# 基本場温度勾配の不連続性と数値拡散に関する考察

今までの主成分凝結対流計算において, 基本場温度の勾配が不連続となる点で著しい凝結 (加熱) 及び蒸発 (冷却) が生じるという問題が発生していた. 著しい凝結・蒸発は温位の数値拡散項 $NumDiff[\theta']$ によって生じるものであることが分かった.

## 温度勾配不連続点での温位の数値拡散項の見積もり

温位の数値拡散項は以下のように与えられる.

$$NumDiff[\theta'] = \nu_h \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x^2} + \nu_v \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} \tag{1}$$

但し $\nu_h, \nu_v$ はそれぞれ水平方向, 鉛直方向の数値拡散係数であり, 本モデルでは

$$\nu_h = \nu_v = 5.0 \times 10^{-4} \times \frac{\mathrm{min}[(\Delta \mathrm{x})^2, (\Delta \mathrm{z})^2]}{\Delta t} \tag{2}$$

と与えている. 以下では $\Delta x = \Delta z = 200$ [m], $\Delta t = 1.0$ [sec] であるものとして話を進める. また基本場の不連続性について議論したいので, とりあえず鉛直数値拡散のみ考えることとする.

初期において乾燥断熱層と湿潤断熱層の境界であった点での数値拡散項のオーダーを 2 次中心差分で見積もる. 初期に境界だった点は雲で覆われているものとする. 乾燥断熱層と湿潤断熱層の境界を $k$ 番目の点とする. 2 次中心差分で $k$ 番目の点の数値拡散項を見積もる際に必要となるのは, $k-1$ – $k+1$ 番目の点の情報である. 現在の火星極域の温度圧力条件下において, 乾燥断熱層, 湿潤断熱層の温位の鉛直微分はそれぞれ約 $0$ [K/km], $5$ [K/km] である. 従って, $k-1$ – $k+1$ 番目の点における温位擾乱はそれぞれ

$$\theta'_{k-1} \sim -1.0, \tag{3}$$
$$\theta'_{k} \sim 0.0, \tag{4}$$
$$\theta'_{k+1} \sim 0.0 \tag{5}$$

である. 初期に境界だった点の温位の 2 回微分は (3) – (5) より

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2}\right)_k &\sim \frac{1}{\Delta z}\left[\left(\frac{\partial \theta'}{\partial z}\right)_{k(w)} - \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z}\right)_{k-1(w)}\right] \\
&\sim \frac{1}{(\Delta z)^2}\left[\left(\theta'_{k+1} - \theta'_k\right) - \left(\theta'_k - \theta'_{k-1}\right)\right] \\
&\sim -\frac{1}{(\Delta z)^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

となる. 従って

$$
\begin{aligned}
NumDiff[\theta']_k &\sim \nu_v \left(\frac{\partial^2\theta'}{\partial z^2}\right)_k \\
&\sim -5.0\times 10^{-4}\times\frac{(\Delta z)^2}{\Delta t}\times\frac{1}{(\Delta z)^2} \\
&\sim -5.0\times 10^{-4} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

と見積もられる. distontinuity-pottempdiff.png の高度 4 km 付近 (基本場における乾燥断熱層と湿潤断熱層の境界) を見ると, おおよそ $-4\times 10^{-4}$ [K sec$^{-1}$] となっており, 両者のオーダーは等しい.

同様に, 湿潤断熱層と等温層の境界における数値拡散項を見積もる. 湿潤断熱層と等温断熱層の境界を $k$ 番目の点とする. 現在の火星極域の温度圧力条件下において, 等温断熱層の温位の鉛直微分は約 7 [K/km] である. 従って, $k-1$ – $k+1$ 番目の点における温位擾乱はそれぞれ

$$\theta'_{k-1} \sim 0.0, \qquad (8)$$

$$\theta'_{k} \sim 0.0, \qquad (9)$$

$$\theta'_{k+1} \sim (5-7)\times(0.2)\sim -0.4 \qquad (10)$$

である. 初期に境界だった点の温位の 2 回微分は (8) – (10) より

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2\theta'}{\partial z^2}\right)_k &\sim \frac{1}{(\Delta z)^2}\left[\left(\theta'_{k+1}-\theta'_k\right)-\left(\theta'_k-\theta'_{k-1}\right)\right] \\
&\sim -\frac{0.4}{(\Delta z)^2} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となる. 従って

$$
\begin{aligned}
NumDiff[\theta']_k &\sim \nu_v \left(\frac{\partial^2\theta'}{\partial z^2}\right)_k \\
&\sim -5.0\times 10^{-4}\times\frac{(\Delta z)^2}{\Delta t}\times\frac{0.4}{(\Delta z)^2} \\
&\sim -2.0\times 10^{-4} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

と見積もられる. distontinuity-pottempdiff.png の高度 15 km 付近 (基本場における湿潤断熱層と等温層の境界) を見ると, おおよそ $-1\times 10^{-4}$ [K sec$^{-1}$] となっており, 両者のオーダーは等しい.

## 数値拡散に伴う凝結量と加熱量の整合性

distontinuity-pottempcond.png の高度 4 km 付近を見ると, おおよそ $4\times 10^{-4}$ [K sec$^{-1}$] となっており, 数値拡散で冷えた分だけ潜熱加熱が生じている. 一方, distontinuitydenscloudcond.png の高度 4 km 付近を見ると, 凝結量はおおよそ $8 \times 10^{-9}$ [kg m$^{-3}$ sec$^{-1}$] となっている. 高度 4 km における潜熱加熱と凝結量の辻褄が合っていることを大雑把に見積もる.

凝結による温位の時間変化率は

$$\left(\frac{\partial \theta'}{\partial t}\right)_{cond} = \frac{LM_{cond}}{c_p \overline{\rho} \overline{\Pi}} \tag{13}$$

と書ける. 火星極域の凝結高度付近では $L \sim 6 \times 10^5$ [J kg$^{-1}$], $\overline{\rho} \sim 2 \times 10^{-2}$ [kg m$^{-3}$], $\overline{\Pi} \sim 0.8$, $c_p \sim 700$ [J K$^{-1}$ kg$^{-1}$] である. $M_{cond} \sim 8 \times 10^{-9}$ [kg m$^{-3}$ sec$^{-1}$] の場合,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial t}\right)_{cond} &\sim \frac{6 \times 10^5 \times 8 \times 10^{-9}}{700 \times 2 \times 10^{-2} \times 0.8} \\ &\sim 4 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{14}$$

となり, distontinuity-pottempcond.png の高度 4 km 付近での潜熱加熱の数値と一致する. 従って, 少なくとも凝結過程は期待通りに評価されていることが分かる.