雲密度・静的安定度の計算方法

杉山耕一朗 (北大理・地惑)
sugiyama@gfd-dennou.org

2005/06/17

目 次

1 雲密度の計算方法 2

2 静的安定度の計算 3

3 実際の惑星大気を想定した静的安定度の計算 6

3.1 気塊内で凝縮が生じない場合 7

3.2 気塊内で凝縮が生じる場合 7

4 静的安定度の近似系 9

4.1 系の設定 9

4.2 断熱温度減率 9

4.2.1 乾燥断熱温度減率 10

4.2.2 湿潤断熱温度減率 10

4.3 湿潤断熱温度減率の近似系 11

4.3.1 凝縮成分が少ない近似 11

4.3.2 凝縮成分が多い近似 12

4.4 静的安定度 13
4.4.1 凝縮成分の少ない近似 13
4.4.2 凝縮成分の多い近似 14

5 従来の論文との比較 15

5.1 Achterberg and Ingersoll (1989) 16
5.2 中島 (1998) 17

A 近似の成立する条件 20

A.1 水の凝縮 20
A.2 アンモニアの凝縮 21
A.3 メタンの凝縮 21

1　雲密度の計算方法

静水圧平衡にある大気での雲密度は Weidenschilling and Lewis (1973) の方法によって導くことができる. 静水圧平衡にある大気でのある高度 J において

$$M^{\mathrm{J}} = \frac{p^{\mathrm{J}}}{g} \tag{1}$$

が成り立つ. ここで M^{J} は高度 J より上における大気の単位面積当たりの質量である. 物質 k の高度 J より上での単位面積当たりの大気の質量は

$$m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}} \cdot M^{\mathrm{J}} \tag{2}$$

である. ここで m_k^J は大気の質量分率である. それゆえ物質 k が凝縮する際, 高度 I から J の変化幅 dz における平均雲密度 $\bar{D}$ は,

$$\bar{D} = \frac{(m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - m_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}})\bar{M}}{dz} \tag{3}$$

である. ここで $\bar{M}$ は考えている領域での単位面積当たりの平均質量である. (4) 式はモル分率と圧力の項によって書き換えることができる.

$$D = \frac{m_{\mathrm{k}}(X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}})\bar{p}}{\bar{m}gdz}. \tag{4}$$

但し $\bar{m}$ は大気の平均分子量, m_{k} は物質 k の分子量である. 分子量の単位は $\mathrm{kg\ mol^{-1}}$ に換算する必要がある.

さらに高度の変化 dz を圧力変化 dp で書き換える. 静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いると,

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz, \\ &= -\frac{\bar{m}p}{RT} g dz, \\ dz &= -\frac{RTg}{\bar{m}p} dp, \end{aligned} \tag{5}$$

である. (4) 式に (5) 式を代入することによって,

$$D = \frac{m_{\mathrm{k}}(X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{I}} - X_{\mathrm{k}}^{\mathrm{J}})\bar{p}^2}{RTdp}. \tag{6}$$

が求まる. もし 1 つ以上の物質が凝縮して雲を作る場合 (NH_4SH や アンモニア水溶液), (6) 式の右辺は凝縮する物質を足し合わせたものになる.

2　静的安定度の計算

気塊を断熱的に上昇させる過程を考える. 気塊の密度と周囲の空気の密度差によって浮力が生じ, その浮力を復元力とする振動の振動数を浮力振動数 N と呼ぶ. 浮力振動数の 2 乗を静的安定度 N^2 と呼ぶ.

気塊が上昇することによって, 本来は気塊の周囲の大気の圧力と密度も影響を受けるはずである. しかしその影響を小さいとして無視する方法をパーセル法という. 本節ではパーセル法による静的安定度の定式化を述べる.

気塊とその周囲の大気を考える. 気塊とその周囲の大気には以下のような関係が成立すると仮定する.

- 気塊を変位させる前の高度 $z = z_0$ において, 気塊と周囲の大気の密度は等しい.

$$\rho|_{z=z_0} = \rho^*|_{z=z_0} \tag{7}$$

- 気塊の分子量は変化しない. すなわち, 雨として凝縮物が気塊から分離することはない.

$$\frac{dM^*}{dz} = 0 \tag{8}$$

- 気塊と周囲の大気は理想気体の状態方程式に従う.

ただし, 気塊と周囲の大気の密度をそれぞれ ρ^*, ρ とし, 気塊と周囲の大気の分子量をそれぞれ M^*, M とした. 気塊と周囲の大気の密度差は,

$$d\rho = \rho^* - \rho \tag{9}$$

と書けるので, 運動方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = \frac{(\rho - \rho^*)\, g}{\rho^*} \tag{10}$$

となる. ただし g は重力加速度である. (10) 式右辺の ρ, ρ^* をテーラー展開し, 2 次以上の微小項を無視すると,

$$\begin{aligned}
\frac{(\rho - \rho^*)\, g}{\rho^*} &= \frac{g}{\rho^*}\left\{\left(\rho|_{z=z_0} + \frac{d\rho}{dz}\delta z\right) - \left(\rho^*|_{z=z_0} + \frac{d\rho^*}{dz}\delta z\right)\right\}, \\
&= \frac{g}{\rho^*}\left(\frac{d\rho}{dz}\delta z - \frac{d\rho^*}{dz}\delta z\right)
\end{aligned}$$

となる. ただし式変形において (7) 式の関係を用いた. 理想気体の状態方程式が成立するので, 以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
\frac{g}{\rho^*}\left(\frac{d\rho}{dz}\delta z - \frac{d\rho^*}{dz}\delta z\right) &= \frac{gT^*}{M^*}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{M}{T}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{M^*}{T^*}\right)\right\}\delta z, \\
&= \frac{gT^*}{M^*}\left\{M\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{T}\frac{dM}{dz} - M^*\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{T^*}\right) - \frac{1}{T^*}\frac{dM^*}{dz}\right\}\delta z, \\
&= \frac{gT^*}{M^*}\left\{-\frac{M}{T^2}\frac{dT}{dz} + \frac{M^*}{{T^*}^2}\frac{dT^*}{dz} + \frac{1}{T}\frac{dM}{dz}\right\}\delta z, \\
&= \left\{\frac{g}{T}\left(-\frac{dT}{dz} + \frac{M}{M^*}\frac{dT^*}{dz}\right) + g\left(\frac{1}{M}\frac{dM}{dz}\right)\right\}\delta z \qquad (11)
\end{aligned}$$

ただし式変形において (8) 式を利用した. (11) 式を (10) 式に代入することで,

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = \left\{\frac{g}{T}\left(-\frac{dT}{dz} + \frac{M}{M^*}\frac{dT^*}{dz}\right) + g\left(\frac{1}{M}\frac{dM}{dz}\right)\right\}\delta z \qquad (12)$$

となり, $\delta z = sin(Nt)$ を代入することで静的安定度は,

$$N^2 \equiv \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} - \frac{M}{M^*}\frac{dT^*}{dz}\right) - g\left(\frac{1}{M}\frac{dM}{dz}\right) \qquad (13)$$

と定義される.

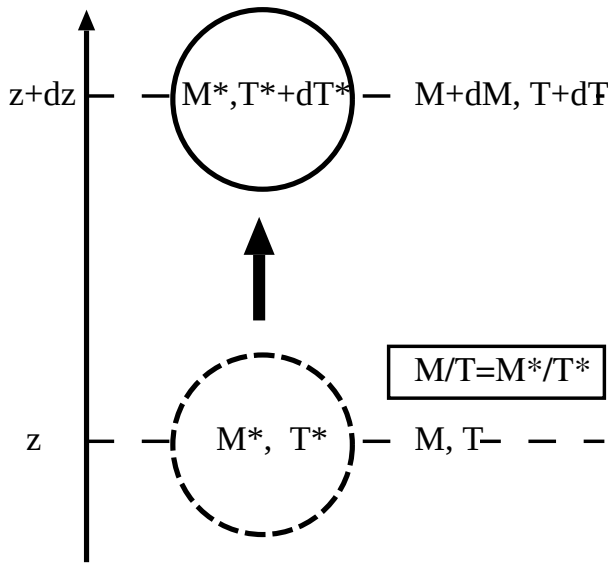

図 1: パーセル法による静的安定度の見積もりの概要. 気塊の周囲の大気の温度 T と 分子量 M, 気塊の温度 T^* と分子量 M^* とする. $z = z_0$ において気塊と周囲の大気の密度が等しく, 理想気体の状態方程式が成立するならば, $M/T = M^*/T^*$ となる. また気塊を上昇・下降させた際, 気塊の温度は変化するが気塊から凝縮物が離脱しないと仮定したので, $z + dz$ における気塊の分子量は M^* のまま維持される.

3 実際の惑星大気を想定した静的安定度の計算

地球大気の平均的な温度・分子量の決まりかたの模式図を図 2 を示す. 地球大気の場合, 平均的な温度は上昇流域 (雲の中) の湿潤断熱減率で決まり, 平均的な分子量はほぼ乾燥成分の分子量とみなすことができる. 惑星大気一般に対して地球の経験を適用できるという保証はないが, 活発な湿潤対流が生じているならば, 地球と同様に平均的な大気構造が決まっている可能性がある.

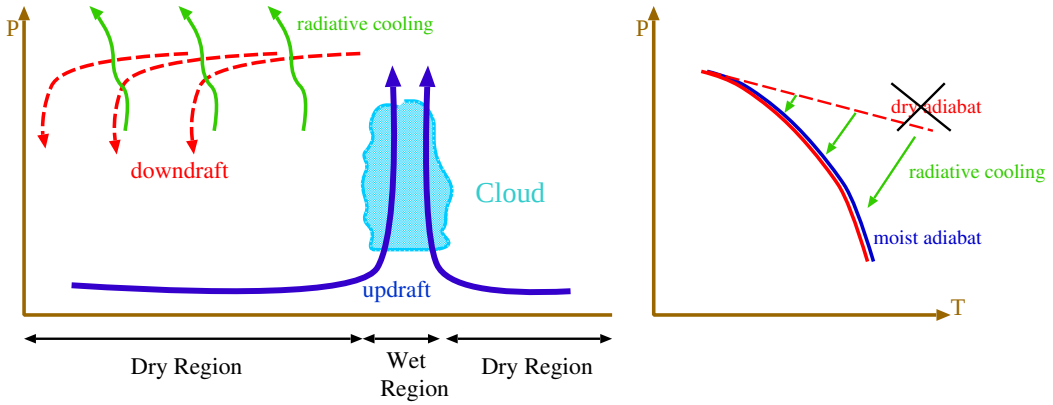

図 2: 地球大気での平均的な温度・分子量の決まりかたの模式図. 地球大気の対流構造は, 狭い上昇流域と広い下降流域, によって特徴づけられる. 平均的な温度は雲の中の湿潤断熱減率で決まり, 平均的な分子量は下降域の乾燥成分のみの分子量で決まる.

そこで, 分子量と温度は以下のように仮定する.

- 分子量
  気塊とその周囲の大気の分子量は等しい. その値は上昇流域 (雲の中) の飽和大気に対して湿度 r (定数) であると仮定する. すなわち飽和大気での湿潤成分のモル比を X^{sat} とすると気塊とその周囲の大気の湿潤成分のモル比は $X = rX^{sat}$ となり, 分子量は

$$M = M^* = (1 - rX^{sat})M_d + rX^{sat}M_v \tag{14}$$

  となる. ただし M_d, M_v はそれぞれ大気の乾燥成分と湿潤成分の分子量である.

- 周囲の大気の温度減率 $dT(z)/dz$
  上昇域において実現される湿潤断熱温度減率.

- 気塊の温度減率 $dT^*(z)/dz$
  気塊の分子量 M によって決まる断熱温度減率. 気塊内で凝縮が生じるか否かで, 湿潤断熱温度減率もしくは乾燥断熱減率のどちらかが選ばれる.

(14) 式を用いると, 静的安定度の式 (13) は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz}-\frac{dT^*}{dz}\right)-\frac{g}{M}\frac{d}{dz}\left\{(1-rX^{sat})M_d+rX^{sat}M_v\right\}, \\ &= \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz}-\frac{dT^*}{dz}\right)-g\left(\frac{r(M_v-M_d)}{M}\frac{dX^{sat}}{dz}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

ただし湿度は $0 \le r \le 1$ である.

3.1 気塊内で凝縮が生じない場合

気塊内で凝縮が生じない場合, (15) 式中の dT^*/dz は以下のように表すことができる.

$$\frac{dT^*}{dz} = -\frac{Mg}{c_p}. \tag{16}$$

ただし比熱は $c_p = (1-rX^{sat})c_{p_d}+rX^{sat}c_{p_v}$ となる. c_{p_d} は乾燥成分の比熱, c_{p_v} は湿潤成分の比熱である. 上式を (15) に代入することで,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz}+\frac{Mg}{c_p}\right)-\frac{g(M_v-M_d)}{M}\frac{dX^{sat}}{dz} \tag{17}$$

と書ける.

飽和気塊 $r=1$ においても, 気塊を下向きに変位させたときの静的安定度は (17) で与えられる. また $r=0$ の場合は (17) 式の右辺第 2 項の分子量効果が無視できるので,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz}+\frac{M_dg}{c_{p_d}}\right) \tag{18}$$

と書ける. すなわち静的安定度は湿潤断熱減率と乾燥断熱減率との差から見積もることができる.

3.2 気塊内で凝縮が生じる場合

$r=1$ において気塊を上向きに変位させる場合, 気塊内で凝縮が生じる. 気塊の断熱温度減率は湿潤断熱温度減率に等しくなるので,

$$\frac{dT^*}{dz} = \frac{dT}{dz}$$

であり, 静的安定度 (15) は,

$$N^2 = -\frac{g(M_v - M_d)}{M}\frac{dX^{sat}}{dz} \tag{19}$$

と書ける. すなわち静的安定度は分子量効果によって決まる.

4　静的安定度の近似系

本節では, 静的安定度と凝縮成分気体のモル比との関係を調べるために, 簡単な系を設定し, その時の断熱温度減率と静的安定度を議論する.

4.1　系の設定

簡単のために, 大気は乾燥成分と凝縮成分の 2 成分から成るものとする. 乾燥成分と凝縮成分の分子量をそれぞれ M_d と M_v, 乾燥成分と凝縮成分の比熱をそれぞれ c_{p_d} と c_{p_v}, 凝縮成分のモル比を X とする. その時, 系全体の分子量と比熱は以下のように書ける.

$$M = M_d(1-X) + M_v X \tag{20}$$

$$c_p = c_{pd}(1-X) + c_{pv}X \tag{21}$$

4.2　断熱温度減率

Weidenschilling and Lewis (1973), Atreya and Romani (1985) に従って湿潤断熱減率を定式化する. 熱力学の第 1 法則は,

$$dU = \delta Q + \delta W + \delta Z, \tag{22}$$

である. ここで dU は内部エネルギー，δQ は系に加えられる熱量，δW は系に加える仕事，δZ は化学エネルギーである．考えている系において気体は理想気体として取り扱うことができ，その変化は断熱的にであるとすると，(24) 式の各項は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
dU &= c_v dT. && (23)\\
\delta Q &= 0. && (24)\\
\delta W &= -pdV,\\
&= -d(pV) + Vdp,\\
&= -RdT + Vdp,\\
&= -RdT + V\left(\frac{-Mpg}{RT}\right)dz, \ (\because \text{静水圧平衡の式})\\
&= -RdT - Mgdz. && (25)\\
\delta Z &= -\sum \lambda dX. && (26)
\end{aligned}$$

ここで c_v は大気の定積モル比熱の平均値，T は温度, p は圧力, V は 気体分子の 1 モル当たりの体積，R は気体定数, M は平均分子量, g は重力加速度, λ は大気

中の凝縮成分のモル当たりの凝縮のエンタルピー，dX は凝縮成分のモル比の変化である．(22) 式に (23) – (26) 式を代入することで，

$$\begin{aligned} c_v dT + RdT + Mgdz + \sum \lambda dX = 0, \\ c_p dT + Mgdz + \sum \lambda dX = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

となる．但し c_p は大気の定圧モル比熱の平均値で，理想気体の場合 $c_p = c_v + R$ である．

4.2.1　乾燥断熱温度減率

(27) 式の潜熱による項を無視することで乾燥断熱温度減率が求まる．

$$\begin{aligned} c_p dT + Mgdz = 0, \\ \frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{c_p}. \end{aligned} \tag{28}$$

また, 温度の圧力微分は以下のように書ける．

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_p p}. \tag{29}$$

4.2.2　湿潤断熱温度減率

dX をモル分率と分圧の関数として表すと以下のようになる．

$$dX = \frac{1}{p} de - \left(\frac{e}{p^2} \right) dp. \tag{30}$$

ただし e は凝縮成分の飽和蒸気圧である．この式にクラウジウス・クラペイロンの式

$$de = \frac{e\lambda dT}{RT^2}, \tag{31}$$

を代入して変形すると，

$$\begin{aligned} dX &= \frac{1}{p} de - \frac{e}{p^2} dp, \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{e\lambda dT}{RT^2} \right) - \frac{e}{p^2} \left(-\frac{Mpg}{RT} dz \right), \\ &= \frac{e}{p} \frac{\lambda}{R_v T^2} dT + \frac{e}{p} \frac{Mg}{RT} dz, \\ &= \frac{\lambda X}{RT^2} dT + \frac{MgX}{RT} dz. \end{aligned} \tag{32}$$

となる.

(27) 式に (32) 式を代入することで湿潤断熱温度減率が求まる .

$$
\begin{aligned}
&c_p dT + Mgdz + \sum \lambda dX = 0, \\
&c_p dT + Mgdz + \sum \lambda \left(\frac{\lambda X}{RT^2} dT + \frac{MgX}{RT} dz \right) = 0, \\
&c_p \left(1 + \frac{\sum \lambda^2 X}{c_p RT^2} \right) dT + Mg \left(1 + \frac{\sum \lambda X}{RT} \right) dz = 0, \\
&\frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{c_p} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2}} \right).
\end{aligned} \tag{33}
$$

但し和の規約を用いている. (33) を変形すると温度の圧力微分は,

$$
\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_p p} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2}} \right). \tag{34}
$$

と書ける.

4.3　湿潤断熱温度減率の近似系

前節で求めた (33) 式に対して, 凝縮成分の多い近似と少ない近似を施す.

4.3.1　凝縮成分が少ない近似

(33) 式において十分に凝縮性成分の少ない場合, つまり

$$
\frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2} \ll 1 \tag{35}
$$

の場合には,

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{dz} &\approx -\frac{Mg}{c_p} \left(1 + \frac{\lambda X}{RT} \right) \left(1 - \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2} \right), \\
&\approx -\frac{Mg}{c_p} \left\{ 1 - \frac{\lambda X}{c_p T} \left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_p}{R} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{36}
$$

と近似できる. 水の凝縮の場合の代表的な値を代入すると $\lambda / c_p T > 1$ である. そのため $\lambda^2 X / c_p RT^2 \ll 1$ ならば必ず $\lambda X / RT \ll 1$ である. (40) 式の導出において, これら 2 次の微小量の積は十分に小さいものとみなし無視した. さらに (35) に水の凝縮の場合の代表的な値を代入すると,

$$
X \ll 2 \times 10^{-2} \tag{37}
$$

となる (詳細は A 章参照). (45) 式を用いると, (20) および (21) 式は以下のように書き換えられる.

$$M \approx M_d \tag{38}$$

$$c_p \approx c_{p_d} \tag{39}$$

木星型惑星大気では, 乾燥成分である水素と凝縮成分である酸素のモル当たりの比熱はほとんど等しく, また乾燥成分である水素と凝縮成分である酸素の分子量はおおよそ 10 倍異なる. 凝縮成分のモル比は $X \ll 10^{-2}$ なので, 乾燥成分の分子量に対して凝縮成分の分子量は無視しうる程小さい. (38) と (39) 式を用いると, (40) 式は以下のように書き換えられる.

$$\frac{dT}{dz} \approx -\frac{M_d g}{c_{p_d}} \left\{ 1 - \frac{\lambda X}{c_p T} \left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{p_d}}{R} \right) \right\}. \tag{40}$$

4.3.2　凝縮成分が多い近似

(33) において十分に凝縮性成分の多い場合, すなわち

$$\frac{\lambda X}{RT} \gg 1 \tag{41}$$

の場合には,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &\approx -\frac{Mg}{c_p} \frac{\frac{\lambda X}{RT}}{\frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2}}, \\ &\approx -\frac{Mg}{c_p} \frac{c_p T}{\lambda} \end{aligned} \tag{42}$$

と近似できる. 水の凝縮の場合の代表的な値を代入すると $\lambda / c_p T > 1$ である. そのため $\lambda X / RT \gg 1$ ならば必ず $\lambda^2 X / c_p R T^2 \gg 1$ である. さらに (41) に水の凝縮の場合の代表的な値を代入すると,

$$X \gg 1 \times 10^{-1} \tag{43}$$

となる (詳細は A 章参照). (43) 式を用いると, (20) および (21) 式は以下のように書き換えられる.

$$M \approx M_v \tag{44}$$

$$c_p \approx c_{p_v} \tag{45}$$

凝縮成分のモル比は $X \gg 10^{-1}$ なので, 大気の分子量と比熱はそれぞれ凝縮成分の値で代表させることが可能である. (44) と (45) 式を用いると, (46) 式は以下のように書き換えられる.

$$\frac{dT}{dz} \approx -\frac{M_v g}{c_{p_v}} \frac{c_{p_v} T}{\lambda} \tag{46}$$

4.4　静的安定度

静的安定度の式 (17)

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{c_p}\right) - \frac{g(M_v - M_d)}{M}\frac{dX}{dz}$$

にクラウジウス・クラペイロンの式を変形した式 (32)

$$\frac{dX}{dz} = \frac{\lambda X}{RT^2}\frac{dT}{dz} + \frac{MgX}{RT}$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{c_p}\right) - \frac{g(M_v - M_d)}{M}\left(\frac{\lambda X}{RT^2}\frac{dT}{dz} + \frac{MgX}{RT}\right) \\ &= \frac{g}{T}\left[\frac{Mg}{c_p} + \frac{dT}{dz}\left\{1 - \frac{(M_v - M_d)}{M}\frac{\lambda X}{RT}\right\}\right] - \frac{g}{T}\frac{(M_v - M_d)}{M}\frac{MgX}{R} \end{aligned} \quad (47)$$

4.4.1　凝縮成分の少ない近似

(47) 式に (38) – (40) 式を代入する.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T}\left[\frac{M_d g}{c_{p_d}} - \frac{M_d g}{c_{p_d}}\left\{1 - \frac{\lambda X}{c_{p_d}T}\left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{p_d}}{R}\right)\right\}\left\{1 - \frac{(M_v - M_d)}{M_d}\frac{\lambda X}{RT}\right\}\right] \\ &\quad -\frac{g}{T}\frac{(M_v - M_d)}{M_d}\frac{M_d g X}{R} \\ &= \frac{M_d g^2}{c_{p_d}T}\left\{\frac{\lambda X}{c_{p_d}T}\left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{p_d}}{R}\right) + \frac{(M_v - M_d)}{M_d}\frac{\lambda X}{RT} - \frac{\lambda X}{c_{p_d}T}\left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{p_d}}{R}\right)\frac{(M_v - M_d)}{M_d}\frac{\lambda X}{RT}\right\} \\ &\quad -\frac{M_d g^2}{c_{p_d}T}\frac{(M_v - M_d)}{M_d}\frac{c_{p_d}X}{R} \\ &= \frac{M_d g^2}{c_{p_d}T}\left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{p_d}}{R}\right)\left\{\frac{\lambda}{c_{p_d}T} + \frac{(M_v - M_d)}{M_d}\left(1 - \frac{\lambda^2 X}{c_{p_d}RT^2}\right)\right\}X \end{aligned}$$

ここで (45) 式の凝縮成分の少ない条件, すなわち $\frac{\lambda^2 X}{c_{p_d}RT^2} \ll 1$ より,

$$N^2 = \frac{M_d g^2}{c_{p_d}T}\left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{p_d}}{R}\right)\left(\frac{\lambda}{c_{p_d}T} + \frac{(M_v - M_d)}{M_d}\right)X \quad (48)$$

が求まる.

4.4.2　凝縮成分の多い近似

(47) 式に (44) – (46) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T}\left[\frac{M_v g}{c_{p_v}} - \frac{M_v g}{c_{p_v}}\frac{c_{p_v}T}{\lambda}\left\{1 - \frac{(M_v - M_v)}{M_v}\frac{\lambda X}{RT}\right\} - \frac{(M_v - M_v)}{M_v}\frac{M_v g X}{R}\right] \\ &= \frac{g}{T}\left[\frac{M_v g}{c_{p_v}}\left(1 - \frac{c_{p_v}T}{\lambda}\right) + \frac{M_v g}{c_{p_v}}\frac{c_{p_v}T}{\lambda}\frac{(M_v - M_v)}{M_v}\frac{\lambda X}{RT} - \frac{(M_v - M_v)}{M_v}\frac{M_v g X}{R}\right] \\ &= \frac{M_v g^2}{c_{p_v}T}\left(1 - \frac{c_{p_v}T}{\lambda}\right) \end{aligned} \tag{49}$$

が求まる.

5　従来の論文との比較

従来の論文では, そもそも気塊に含まれる凝結成分は少ないと仮定し, 適当な湿度を持つ大気中での乾燥気塊 (r=0) の安定性を調べることがおこなわれてきた. 本節では従来の論文に従って,

- 気塊の分子量を乾燥成分の分子量とする. $M = M_d$.
- 周囲の大気の分子量は湿度 r とする. $M = (1 - rX^{sat})M_d + rX^{sat}M_v$.
- 周囲の大気の温度減率 $dT(z)/dz$ を, 上昇域の飽和大気での湿潤断熱温度減率とする.
- 気塊の温度減率 $dT^*(z)/dz$ を乾燥気塊の断熱温度減率とする. $dT^*/dz = -M_d g/c_{p_d}$.
- 周囲の大気中に含まれる可凝縮成分は少ない

と仮定した場合について静的安定度の定式化を行い, 従来の論文中の式の導出を行う.

気塊の分子量と大気の乾燥成分の分子量が等しく, 気塊の分子量は乾燥成分の分子量に等しい場合, 静的安定度 (13) 式は以下のようになる.

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{c_{p_d}}\right) - g\left(\frac{1}{M}\frac{dM}{dz}\right). \tag{50}$$

(17) 式と比較すると, 気塊の分子量の部分だけ異なっている. 木星条件では乾燥成分と湿潤成分のモル当たりの分子量は同程度なので, (17) 式と (50) 式の値はほぼ同じとなる. モル比を用いて表現すると,

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{c_{p_d}}\right) - g\left(\frac{r(M_v - M_d)}{M}\frac{dX^{sat}}{dz}\right) \tag{51}$$

である. (50) 式を仮温度を用いて表現すると,

$$N^2 = \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{M_d g}{c_{p_d}}\right) \tag{52}$$

となる.

5.1 Achterberg and Ingersoll (1989)

Achterberg and Ingersoll (1989) は静的安定度, 仮温度, 湿潤擬断熱温度減率を以下のように与えた[1] .

$$N^2 = \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{g}{c^\dagger_{pd}}\right), \tag{53}$$

$$T_v = \frac{T}{1+(\varepsilon-1)e/p}, \tag{54}$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c^\dagger_p}\left(\frac{1+\frac{\lambda^\dagger q}{R^\dagger T}}{1+\frac{{\lambda^\dagger}^2 \varepsilon q}{R^\dagger c^\dagger_p T^2}}\right) \tag{55}$$

ただし添字 † の付いた量は単位質量当たりの量で, $R^\dagger = R/M$ は大気の単位質量当たりの気体定数, $c^\dagger_p = c_p/M$ は大気の単位質量当たりの比熱, $c^\dagger_{pd} = c_p/M_d$ は単位質量当たりの乾燥成分の比熱, $\lambda^\dagger = \lambda/M_v$ は単位質量当たりの潜熱である. $\varepsilon = M_v/M_d$ は可凝縮成分の分子量と乾燥成分の分子量との比, e は可凝縮成分の飽和蒸気圧, q は可凝縮成分の混合比である.

以下では, 前節で求めた静的安定度, 仮温度, 湿潤断熱減率が, それぞれ (53) – (55) 式で表現できることを示す. ただし彼らの計算では $r = 1$ を仮定している.

初めに静的安定度の式 (53) は, (52) 式中の単位モル当たりの量を単位質量当たりに変換することで求めることができる.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{M_d g}{c_{p_d}}\right) \\ &= \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{g}{c^\dagger_{pd}}\right) \end{aligned}$$

次に仮温度の式 (54) は, 仮温度の定義式を変形することで導かれる.

$$\begin{aligned} T_v &= T\frac{M_d}{M}, \\ &= T\frac{M_d}{M_d(1-X)+M_vX}, \\ &= T\frac{M_d}{M_d(p-e)/p+M_ve/p}, \\ &= T\frac{M_dp}{M_dp+(M_v-M_d)e}, \\ &= T\frac{1}{1+(M_v-M_d)/M_de/p}, \\ &= \frac{T}{1+(\varepsilon-1)e/p}. \end{aligned}$$

[1] Achterberg and Ingersoll (1989) の式には誤植がある.

最後に (33) に可凝縮物質が少ないという条件を与えることで (55) が得られることを示す. 凝結成分が少ない場合,

$$q = \frac{M_v X}{M_d(1-X) + M_v X} \approx \frac{M_v}{M_d} X. \tag{56}$$

$$M \approx M_d \tag{57}$$

となるので, この関係を用いて (33) 式を変形し, また (33) 式中の単位モル当たりの量を単位質量当たりの量に変換すると,

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dz} &= -\frac{Mg}{c_p}\left(\frac{1+\frac{\lambda X}{RT}}{1+\frac{\lambda^2 X}{c_p R T^2}}\right), \\
&= -\frac{Mg}{(Mc_p^\dagger)}\left(1+\frac{(M_v\lambda^\dagger)(qM_d/M_v)}{(M_dR^\dagger)T}\right) / \left(1+\frac{(M_v\lambda^\dagger)^2(qM_d/M_v)}{(M_dc_p^\dagger)(M_dR^\dagger)T^2}\right), \\
&= -\frac{g}{c_p^\dagger}\left(\frac{1+\frac{\lambda^\dagger q}{R^\dagger T}}{1+\frac{{\lambda^\dagger}^2 \varepsilon q}{R^\dagger c_p^\dagger T^2}}\right).
\end{aligned}$$

5.2　中島 (1998)

中島 (1998) は湿潤断熱温度減率と静的安定度を以下のように与えた. ただし物理量を示す文字を変えてある.

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_{pd}^\dagger}\left(\frac{1+\frac{\lambda^\dagger q}{R_d^\dagger T}}{1+\frac{{\lambda^\dagger}^2 q}{R_v^\dagger c_{pd}^\dagger T^2}}\right) \tag{58}$$

$$= -\frac{g}{c_{pd}^\dagger}\left\{1-\left(\frac{\lambda^\dagger}{R_v^\dagger T}-\frac{c_{pd}^\dagger}{R_d^\dagger}\right)\frac{\lambda^\dagger q^\dagger}{c_{pd}^\dagger T}\right\}. \tag{59}$$

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz}+\frac{g}{c_{pd}^\dagger}\right)+g\left(\frac{M_d}{M_v}-1\right)\frac{\partial(rq)}{\partial z}, \tag{60}$$

$$\approx \frac{g^2}{c_{pd}^\dagger T}\left(\frac{\lambda^\dagger}{R_v^\dagger T}-\frac{c_{pd}^\dagger}{R_d^\dagger}\right)\left\{\frac{\lambda^\dagger}{c_{pd}^\dagger T}+\left(1-\frac{M_d}{M_v}\right)\right\} q \tag{61}$$

ただし添字 † の付いた量は単位質量当たりの量で, $R_d^\dagger = R/M_d$ は乾燥成分の単位質量当たりの気体定数, $R_v^\dagger = R/M_v$ は可凝縮成分の単位質量当たりの気体定数, $c_{pd}^\dagger = c_p/M_d$ は単位質量当たりの乾燥成分の比熱, $\lambda^\dagger = \lambda/M_v$ は単位質量当たりの潜熱である. q は上昇流域での可凝縮成分の混合比であり, 気塊の周囲の大気の混合比を湿度 r を用いて rq とした.

以下では, 前節で求めた湿潤断熱温度減率と静的安定度が, それぞれ (58), (60) 式で表現されることを示す. また (58) と (60) 式を変形することで (59) と (61) 式がそれぞれ導かれることを示す.

(58) 式は (55) 式において, $M \approx M_d, R_v^\dagger = R^\dagger/\varepsilon$ とすることで直ちに求まる. さらに凝縮成分の少ないとする条件が成立する場合には $1 \gg \frac{\lambda^{\dagger 2} q}{R_v^\dagger c_{pd}^\dagger T^2}$ となるので, (59) 式は以下のように導出される.

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dz} &= -\frac{g}{c_{pd}^\dagger}\left(\frac{1+\frac{\lambda^\dagger q}{R_d^\dagger T}}{1+\frac{\lambda^{\dagger 2} q}{R_v^\dagger c_{pd}^\dagger T^2}}\right), \\
&\approx -\frac{g}{c_{pd}^\dagger}\left(1+\frac{\lambda^\dagger q}{R_d^\dagger T}\right)\left(1-\frac{\lambda^{\dagger 2} q}{R_v^\dagger c_{pd}^\dagger T^2}\right), \\
&= -\frac{g}{c_{pd}^\dagger}\left\{1-\left(\frac{\lambda^\dagger}{R_v^\dagger T}-\frac{c_{pd}^\dagger}{R_d^\dagger}\right)\frac{\lambda^\dagger q^\dagger}{c_{pd}^\dagger T}\right\}.
\end{aligned}$$

ただし q の 2 次の項は無視した. ちなみに木星の温度条件の場合, この近似が成立する条件はおおよそ $q \ll 2.0 \times 10^{-2}$ である.

静的安定度の式 (60) は, 静的安定度の式 (50) において, 単位モル当たりの量を単位質量当たりの量に変換し, 凝縮成分の少ない条件下でのモル比と混合比の関係式 (56) および分子量の関係 (57) を用いることで求まる.

$$\begin{aligned}
N^2 &= \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{Mg}{c_{pd}^\dagger M}\right) - g\left(\frac{r(M_v-M_d)}{M}\frac{dX}{dz}\right) \\
&= \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{g}{c_{pd}^\dagger}\right) - g\left(\frac{r(M_v-M_d)}{M_d}\frac{M_d}{M_v}\frac{dq}{dz}\right) \\
&= \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{g}{c_{pd}^\dagger}\right) + g\left(\frac{M_d}{M_v}-1\right)\frac{d(rq)}{dz}
\end{aligned}$$

ただし $dT/dz = \Gamma_m$ とした. さらに (60) 式の変形を行う. (32) 式を dq/dz の式に書き換えると,

$$\begin{aligned}
\frac{d(rq)}{dz} &= \left(\frac{\lambda^\dagger M_v}{R_d^\dagger M_d T^2}\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{R_d^\dagger M T}\right)(rq), \\
&= \left(-\frac{\lambda^\dagger}{R_v^\dagger T^2}\frac{g}{c_{pd}^\dagger} + \frac{g}{R_d^\dagger T}\right)(rq), \\
&= \frac{g}{c_{pd}^\dagger T}\left(\frac{c_{pd}^\dagger}{R_d^\dagger} - \frac{\lambda^\dagger}{R_v^\dagger T}\right)(rq). \qquad (62)
\end{aligned}$$

となる. ただし q は小さいので, $dT/dz \approx -g/c_{pd}^\dagger$ とした. (62) 式と (59) 式を (60) 式に代入することで, (61) 式が得られる.

$$N^2 = \frac{g}{T}\left(\Gamma_m + \frac{g}{c_{pd}^\dagger}\right) + g\left(\frac{M_d}{M_v}-1\right)\frac{d(rq)}{dz}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g}{T}\left[\frac{g}{c^{\dagger}_{p_d}}\left\{\left(\frac{\lambda^{\dagger}}{R^{\dagger}_v T}-\frac{c^{\dagger}_{p_d}}{R^{\dagger}_d}\right)\frac{\lambda^{\dagger}q^{\dagger}}{c^{\dagger}_{p_d}T}\right\}\right]+g\left(\frac{M_d}{M_v}-1\right)\left\{\frac{g}{c^{\dagger}_{p_d}T}\left(\frac{c^{\dagger}_{p_d}}{R^{\dagger}_d}-\frac{\lambda^{\dagger}}{R^{\dagger}_v T}\right)(rq)\right\},\\
&= \frac{g^2}{c^{\dagger}_{p_d}T}\left(\frac{\lambda^{\dagger}}{R^{\dagger}_v T}-\frac{c^{\dagger}_{p_d}}{R^{\dagger}_d}\right)\left\{\frac{\lambda^{\dagger}}{c^{\dagger}_{p_d}T}+r\left(1-\frac{M_d}{M_v}\right)\right\}q.
\end{aligned}
$$

A　近似の成立する条件

凝縮物の少ないとする条件 (35) 式と凝縮物の多いとする条件 (41) 式が成立する条件を検討する. 木星型惑星で凝縮しうる化合物の代表的な数値を表 1 の通りに与えることとする. 但し気体定数 $R = 8.31$ J/K mol, 平均比熱 $\bar{c_p} = 27$ J/K mol とする.

物理量	水	アンモニア	メタン
潜熱 [J/mol]	40.66×10^3	23.35×10^3	8.180×10^3
温度 [K]	373.15	195.40	90.68
平均比熱 [J/K mol]		27	
気体定数 [J/K mol]		8.31	

表 1: 木星条件での化合物の代表的な数値. 水, アンモニア, メタンの潜熱 (蒸発エンタルピー) と凝縮温度は化学便覧の第 9.4 節「転移のエンタルピー」より抜粋. 平均比熱はほぼ水素の比熱に等しいものとみなしている.

A.1　水の凝縮

凝縮物の少ないとする近似 (35) 式に表 1 の数値を代入すると,

$$\begin{aligned} X_k &\ll \frac{27 \times 8.31 \times (373.15)^2}{(40.66 \times 10^3)^2} \\ &\ll 2.0 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

である. $1 \times$ solar の場合にはモル比はおおよそ 1.5×10^{-3} となるので, 上記の数値に比べて 1 桁小さいだけである. 近似が正確に成り立つとは言い難い. $10 \times$ solar の場合には, 上記の近似は成立しなくなる.

凝縮物の多いとする近似 (41) 式に表 1 の数値を代入すると,

$$\begin{aligned} X_k &\gg \frac{8.31 \times 373.15}{40.66 \times 10^3} \\ &\gg 8.0 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

である. $50 \times$ solar の場合にはモル比はおおよそ 7.5×10^{-2} となるので, この近似に近付く.

A.2　アンモニアの凝縮

凝縮物の少ないとする近似 (35) 式に表 1 の数値を代入すると,

$$\begin{aligned} X_k &\ll \frac{27 \times 8.31 \times (195.4)^2}{(23.35 \times 10^3)^2} \\ &\ll 1.5 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

である. $1 \times$ solar の場合にはモル比はおおよそ 1.5×10^{-3} となるので, 上記の数値に比べて 1 桁小さいだけである. 近似が正確に成り立つとは言い難い. $10 \times$ solar の場合には, 上記の近似は成立しなくなる.

凝縮物の多いとする近似 (41) 式に表 1 の数値を代入すると,

$$\begin{aligned} X_k &\gg \frac{8.31 \times 195.4}{23.35 \times 10^3} \\ &\gg 7.0 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

である. $50 \times$ solar の場合にはモル比はおおよそ 7.5×10^{-2} となるので, この近似に近付く.

A.3　メタンの凝縮

凝縮物の少ないとする近似 (35) 式に表 1 の数値を代入すると,

$$\begin{aligned} X_k &\ll \frac{27 \times 8.31 \times (90.68)^2}{(8.18 \times 10^3)^2} \\ &\ll 3.0 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

である. $1 \times$ solar の場合にはモル比はおおよそ 1.5×10^{-3} となるので, 上記の数値に比べて 1 桁小さいだけである. 近似が正確に成り立つとは言い難い. $10 \times$ solar の場合には, 上記の近似は成立しなくなる.

凝縮物の多いとする近似 (41) 式に表 1 の数値を代入すると,

$$\begin{aligned} X_k &\gg \frac{8.31 \times 90.68}{8.18 \times 10^3} \\ &\gg 9.0 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

である. $50 \times$ solar の場合にはモル比はおおよそ 7.5×10^{-2} となるので, この近似に近付く.