第1章 Scott and Polvani(2008) の支配方程式及び渦度方程式の導出

Scott and Polvani(2008) においては, 以下の方程式が支配方程式として用いられている.

$$
\begin{aligned}
\zeta_t + \nabla \cdot (\vec{u}\zeta_a) &= F - \zeta/\tau_{fr} \\
\delta_t - \boldsymbol{k} \cdot \nabla \times (\vec{u}\zeta_a) &= -\nabla^2(E + gh) - \delta/\tau_{fr} \\
h_t + \nabla \cdot (\vec{u}h) &= -h'/\tau_{rad}
\end{aligned}
$$

また, これに $Fr^2 \ll Ro \ll 1$ という仮定をおくと, 以下のように変形できると記されている.

$$
q_t + J(\psi, q) = \psi/(\tau_{rad} L_D^2) - \zeta/t_{fr}
$$

これらを運動方程式より導くことで, Scott らがどうしてニュートン冷却を τ_{rad} ではなく $\tau_{rad}L_D^2$ でパラメタライズしたのかを理解する.

まず, 浅水系における強制消散なしの運動方程式は以下で表される.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} &= -\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{u} - g\nabla h, \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= -H\nabla \cdot \boldsymbol{u}.
\end{aligned}
$$

この運動方程式を議論の出発点として導出をすすめる.

1.1 支配方程式の導出

1.1.1 渦度の式の導出

まず, 渦度の式を導出するため, 水平方向の運動方程式の回転を取る.

$$\nabla\times\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\times\{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\}=-\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{u})-g\nabla\times\nabla h.$$

ここで, 両辺の z 成分のみを抜き出す. 左辺第 2 項の z 成分は以下のように表される.

$$\begin{aligned}
[\nabla\times\{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\}]_z =& \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
=& \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
& -\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
& +\nabla\cdot\boldsymbol{u}\zeta\\
=& \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad +\nabla\cdot\boldsymbol{u}\zeta\\
=& \nabla\cdot\boldsymbol{u}\zeta.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{u}\zeta=-\nabla\cdot f\boldsymbol{u},\\
\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\nabla\cdot(\zeta+f)\boldsymbol{u}=0.
\end{aligned}$$

渦度に対して強制及び消散を与えるため, 渦度に対する方程式は,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\nabla\cdot(\zeta+f)\boldsymbol{u}=F-\frac{\zeta}{\tau_{fr}}.$$

1.1.2 発散の式の導出

まず, 発散の式を導出するため, 水平方向の運動方程式の発散を取る.

$$\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\cdot\{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{u})-g\nabla\cdot\nabla h.$$

左辺第 2 項は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\} =& \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
=& \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&-\nabla\boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\nabla^2|\boldsymbol{u}|^2\\
=& \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&+\frac{1}{2}\nabla^2|\boldsymbol{u}|^2\\
=& \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&+\frac{1}{2}\nabla^2|\boldsymbol{u}|^2\\
=& -(\nabla\times\zeta\boldsymbol{u})_z+\frac{1}{2}\nabla^2|\boldsymbol{u}|^2.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial t}+(\nabla\times\zeta\boldsymbol{u})_z+\frac{1}{2}\nabla^2|\boldsymbol{u}|^2=(\nabla\times f\boldsymbol{u})_z-g\nabla^2 h,\\
\frac{\partial\delta}{\partial t}+\boldsymbol{k}\cdot\{\nabla\times(f+\zeta)\boldsymbol{u}\}=-\nabla^2(E+gh).
\end{aligned}$$

発散に対して消散を与えるため, 発散に対する方程式は,

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}+\boldsymbol{k}\cdot\{\nabla\times(f+\zeta)\boldsymbol{u}\}=-\nabla^2(E+gh)-\frac{\delta}{\tau_{fr}}.$$

1.1.3 まとめ

以上の議論より, この系の支配方程式系は以下となる.

$$\zeta_t + \nabla \cdot (\vec{u}\zeta_a) = F - \zeta/\tau_{fr}, \tag{a}$$
$$\delta_t - \boldsymbol{k} \cdot \nabla \times (\vec{u}\zeta_a) = -\nabla^2(E + gh) - \delta/\tau_{fr}, \tag{b}$$
$$h_t + H\nabla \cdot (\vec{u}) = -h'/\tau_{rad}. \tag{c}$$

ここで, $h \sim H$ とすれば, 論文中の記述と一致する.

1.2 渦度方程式の導出

以下では, 上記で求められた支配方程式を用いて, 論文中で用いられた渦度方程式を導出する.

まず, $fr^2 \ll 1$ より, $E + gh \sim gh$ として,

$$\delta_t - \boldsymbol{k} \cdot \nabla \times (\vec{u}\zeta_a) \sim -\nabla^2 gh - \delta/\tau_{fr}. \tag{b1}$$

次に, $Ro \ll 1$ より, $\zeta_a = \zeta + f \sim f$ として,

$$\zeta_t + f\nabla \cdot \vec{u} \sim F - \zeta/\tau_{fr}, \tag{a2}$$
$$\delta_t - \boldsymbol{f} \cdot \nabla \times \vec{u} \sim -\nabla^2 gh - \delta/\tau_{fr}. \tag{b2}$$

$f \sim 2\Omega$ として ζ と δ のみの式に書き換えて,

$$\zeta_t + 2\Omega\delta \sim F - \zeta/\tau_{fr}, \tag{a3}$$
$$\delta_t - 2\Omega\zeta \sim -\nabla^2 gh - \delta/\tau_{fr}. \tag{b3}$$

次に, 鉛直擾乱より水平擾乱のほうが寄与が大きいとすると, $\frac{\partial h}{\partial t} \ll H\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ となり,

$$
\begin{aligned}
H\nabla \cdot \boldsymbol{u} &\sim -\frac{h'}{\tau_{rad}}, \\
\delta &\sim -\frac{1}{\tau_{rad}}\frac{h'}{H}.
\end{aligned} \tag{c1}
$$

これで, 式 (a), (b), (c) を変形した方程式 (a3), (b3), (c1) が全て得られた.

ここからは, 上記で得られた式を 1 本の式にまとめていく. まずは, 式 (b3) と式 (c3) をまとめる. 式 (c3) を式 (b3) に代入して,

$$
-\frac{1}{H}\left(\frac{1}{\tau_{rad}}h_t - 2\Omega H\zeta\right) \sim -\nabla^2 gh - \frac{1}{\tau_{rad}\tau_{fr}}\frac{h'}{H}. \tag{d1}
$$

ここで, 左辺の各項の大きさを比べる. $\omega = o(1)$ であり, $\zeta \sim \delta \sim \psi k^2$ であるとすると, $\frac{\partial h}{\partial t} \ll H\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ より, $\frac{1}{\tau_{rad}}h_t \ll 2\Omega H\zeta$. したがって,

$$
2\Omega\zeta \sim -\nabla^2 gh - \frac{1}{\tau_{rad}\tau_{fr}}\frac{h'}{H}. \tag{d2}
$$

浅水層の厚さに比べ擾乱が小さい, すなわち $h' \ll H$ であるとすると,

$$
\begin{aligned}
2\Omega\zeta &\sim -\nabla^2 gh, \\
h' &\sim \frac{2\Omega\psi}{g}.
\end{aligned} \tag{d3}
$$

次に, 式 (a3) と式 (c3) をまとめる. 式 (a3) に式 (c3) を代入して,

$$
\zeta_t - \frac{2\Omega}{\tau_{rad}}\frac{h'}{H} \sim F - \zeta/\tau_{fr}. \tag{e1}
$$

最後に, 式 (d3) と式 (e1) をまとめる. 式 (e1) に式 (d3) を代入して,

$$
\zeta_t - \frac{\psi}{\tau_{rad}}\frac{4\Omega^2}{gH} \sim F - \zeta/\tau_{fr}. \tag{f1}
$$

$L_D = \frac{\sqrt{gH}}{2\Omega}$ を導入して,

$$\zeta_t \sim F + \frac{\psi}{\tau_{rad} L_D^2} - \zeta/\tau_{fr}. \tag{f2}$$

$\zeta_t = q_t + J(\psi, q)$ を代入して,

$$q_t + J(\psi, q) \sim F + \frac{\psi}{\tau_{rad} L_D^2} - \zeta/\tau_{fr}. \tag{f3}$$

これで, 論文中で用いられている渦度方程式が求められた.

1.3 $\tau_{rad} L_D^2$ でパラメタライズする意味

論文中には「同じ Ro において異なる L_D での流れ場の発展を比較するために L_D でスケーリングした」とある. しかし, これだけでは $\tau_{rad} L_D^2$ の値をパラメタライズして計算を行った理由はわからない.

放射緩和による散逸項を見ると, これは式 (f1) を見ると分かる通り, τ_{rad} と H に反比例している. これより, Scott たちは $\tau_{rad} H$ でパラメタライズしていることがわかる. この意図としては, 恐らく τ_{rad} を H に反比例させたかったのではないか. これは, 物理的には, 放射冷却のメカニズムから求められる.

放射冷却は, 気体自らが持つ温度による黒体放射によって冷却されるものである. もしも気体による赤外吸収が放射に比べて無視できる程度に弱いとした場合, 気体から散逸するエネルギーは気体の体積に比例, 同じ面積で比較するならば層の厚さに比例するはずである. τ_{rad} は気体から散逸するエネルギーに反比例している. つまり, 放射冷却の時定数 τ_{rad} は層の厚さ H に反比例しているはずである.

以上のように, 物理的に考えた場合, 放射冷却の時定数は層の厚さ H に反比例, つまり L_D^2 に反比例しているはずである. そして, この $\tau_{rad} L_D^2$ の値を定めることは, 惑星大気の単位体積あたりの冷却の時定数を定めることになる. これは気体の性質によって物理的に定められる数である. よって, 本計算における放射冷却による散逸項が $\tau_{rad} L_D^2$ によってパラメタライズされるのは, 気体の冷却の時定数のパラメータを設定していることになる.