雲密度・静的安定度の計算方法

杉山耕一朗 (北大理・地惑)
sugiyama@gfd-dennou.org

2005/03/04

目 次

1 雲密度の計算方法 2

2 湿潤断熱減率の計算 3

2.1 乾燥断熱温度減率 3

2.2 湿潤断熱温度減率 4

3 静的安定度の計算 6

3.1 静的安定度 N^2 の定式化 6

4 実際の惑星大気を想定した静的安定度の計算 9

4.1 気塊の分子量と気塊の周囲の分子量が同じ場合 10

4.1.1 湿度 0 % の場合 10

4.1.2 湿度 100 % の場合 11

4.2 気塊の分子量を大気の乾燥成分の分子量とする場合 11

4.2.1 湿度 0 % の場合 12

4.2.2 湿度 100 % の場合 12

4.3 従来の論文との比較 13
4.3.1 Achterberg and Ingersoll (1989) 13
4.3.2 中島 (1998) 14

1　雲密度の計算方法

静水圧平衡にある大気での雲密度は Weidenschilling and Lewis (1973) の方法によって導くことができる. 静水圧平衡にある大気でのある高度 J において

$$M^{\mathrm{J}} = \frac{p^{\mathrm{J}}}{g} \tag{1}$$

が成り立つ. ここで M^{J} は高度 J より上における大気の単位面積当たりの質量である. 物質 k の高度 J より上での単位面積当たりの大気の質量は

$$m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}} \cdot M^{\mathrm{J}} \tag{2}$$

である. ここで m_k^J は大気の質量分率である. それゆえ物質 k が凝縮する際, 高度 I から J の変化幅 dz における平均雲密度 $\bar{D}$ は,

$$\bar{D} = \frac{(m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}})\bar{M}}{dz} \tag{3}$$

である. ここで $\bar{M}$ は考えている領域での単位面積当たりの平均質量である. (4) 式はモル分率と圧力の項によって書き換えることができる.

$$D = \frac{m_{\mathrm{k}}(X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}})\bar{p}}{\bar{m}gdz}. \tag{4}$$

但し $\bar{m}$ は大気の平均分子量, m_{k} は物質 k の分子量である. 分子量の単位は $\mathrm{kg\ mol^{-1}}$ に換算する必要がある.

さらに高度の変化 dz を圧力変化 dp で書き換える. 静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いると,

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz, \\ &= -\frac{\bar{m}p}{RT} g dz, \\ dz &= -\frac{RTg}{\bar{m}p} dp, \end{aligned} \tag{5}$$

である. (4) 式に (5) 式を代入することによって,

$$D = \frac{m_{\mathrm{k}}(X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}})\bar{p}^2}{RTdp}. \tag{6}$$

が求まる. もし 1 つ以上の物質が凝縮して雲を作る場合 (NH_4SH や アンモニア水溶液), (6) 式の右辺は凝縮する物質を足し合わせたものになる.

2　湿潤断熱減率の計算

Weidenschilling and Lewis (1973), Atreya and Romani (1985) に従って湿潤断熱減率を定式化する. 熱力学の第 1 法則は,

$$dU = \delta Q + \delta W + \delta Z, \tag{7}$$

である. ここで dU は内部エネルギー，δQ は系に加えられる熱量，δW は系に加える仕事，δZ は化学エネルギーである．考えている系において気体は理想気体として取り扱うことができ，その変化は断熱的にであるとすると，(9) 式の各項は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
dU &= c_v dT. && (8)\\
\delta Q &= 0. && (9)\\
\delta W &= -pdV,\\
&= -d(pV) + Vdp,\\
&= -RdT + Vdp,\\
&= -RdT + V\left(\frac{-Mpg}{RT}\right)dz,\ (\because \text{静水圧平衡の式})\\
&= -RdT - Mgdz. && (10)\\
\delta Z &= -\sum \lambda dX. && (11)
\end{aligned}$$

ここで c_v は大気の定積モル比熱の平均値，T は温度, p は圧力, V は 気体分子の 1 モル当たりの体積，R は気体定数, M は平均分子量, g は重力加速度, λ は大気中の凝縮成分のモル当たりの凝縮のエンタルピー，dX は凝縮成分のモル比の変化である. (7) 式に (8) – (11) 式を代入することで,

$$\begin{aligned}
c_v dT + RdT + Mgdz + \sum \lambda dX = 0,\\
c_p dT + Mgdz + \sum \lambda dX = 0, && (12)
\end{aligned}$$

となる．但し c_p は大気の定圧モル比熱の平均値で，理想気体の場合 $c_p = c_v + R$ である．

2.1　乾燥断熱温度減率

(12) 式の潜熱による項を無視することで乾燥断熱温度減率が求まる．

$$\begin{aligned}
c_p dT + Mgdz = 0,\\
\frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{c_p}. && (13)
\end{aligned}$$

また, 温度の圧力微分は以下のように書ける.

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_p p}. \tag{14}$$

2.2　湿潤断熱温度減率

dX をモル分率と分圧の関数として表すと以下のようになる.

$$dX = \frac{1}{p}de - \left(\frac{e}{p^2}\right)dp. \tag{15}$$

ただし e は凝縮成分の飽和蒸気圧である. この式にクラウジウス・クラペイロンの式

$$de = \frac{e\lambda dT}{RT^2}, \tag{16}$$

を代入して変形すると,

$$\begin{aligned} dX &= \frac{1}{p}de - \frac{e}{p^2}dp, \\ &= \frac{1}{p}\left(\frac{e\lambda dT}{RT^2}\right) - \frac{e}{p^2}\left(-\frac{Mpg}{RT}dz\right), \\ &= \frac{e}{p}\frac{\lambda}{R_v T^2}dT + \frac{e}{p}\frac{Mg}{RT}dz, \\ &= \frac{\lambda X}{RT^2}dT + \frac{MgX}{RT}dz. \end{aligned} \tag{17}$$

となる.

(12) 式に (17) 式を代入することで湿潤断熱温度減率が求まる .

$$\begin{aligned} &c_p dT + Mgdz + \sum \lambda dX = 0, \\ &c_p dT + Mgdz + \sum \lambda \left(\frac{\lambda X}{RT^2}dT + \frac{MgX}{RT}dz\right) = 0, \\ &c_p \left(1 + \frac{\sum \lambda^2 X}{c_p RT^2}\right)dT + Mg\left(1 + \frac{\sum \lambda X}{RT}\right)dz = 0, \\ &\frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{c_p}\left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2}}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

但し和の規約を用いている. (18) を変形すると温度の圧力微分は,

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_p p}\left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2}}\right). \tag{19}$$

と書ける.

断熱的な温度減率は以下の表現される.

乾燥断熱温度減率

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{c_p}.$$

湿潤断熱温度減率

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{c_p}\left(\frac{1+\frac{\lambda X}{RT}}{1+\frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2}}\right).$$

3　静的安定度の計算

空気塊を断熱的に上昇させる過程を考える. 空気塊の密度と周囲の空気の密度差によって浮力が生じ, その浮力を復元力とする振動の振動数を浮力振動数 N と呼ぶ. 浮力振動数の 2 乗を静的安定度 N^2 と呼ぶ.

本節では静的安定度の定式化と, 実際の惑星大気における見積もり方法を述べる.

3.1　静的安定度 N^2 の定式化

空気塊が上昇することによって, 本来は気塊の周囲の大気の圧力と密度も影響を受けるはずである. しかしその影響を小さいとして無視する方法をパーセル法という. 本節ではパーセル法による静的安定度の定式化を述べる.

空気塊の密度を ρ^*, 気塊の周囲の大気の密度を ρ とする. その密度差は,

$$d\rho = \rho^* - \rho \tag{20}$$

と書ける. この時運動方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\delta z &= \frac{(\rho - \rho^*)\, g}{\rho^*} \\ &= \frac{R^* T^* - RT}{RT} \\ &= \frac{(T_v^* - T_v)g}{T_v} \end{aligned} \tag{21}$$

となる. ただし $T_v = TM_d/M$ は気塊の周囲の大気の仮温度, $T_v^* = TM_d/M^*$ は気塊の仮温度, M は気塊の周囲の大気の分子量, M^* は気塊の分子量である. R, R^* はそれぞれ周囲の大気と気塊の気体定数である. 式変形の際には $\rho = p/RT$ を用いた. ここで微小区間 dz の間で温度勾配が一定値をとるとすると,

$$\begin{aligned} T_v^* - T_v &= \left(T + \frac{dT_v^*}{dz}\delta z\right) - \left(T + \frac{dT_v}{dz}\delta z\right) \\ &= \left(\frac{dT_v^*}{dz} - \frac{dT_v}{dz}\right)\delta z \end{aligned} \tag{22}$$

である. ここで Γ^* は気塊の温度減率, Γ は気塊の周囲の大気の温度減率である. したがって,

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v^*}{dz} - \frac{dT_v}{dz}\right)\delta z \tag{23}$$

となり, $\delta z = sin(Nt)$ を代入することで静的安定度は,

$$N^2 \equiv \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} - \frac{dT_v^*}{dz}\right) \tag{24}$$

と定義される.

さらに仮温度減率の式を変形すると,

$$\begin{aligned} \frac{dT_v}{dz} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{M_d}{M}T\right) \\ &= \frac{M_d}{M}\frac{dT}{dz} - \frac{M_dT}{M^2}\frac{dM}{dz}. \end{aligned} \tag{25}$$

となるので, (25) を用いて (24) 式を書き換えると,

$$\begin{aligned} N^2 &\equiv \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} - \frac{dT_v^*}{dz}\right) \\ &= \frac{g}{T}\frac{M}{M_d}\left\{\left(\frac{M_d}{M}\frac{dT}{dz} - \frac{M_dT}{M^2}\frac{dM}{dz}\right) - \left(\frac{M_d}{M^*}\frac{dT^*}{dz} - \frac{M_dT^*}{M^{*2}}\frac{dM^*}{dz}\right)\right\} \\ &= \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} - \frac{M}{M^*}\frac{dT^*}{dz}\right) - g\left(\frac{1}{M}\frac{dM}{dz}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

である. 気塊の中で凝縮が生じたとしても凝縮物は気塊から分離しないので, $dM^*/dz = 0$ とみなした. 本来, 高度 z において気塊と周囲の大気の分子量は $M^* = M$ となるべきだが, 教科書によっては大気中の可凝縮成分が少ないと仮定し, 周囲の大気の湿度を 100 %, 気塊の湿度を 0 % とすることがある. そのため (26) 式では, $M^* \neq M$ としている.

静的安定度は以下のように定義される.

仮温度を用いた表現

$$N^2 = \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} - \frac{dT_v^*}{dz}\right)$$

温度を用いた表現

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} - \frac{M}{M^*}\frac{dT^*}{dz}\right) - g\left(\frac{1}{M}\frac{dM}{dz}\right)$$

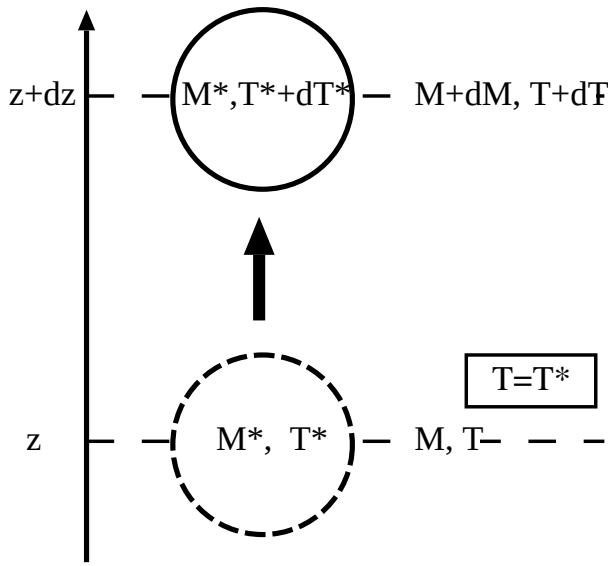

図 1: パーセル法による静的安定度の見積もりの概要. 気塊の周囲の大気の温度 T と 分子量 M, 気塊の温度 T^* と分子量 M^* とする. 気塊を上昇・下降させた際, 気塊の温度は変化するが気塊から凝縮物が離脱しないとすると, $p + dp$ での気塊の分子量は M^* のまま維持される.

4 実際の惑星大気を想定した静的安定度の計算

実際の惑星大気の静的安定度の見積もりを考える. 必要な情報は,

- 周囲の大気の温度 $T(z)$
- 気塊の温度 $T^*(z)$
- 周囲の大気の分子量 $M(z)$
- 気塊の分子量 $M^*(z)$

である. これら 4 つの変数をどのように与えるかは, 惑星大気をどのようにモデル化するかに依存する. 地球大気の平均的な温度・分子量の決まりかたの模式図を図 2 を示す. 地球大気の場合, 平均的な温度は上昇流域 (雲の中) の湿潤断熱減率で決まり, 平均的な分子量はほぼ乾燥成分の分子量とみなすことができる. 惑星大気一般に地球の経験を適用できるという保証はないが, 活発な湿潤対流が生じているならば, 地球と同様に平均的な大気構造が決まっている可能性がある.

そこで大気は乾燥成分 (分子量 M_d) と可凝縮成分 (分子量 M_v) から成るものとし, 上記の 4 つの物理量を以下のように仮定する.

- 周囲の大気の温度 $T(z)$
  $\rightarrow$ 雲対流で実現される鉛直温度構造. 温度勾配は湿潤擬断熱温度減率 Γ_m と同じになる. $dT/dz = \Gamma_m$
- 気塊の温度 $T^*(z)$
  $\rightarrow$ 気塊の組成により決まる断熱的な鉛直温度構造.
- 周囲の大気の分子量 $M(z)$
  $\rightarrow$ 湿度 r の大気の分子量. 雲対流で実現される湿潤擬断熱的な可凝縮成分のモル比 $X(z)$ を用いて, 周囲の大気の可凝縮成分のモル比を $rX(z)$ とする. 分子量は $M(z) = (1 - rX)M_d + rXM_v$ となる.
- 気塊の分子量 $M^*(z)$
  $\rightarrow$ $M^* = M_d$ の場合と, $M^* = M$ の場合の 2 通りを考える. 地球のように可凝縮成分が少ない大気において, 周囲の大気の分子量が変化する効果を考慮する場合に $M^* = M$ とする場合があるからである.

周囲の大気の分子量を $M(z) = (1 - rX)M_d + rXM_v$ とすると, 静的安定度の式 (26) は以下のように書ける. ただし湿度は $0 < r < 1$ である.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} - \frac{M}{M^*}\frac{dT^*}{dz}\right) - \frac{g}{M}\frac{d}{dz}\left\{(1 - rX)M_d + rXM_v\right\}, \\ &= \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} - \frac{M}{M^*}\frac{dT^*}{dz}\right) - g\left(\frac{r(M_v - M_d)}{M}\frac{dX}{dz}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

以下の節では, 気塊の分子量を, (1) 周囲の分子量と同じ場合, (2) 乾燥成分の分子量と同じ場合, の 2 通りに与えた場合の静的安定度を定式化する.

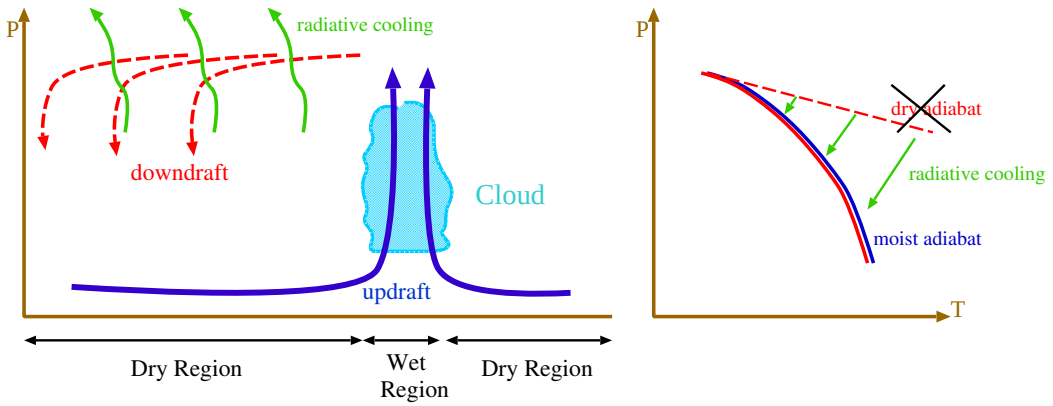

図 2: 地球大気での平均的な温度・分子量の決まりかたの模式図. 地球大気の対流構造は, 狭い上昇流域と広い下降流域, によって特徴づけられる. 平均的な温度は雲の中の湿潤断熱減率で決まり, 平均的な分子量は下降域の乾燥成分のみの分子量で決まる.

4.1 気塊の分子量と気塊の周囲の分子量が同じ場合

(27) 式に $M^* = M$ を代入すると,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\Gamma_m - \frac{dT^*}{dz}\right) - g\left(\frac{r(M_v - M_d)}{M}\frac{dX}{dz}\right) \tag{28}$$

と書ける. ただし $M = (1 - rX)M_d + rXM_v$ である.

4.1.1 湿度 0 % の場合

湿度 0 % の場合には, 気塊の断熱温度減率は大気の乾燥成分の乾燥断熱減率に等しくなるので,

$$\frac{dT^*}{dz} = -\frac{M_d g}{c_{pd}}$$

となる. ただし c_{p_d} は乾燥成分の比熱 (単位は J/ K mol) である. それを用いると,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{M_d g}{c_{p_d}}\right) \tag{29}$$

と書ける. すなわち静的安定度は湿潤断熱減率と乾燥断熱減率との差から見積もることができる.

4.1.2 湿度 100 % の場合

湿度 100 % の場合を考える. この場合, (a) 気塊内の凝縮を許す場合, (b) 気塊の過飽和を許す場合, の 2 通りで議論が分かれる.

(a) 気塊内の凝縮を許す場合, 気塊の断熱減率は湿潤断熱減率に等しくなるので,

$$\frac{dT^*}{dz} = \Gamma_m$$

となる. それを用いると,

$$N^2 = -\frac{g(M_v - M_d)}{(1-X)M_d + XM_v}\frac{dX}{dz} \tag{30}$$

と書ける. すなわち静的安定度は分子量勾配によって決まる.

(b) 気塊内の過飽和を許す場合, 気塊の断熱減率は湿度 100 % の場合にも関わらず乾燥断熱減率に等しくなるので,

$$\frac{dT^*}{dz} = -\frac{Mg}{c_p}$$

となる. ただし c_p は可凝縮成分のモル比を X とした場合の比熱である. それを用いると,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \{(1-X)M_d + XM_v\}\frac{g}{c_p}\right) - \frac{g(M_v - M_d)}{(1-X)M_d + XM_v}\frac{dX}{dz} \tag{31}$$

と書ける.

(30), (31) 式を比較すると, 当然ながら過冷却を認める (31) 式の方が静的安定度は大きくなる.

4.2 気塊の分子量を大気の乾燥成分の分子量とする場合

気塊の分子量を大気の乾燥成分の分子量とみなすと, 分子量は,

$$M^* = M_d \tag{32}$$

となり, 気塊の断熱温度減率は,

$$\frac{dT^*}{dz} = -\frac{M_d g}{c_{p_d}} \tag{33}$$

となる. ただし c_{p_d} は大気の乾燥成分の比熱である. 以上を用いて (26) 式を書き下すと,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{Mg}{c_{p_d}}\right) - g\left(\frac{1}{M}\frac{dM}{dz}\right) \tag{34}$$

となり, 仮温度を用いて表現すると,

$$N^2 = \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{M_d g}{c_{p_d}}\right) \tag{35}$$

となり, モル比を用いて表現すると,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{Mg}{c_{p_d}}\right) - g\left(\frac{r(M_v - M_d)}{M}\frac{dX}{dz}\right) \tag{36}$$

である. ただし $M = (1 - rX)M_d + rXM_v$ である.

4.2.1 湿度 0 % の場合

湿度 0 % の場合には, 周囲の分子量は乾燥成分の分子量に等しくなるので,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{M_d g}{c_{p_d}}\right) \tag{37}$$

と書ける. すなわち静的安定度は湿潤断熱減率と乾燥断熱減率との差から見積もることができる. この式は気塊の分子量と周囲の分子量と同じにみなした場合の (29) 式と同じである.

4.2.2 湿度 100 % の場合

湿度 100 % の場合には, $M = (1 - X)M_d + XM_v$ である.

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \{(1 - X)M_d + XM_v\}\frac{g}{c_{p_d}}\right) - \frac{g(M_v - M_d)}{(1 - X)M_d + XM_v}\frac{dX}{dz} \tag{38}$$

である. (31) 式と比較すると, 気塊の比熱の与え方の分だけ異なっている. この式を仮温度で表現すれば, (35) 式と同じになる. 木星のように「乾燥成分の比熱 $>$ 可凝縮成分の分子量」ならば, 静的安定度の最大値は (31) 式で与えられる. しかし地球のように「乾燥成分の分子量 $>$ 可凝縮成分の分子量」ならば, 静的安定度の最大値は (38) 式で与えられる.

4.3 従来の論文との比較

4.3.1 Achterberg and Ingersoll (1989)

Achterberg and Ingersoll (1989) は静的安定度, 仮温度, 湿潤擬断熱温度減率を以下のように与えた[1] .

$$N^2 = \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{g}{c^\dagger_{pd}}\right), \tag{39}$$

$$T_v = \frac{T}{1+(\varepsilon-1)e/p}, \tag{40}$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c^\dagger_p}\left(\frac{1+\frac{\lambda^\dagger q}{R^\dagger T}}{1+\frac{{\lambda^\dagger}^2 \varepsilon q}{R^\dagger c^\dagger_p T^2}}\right) \tag{41}$$

ただし添字 † の付いた量は単位質量当たりの量で, $R^\dagger = R/M$ は大気の単位質量当たりの気体定数, $c^\dagger_p = c_p/M$ は大気の単位質量当たりの比熱, $c^\dagger_{pd} = c_p/M_d$ は単位質量当たりの乾燥成分の比熱, $\lambda^\dagger = \lambda/M_v$ は単位質量当たりの潜熱である. $\varepsilon = M_v/M_d$ は可凝縮成分の分子量と乾燥成分の分子量との比, e は可凝縮成分の飽和蒸気圧, q は可凝縮成分の混合比である.

この式は,

(a) 気塊の分子量を乾燥成分の分子量とみなす.

(b) 周囲の大気の分子量を湿度 100 % の大気の分子量, すなわち雲の中の大気の分子量と同じとみなす.

(c) 可凝縮成分を少ないとする近似を適用する.

という条件の下で導くことができる. 以下では, 前節で求めた静的安定度, 仮温度, 湿潤断熱減率が, それぞれ (39) – (41) 式で表現できることを示す.

初めに静的安定度の式 (39) は, 上記の条件 (a), (b) の下で求めた静的安定度の式 (35) 中の単位モル当たりの量を単位質量当たりに変換することで求めることができる.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{M_d g}{c_{p_d}}\right) \\ &= \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{g}{c^\dagger_{p_d}}\right) \end{aligned}$$

[1] Achterberg and Ingersoll (1989) の式には誤植がある.

次に仮温度の式 (40) は, 仮温度の定義式を変形することで導かれる.

$$\begin{aligned} T_v &= T\frac{M_d}{M}, \\ &= T\frac{M_d}{M_d(1-X)+M_vX}, \\ &= T\frac{M_d}{M_d(p-e)/p+M_ve/p}, \\ &= T\frac{M_dp}{M_dp+(M_v-M_d)e}, \\ &= T\frac{1}{1+(M_v-M_d)/M_de/p}, \\ &= \frac{T}{1+(\varepsilon-1)e/p}. \end{aligned}$$

最後に湿潤断熱温度減率の式 (41) を, 上記の条件 (c) の下で求めた湿潤断熱温度減率 (18) に一致することを示す. 凝結成分が少ない場合,

$$q = \frac{M_vX}{M_d(1-X)+M_vX} \approx \frac{M_v}{M_d}X. \tag{42}$$

$$M \approx M_d \tag{43}$$

となるので, この関係を用いて (18) 式を変形し, また (18) 式中の単位モル当たりの量を単位質量当たりの量に変換すると,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= -\frac{Mg}{c_p}\left(\frac{1+\frac{\lambda X}{RT}}{1+\frac{\lambda^2X}{c_pRT^2}}\right), \\ &= -\frac{Mg}{(Mc_p^\dagger)}\left(1+\frac{(M_v\lambda^\dagger)(qM_d/M_v)}{(M_dR^\dagger)T}\right)/\left(1+\frac{(M_v\lambda^\dagger)^2(qM_d/M_v)}{(M_dc_p^\dagger)(M_dR^\dagger)T^2}\right), \\ &= -\frac{g}{c_p^\dagger}\left(\frac{1+\frac{\lambda^\dagger q}{R^\dagger T}}{1+\frac{{\lambda^\dagger}^2\varepsilon q}{R^\dagger c_p^\dagger T^2}}\right). \end{aligned}$$

4.3.2 中島 (1998)

中島 (1998) は湿潤断熱温度減率と静的安定度を以下のように与えた. ただし物理量を示す文字を変えてある.

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_{pd}^\dagger}\left(\frac{1+\frac{\lambda^\dagger q}{R_d^\dagger T}}{1+\frac{{\lambda^\dagger}^2 q}{R_v^\dagger c_{pd}^\dagger T^2}}\right) \tag{44}$$

$$= -\frac{g}{c_{pd}^\dagger}\left\{1-\left(\frac{\lambda^\dagger}{R_v^\dagger T}-\frac{c_{pd}^\dagger}{R_d^\dagger}\right)\frac{\lambda^\dagger q^\dagger}{c_{pd}^\dagger T}\right\}. \tag{45}$$

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz}+\frac{g}{c^\dagger_{pd}}\right)+g\left(\frac{M_d}{M_v}-1\right)\frac{\partial(rq)}{\partial z}, \tag{46}$$

$$\approx \frac{g^2}{c^\dagger_{pd}T}\left(\frac{\lambda^\dagger}{R^\dagger_v T}-\frac{c^\dagger_{pd}}{R^\dagger_d}\right)\left\{\frac{\lambda^\dagger}{c^\dagger_{pd}T}+\left(1-\frac{M_d}{M_v}\right)\right\}q \tag{47}$$

ただし添字 † の付いた量は単位質量当たりの量で, $R^\dagger_d = R/M_d$ は乾燥成分の単位質量当たりの気体定数, $R^\dagger_v = R/M_v$ は可凝縮成分の単位質量当たりの気体定数, $c^\dagger_{p_d} = c_p/M_d$ は単位質量当たりの乾燥成分の比熱, $\lambda^\dagger = \lambda/M_v$ は単位質量当たりの潜熱である. q は上昇流域での可凝縮成分の混合比であり, 気塊の周囲の大気の混合比を湿度 r を用いて rq とした.

この式は,

(a) 気塊の分子量を乾燥成分の分子量とみなす.

(b) 周囲の大気の分子量を, 湿度 r の大気の分子量とみなす.

(c) 可凝縮成分を少ないとする近似を適用する.

という条件の下で導くことができる. これは Achterberg and Ingersoll (1989) と比較すると, (b) の条件のみ異なる. 以下では, 前節で求めた湿潤断熱温度減率と静的安定度が, それぞれ (44), (46) 式で表現されることを示す. また (44) と (46) 式を変形することで (45) と (47) 式がそれぞれ導かれることを示す.

(44) 式は (41) 式において, $M \approx M_d, R^\dagger_v = R^\dagger/\varepsilon$ とすることで直ちに求まる. さらに (c) の条件が成立する場合には $1 \gg \frac{\lambda^{\dagger 2} q}{R^\dagger_v c^\dagger_{pd} T^2}$ となるので, (45) 式は以下のように導出される.

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dz} &= -\frac{g}{c^\dagger_{pd}}\left(\frac{1+\frac{\lambda^\dagger q}{R^\dagger_d T}}{1+\frac{\lambda^{\dagger 2} q}{R^\dagger_v c^\dagger_{pd} T^2}}\right), \\
&\approx -\frac{g}{c^\dagger_{pd}}\left(1+\frac{\lambda^\dagger q}{R^\dagger_d T}\right)\left(1-\frac{\lambda^{\dagger 2} q}{R^\dagger_v c^\dagger_{pd} T^2}\right), \\
&= -\frac{g}{c^\dagger_{pd}}\left\{1-\left(\frac{\lambda^\dagger}{R^\dagger_v T}-\frac{c^\dagger_{pd}}{R^\dagger_d}\right)\frac{\lambda^\dagger q^\dagger}{c^\dagger_{pd} T}\right\}.
\end{aligned}$$

ただし q の 2 次の項は無視した. ちなみに木星の温度条件の場合, この近似が成立する条件はおおよそ $q \ll 2.0 \times 10^{-2}$ である.

静的安定度の式 (46) は, 上記の条件 (a), (b) の下で導かれた静的安定度の式 (36) において, 単位モル当たりの量を単位質量当たりの量に変換し, 条件 (c) でのモル

比と混合比の関係式 (42) および分子量の関係 (43) を用いることで求まる.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{Mg}{c^\dagger_{p_d} M}\right) - g\left(\frac{r(M_v - M_d)}{M}\frac{dX}{dz}\right) \\ &= \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{g}{c^\dagger_{p_d}}\right) - g\left(\frac{r(M_v - M_d)}{M_d}\frac{M_d}{M_v}\frac{dq}{dz}\right) \\ &= \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{g}{c^\dagger_{p_d}}\right) + g\left(\frac{M_d}{M_v} - 1\right)\frac{d(rq)}{dz} \end{aligned}$$

ただし $dT/dz = \Gamma_m$ とした. さらに (46) 式の変形を行う. (17) 式を dq/dz の式に書き換えると,

$$\begin{aligned} \frac{d(rq)}{dz} &= \left(\frac{\lambda^\dagger M_v}{R^\dagger_d M_d T^2}\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{R^\dagger_d MT}\right)(rq), \\ &= \left(-\frac{\lambda^\dagger}{R^\dagger_v T^2}\frac{g}{c^\dagger_{p_d}} + \frac{g}{R^\dagger_d T}\right)(rq), \\ &= \frac{g}{c^\dagger_{p_d} T}\left(\frac{c^\dagger_{p_d}}{R^\dagger_d} - \frac{\lambda^\dagger}{R^\dagger_v T}\right)(rq). \end{aligned} \tag{48}$$

となる. ただし q は小さいので, $dT/dz \approx -g/c^\dagger_{p_d}$ とした. (48) 式と (45) 式を (46) 式に代入することで, (47) 式が得られる.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{g}{c^\dagger_{p_d}}\right) + g\left(\frac{M_d}{M_v} - 1\right)\frac{d(rq)}{dz} \\ &= \frac{g}{T}\left[\frac{g}{c^\dagger_{p_d}}\left\{\left(\frac{\lambda^\dagger}{R^\dagger_v T} - \frac{c^\dagger_{p_d}}{R^\dagger_d}\right)\frac{\lambda^\dagger q^\dagger}{c^\dagger_{p_d} T}\right\}\right] + g\left(\frac{M_d}{M_v} - 1\right)\left\{\frac{g}{c^\dagger_{p_d} T}\left(\frac{c^\dagger_{p_d}}{R^\dagger_d} - \frac{\lambda^\dagger}{R^\dagger_v T}\right)(rq)\right\}, \\ &= \frac{g^2}{c^\dagger_{p_d} T}\left(\frac{\lambda^\dagger}{R^\dagger_v T} - \frac{c^\dagger_{p_d}}{R^\dagger_d}\right)\left\{\frac{\lambda^\dagger}{c^\dagger_{p_d} T} + r\left(1 - \frac{M_d}{M_v}\right)\right\} q. \end{aligned}$$