静的安定度・雲密度の計算方法

杉山耕一朗 (北大理・地惑)
sugiyama@gfd-dennou.org

2004/06/03

目 次

第 1 章　雲密度の計算方法 **2**

第 2 章　静的安定度の計算 **3**

2.1　静的安定度 N^2 の定式化 3

2.2　静的安定度の計算手順 4

第 3 章　$\mathbf{dS = 0}$ の決まる理由 **6**

第1章　雲密度の計算方法

静水圧平衡にある大気での雲密度は Weidenschilling and Lewis (1973) の方法によって導くことができる. 静水圧平衡にある大気でのある高度 J において

$$M^{\mathrm{J}} = \frac{p^{\mathrm{J}}}{g} \tag{1.1}$$

が成り立つ. ここで M^{J} は高度 J より上における大気の単位面積当たりの質量である. 物質 k の高度 J より上での単位面積当たりの大気の質量は

$$m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}} \cdot M^{\mathrm{J}} \tag{1.2}$$

である. ここで m_k^J は大気の質量分率である. それゆえ物質 k が凝縮する際, 高度 I から J の変化幅 dz における平均雲密度 $\bar{D}$ は,

$$\bar{D} = \frac{(m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}})\bar{M}}{dz} \tag{1.3}$$

である. ここで $\bar{M}$ は考えている領域での単位面積当たりの平均質量である. (1.4) 式はモル分率と圧力の項によって書き換えることができる.

$$D = \frac{m_{\mathrm{k}}(X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}})\bar{p}}{\bar{m}gdz}. \tag{1.4}$$

但し $\bar{m}$ は大気の平均分子量, m_{k} は物質 k の分子量である. 分子量の単位は $\mathrm{kg\ mol^{-1}}$ に換算する必要がある.

さらに高度の変化 dz を圧力変化 dp で書き換える. 静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いると,

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz, \\ &= -\frac{\bar{m}p}{RT} g dz, \\ dz &= -\frac{RTg}{\bar{m}p} dp, \end{aligned} \tag{1.5}$$

である. (1.4) 式に (1.5) 式を代入することによって,

$$D = \frac{m_{\mathrm{k}}(X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}})\bar{p}^2}{RTdp}. \tag{1.6}$$

が求まる. もし 1 つ以上の物質が凝縮して雲を作る場合 (NH_4SH や アンモニア水溶液), (1.6) 式の右辺は凝縮する物質を足し合わせたものになる.

第2章　静的安定度の計算

本章では静的安定度の計算方法を述べる.

2.1　静的安定度 N^2 の定式化

空気塊を断熱的に上昇させる過程を考える. 空気塊の密度と周囲の空気の密度差によって浮力が生じ, その浮力を復元力とする振動の振動数を浮力振動数 N と呼び N^2 を静的安定度と呼ぶ.

空気塊が上昇することによって, 本来は空気塊の周囲の大気の圧力と密度も影響を受けるはずである. しかしその影響を小さいとして無視する方法をパーセル法という. 本節ではパーセル法による静的安定度の定式化を述べる.

空気塊の密度を ρ^*, 周囲の大気の密度を ρ とする.

$$d\rho = \rho^* - \rho \tag{2.1}$$

と書ける. ただし ρ^* は空気塊の密度, ρ は周囲の大気の密度である. この時運動方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\delta z &= \frac{(\rho - \rho^*)\, g}{\rho^*} \\ &= \frac{(T_v^* - T_v)g}{T_v} \end{aligned} \tag{2.2}$$

である. ただし T_v^* は空気塊の仮温度, T_v は乾燥大気の仮温度である. 式変形の際には $\rho = p/R_d T v$ を用いた. ここで微小区間 dz の間で温度勾配が一定値をとるとすると,

$$\begin{aligned} T_v^* - T_v &= (T + \Gamma^* \delta z) - (T + \Gamma \delta z) \\ &= (\Gamma^* - \Gamma)\delta z \end{aligned} \tag{2.3}$$

である. ここで Γ^* は空気塊の温度減率, Γ は周囲の大気の温度減率である. したがって,

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = \left\{ \frac{(\Gamma^* - \Gamma)g}{T_v} \right\} \delta z \tag{2.4}$$

となり, よって静的安定度は,

$$N^2 = \frac{(\Gamma - \Gamma^*)g}{T_v} \tag{2.5}$$

となる. ちなみに Γ の符号は一般に負である.

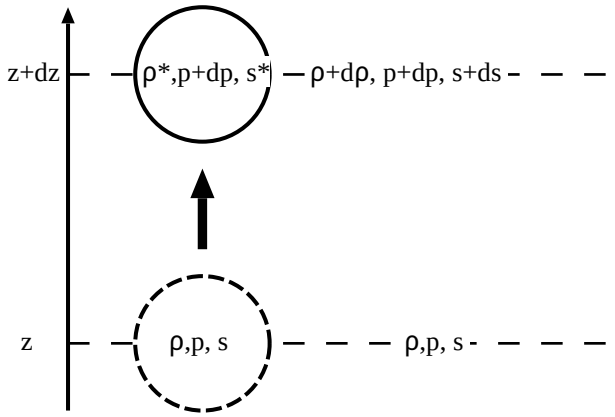

図 2.1: 空気塊と周囲の大気の模式図.

2.2　静的安定度の計算手順

(1) ギブス自由エネルギー最小化法によって, 平衡組成を求める. これによって温度と圧力と組成の関係を求める.

(2) ギブス自由エネルギー最小化法によって求めた平衡組成を, パーセル法でいうところの周囲の温度とみなす. 高度毎の組成から高度毎の空気塊の分子量を求め, 温度を仮温度へ変換する. この結果, 圧力と仮温度の関係が得られる.

(3) 中央差分を用いて仮温度の勾配を求めと

$$\Gamma^i = \frac{T_v^{i+1} - T_v^{i-1}}{2dz} \tag{2.6}$$

である. 高度変化を圧力変化で置き換えるために静水圧平衡の式 $dz = -dp/\rho g$ と, 理想気体の状態方程式 $\rho = p/R_d T_v$ を用いると,

$$\Gamma^i = (T_v^{i-1} - T_v^{i+1})\frac{pg}{R_d T_v dp} \tag{2.7}$$

と書くことができる.

(4) 空気塊の組成を大気上部の組成 (計算領域の最も上部の組成) とする. その断熱温度減率はその組成での比熱 c_p を用いて,

$$\Gamma^* = \frac{g}{c_p} \tag{2.8}$$

である.

(5) 静的安定度を求める. (2.7), (2.8) 式を用いることで,

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{(\Gamma - \Gamma^*)g}{T_v} \\ &= -\frac{g}{T_v}\left\{(T_v^{i-1} - T_v^{i+1})\frac{pg}{R_d T_v dp} - \frac{g}{c_p}\right\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

が求まる.

■ 注意点

1. 乾燥大気の作り方大気組成から凝縮性気体成分を抜く. 外惑星の場合, H2 と He だけからなる大気を考える. 凝縮性気体を抜いた分, H2 と He のモル比は大きくなる.

2. 周囲の大気の仮温度 Tv の作り方.....

第3章　dS = 0 の決まる理由