ は波の位相速度に当たる。

流体粒子の鉛直変位 $h$ が  $h = \hat{h}(z)\tilde{\eta}(x, y, t)$  で表現できると考えると  $\tilde{\eta}$  の表現は適切と考えられる。このアナロジーで水平方向の運動方程式も考えると

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(x, y, t) \hat{p}(z) / \rho_0 g \\ v &= \tilde{v}(x, y, t) \hat{p}(z) / \rho_0 g \end{aligned} \quad -⑱$$

⑲に代入すると一層流体の運動方程式と同様の式が得られる。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \quad -⑲$$

一方、⑮は、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\hat{p}(z)}{\rho_0} &= -\frac{\partial \hat{h}}{\partial z} \tilde{w} = -\frac{\partial \hat{h}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \quad \text{より} \\ -g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \bigg/ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \hat{p}(z) \bigg/ \rho_0 \frac{\partial \hat{h}}{\partial z} = C_e^2 \\ \therefore \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} &= \frac{C_e^2}{g} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad -⑳ \end{aligned}$$



一層流体の連続の式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

このアナロジーで

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + H_e \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0 \quad - (21)$$

と書くことができ、 $H_e$ を等価深度(equivalent depth)と呼ぶ。

すなわち、等価な(同様のeq.を生じる)均質一層流体の深さに当たる。

$C_e$ は内部重力波の位相速度である。

さて、(13),(14)より、

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \left( \rho_0 \frac{\partial \hat{h}}{\partial z} \tilde{w} \right) + \frac{N^2}{C_e^2} \hat{h} = 0 \quad - (23)$$

ブジネスク近似が適用できる場合( $\rho_0$ が  $\hat{h}$ に比べてゆっくり変化)

$$\frac{d^2}{dz^2} \hat{h} + \frac{N^2}{C_e^2} \hat{h} = 0 \quad - (24) \quad \text{と近似できる。}$$

境界条件を与え固有値問題を解く。

半無限の大気:  $\hat{h} = 0$  at  $z = 0$

$\hat{h}$ は  $z \rightarrow \infty$  でexponential growしない。

(1)  $N = \text{const.}$  の場合、(24)が解けて

$$\hat{h} = m^{-1} \sin mz, \quad \rho_0^{-1} \hat{p} = \left( \frac{N}{m} \right)^2 \cos mz, \quad C_e = \frac{N}{m} \quad 0 < m < \infty$$

(2)  $0 < z \leq H$  で  $N$ ,  $z > H$  で  $N_2 = \epsilon N$  の場合、

$$\begin{aligned} \hat{h} &= m^{-1} \sin mz && \text{for } 0 < z < H \\ &= m^{-1} \sin mH \cos [\epsilon m(z - H)] + (\epsilon m)^{-1} \cos mH \sin [\epsilon m(z - H)] && \text{for } z > H \end{aligned}$$

ただし、鉛直波数は、地上に近い層で  $m = m_1 = \frac{N}{C_e} \quad 0 < m < \infty$

$$z > H \text{ の層で } m_2 = \frac{N_2}{C_e} = \epsilon m$$