

内部重力波

林 祥介

2014 年 7 月 4 日

1 内部重力波の支配方程式～渦度方程式

密度成層流体中には重力を復元力とする波—内部重力波—が存在する。ここでは密度成層をしている 2 次元非圧縮非粘性流体の、静止状態に対する微小振幅の波動について調べる。

線型化した 2 次元非圧縮流体の支配方程式から出発する¹。静止状態に対する微小擾乱の振舞いを表わす方程式は、線型化した連続の式、運動方程式、熱力学の式である。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho} g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{d\rho}{dz} = 0. \quad (4)$$

$\rho(z)$ は基本場の密度、 g は重力である。

連続の式 (1) から流線関数 ψ を導入することができる。

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

(1)～(4) から渦度方程式を作ると次のようになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 \psi - \frac{1}{H_d} \frac{\partial \psi}{\partial z}) + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

¹ここでの導出についてはシリーズ‘2次元非圧縮流体の支配方程式（未完）’を参照せよ

ただし, N は Brunt-Väisälä 振動数, H_d は密度のスケールハイトである.

$$N^2 \equiv -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}, \quad H_d \equiv \frac{N^2}{g}.$$

簡単のため, N, H_d は高さによらず一定と仮定する.

$$\psi = e^{\frac{z}{2H_d}} \tilde{\psi}(x, z, t)$$

と置きかえることにより (5) は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{4H_d^2} \right) \tilde{\psi} + N^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

2 内部重力波の分散関係

(7) の解を平面波の形で求める． $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 e^{i(kx+mz-\omega t)}$ を (7) に代入することにより，内部重力波の分散関係が得られる¹．

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_d^2}} \quad (8)$$

ここでは $k > 0$ として話を進める．

- 位相速度

$$c_{px} = \pm \frac{N}{\sqrt{k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_d^2}}}, \quad (9)$$

$$c_{pz} = \pm \frac{N}{\sqrt{k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_d^2}}} \cdot \frac{k}{m} \quad (10)$$

- 群速度

$$c_{gx} = \pm \frac{N(m^2 + \frac{1}{4H_d^2})}{(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_d^2})^{\frac{3}{2}}}, \quad (11)$$

$$c_{gz} = \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_d^2})^{\frac{3}{2}}}. \quad (12)$$

¹物理的に意味のあるのは実数部 $\text{Re}[\tilde{\psi}]$ である．このことはエネルギーなど2次の量を計算するとき注意しなければならない．一次の量（線型方程式）を扱うときには複素数のまま処理することができる．

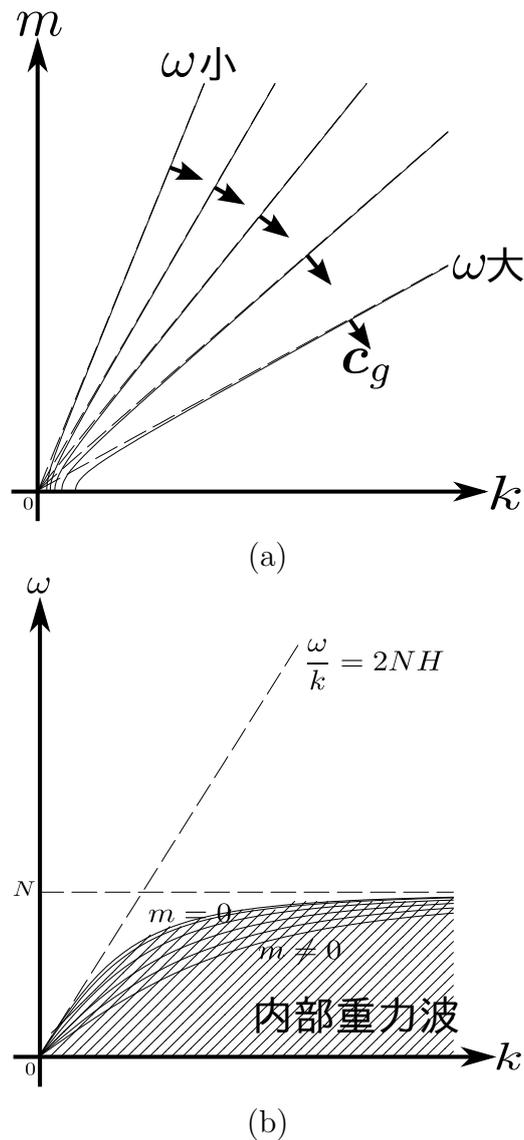


図 1: 内部重力波の分散関係. (a) は $k - m$ 面に $\omega = \text{const.}$ の線を図示してある. (b) は $m = \text{const.}$ としたときの ω と k の関係を図示してある.

3 鉛直波数大きい内部重力波の分散関係

以下, 簡単のため, $m \gg \frac{1}{2H_d}$ である波の性質と構造を調べる.

$m \gg \frac{1}{2H_d}$ から, 分散関係 (8) は次のように近似できる.

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2} = N^2 \cos^2 \varphi. \quad (13)$$

ただし, φ は波数ベクトルと x 軸のなす角である.

位相速度 (9),(10), 群速度 (11),(12) は

$$c_{px} = \pm \frac{N}{\sqrt{k^2 + m^2}}, \quad c_{pz} = \pm \frac{N}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{k}{m}, \quad (14)$$

$$c_{gx} = \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad c_{gz} = \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

(13) より, 振動数は全波数 $\sqrt{k^2 + m^2}$ によらず, 波数ベクトルの向きだけによることがわかる.

(15) より

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_g = 0,$$

すなわち, 波数ベクトルと群速度は直交する (図 2).

また質量保存則 (1) より

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$$

であるから速度 \mathbf{v} と群速度 \mathbf{c}_g は平行であることがわかる.

$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{c}_g$$

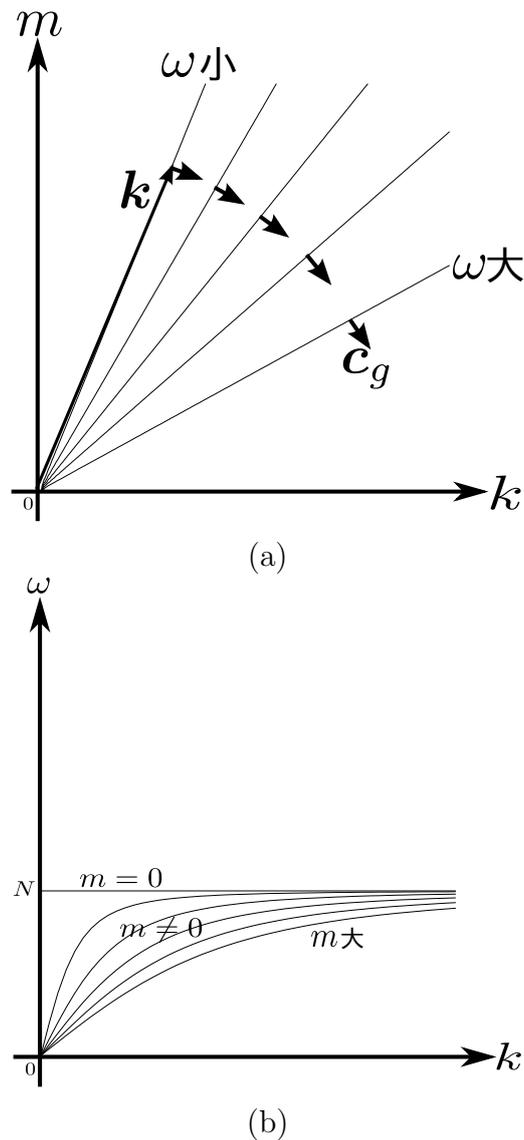


図 2: 内部重力波の分散関係 ($m \gg \frac{1}{2H_d}$). (a),(b) は図 1 と同様である.

4 内部重力波の励起～室内実験

密度成層流体中で一定の角振動数 ω で棒を上下させて、内部重力波を励起したときの様子を図 3, 図 4 に示す (Mowbray and Rarity, 1967). 写真では波に伴う密度変化が可視化されている.

- 内部重力波は振動数が波数ベクトルの向きのみによるので、同じ方向の波数ベクトルを持つ波しか励起されない。
- 群速度は波数ベクトルと直交しているので励起される波は同じ向きの群速度

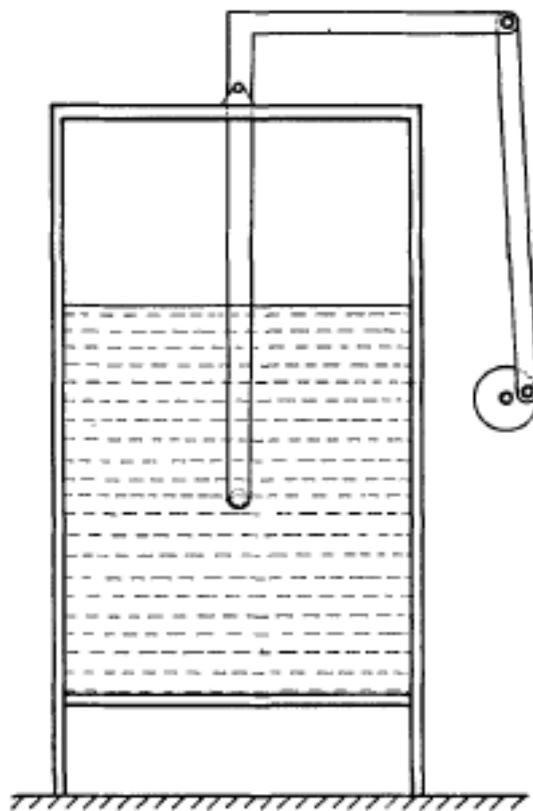


図 3: 内部重力波の室内実験装置 (Mowbray and Rarity,1967)

を持つことになる (図 4) .

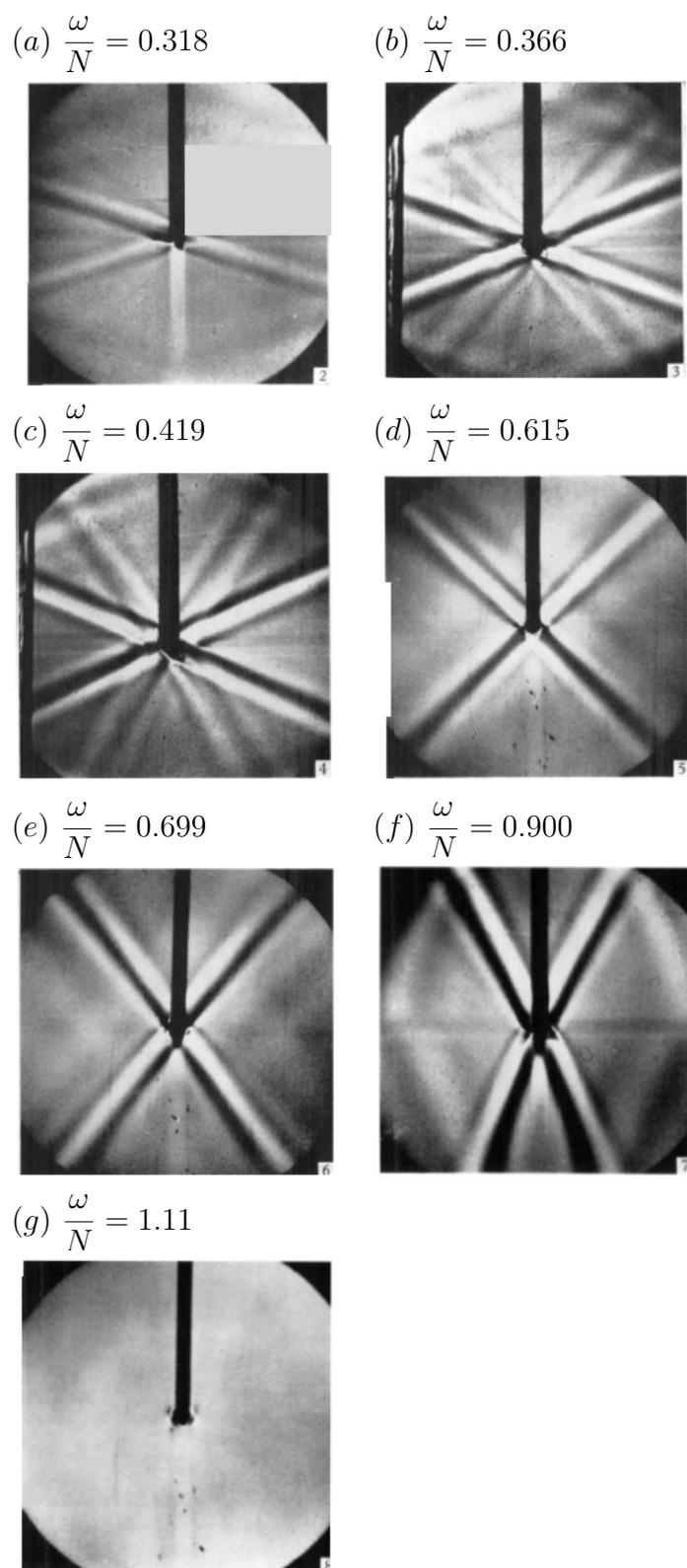


図 4: 内部重力波の室内実験 (Mowbray and Rarity,1967). (g) Brunt-Väisälä 振動数を越えると内部重力波は励起されない.

5 平面波の構造

平面波の構造を見るために, u, w, ρ', p' を $\tilde{\psi}$ で表わし, その位相関係を調べる.

速度 u, v については (5) より

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\left(im + \frac{1}{2H_d}\right)\tilde{\psi} \sim -im\tilde{\psi},$$

$$w = \frac{\partial\psi}{\partial x} = ik\tilde{\psi},$$

u は $\tilde{\psi}$ に対し, 位相が $\frac{\pi}{2}$ 進んでいる. w は $\tilde{\psi}$ に対し, 位相が $\frac{\pi}{2}$ 遅れている.

密度の擾乱 ρ' については熱力学の式 (4)

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + w\frac{d\rho}{dz} = 0,$$

より

$$\rho' = -\frac{\rho N^2 k}{g\omega}\tilde{\psi}.$$

ρ' は $\tilde{\psi}$ に対して位相が π 遅れている.

圧力 p' については, x 成分の運動方程式 (2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}$$

より

$$p' = -i\frac{\omega m}{k}\rho\tilde{\psi}$$

p' は $\tilde{\psi}$ に対して位相が $\frac{\pi}{2}$ 進んでいる.

以上の結果から, 平面波の構造は図5のようになる.

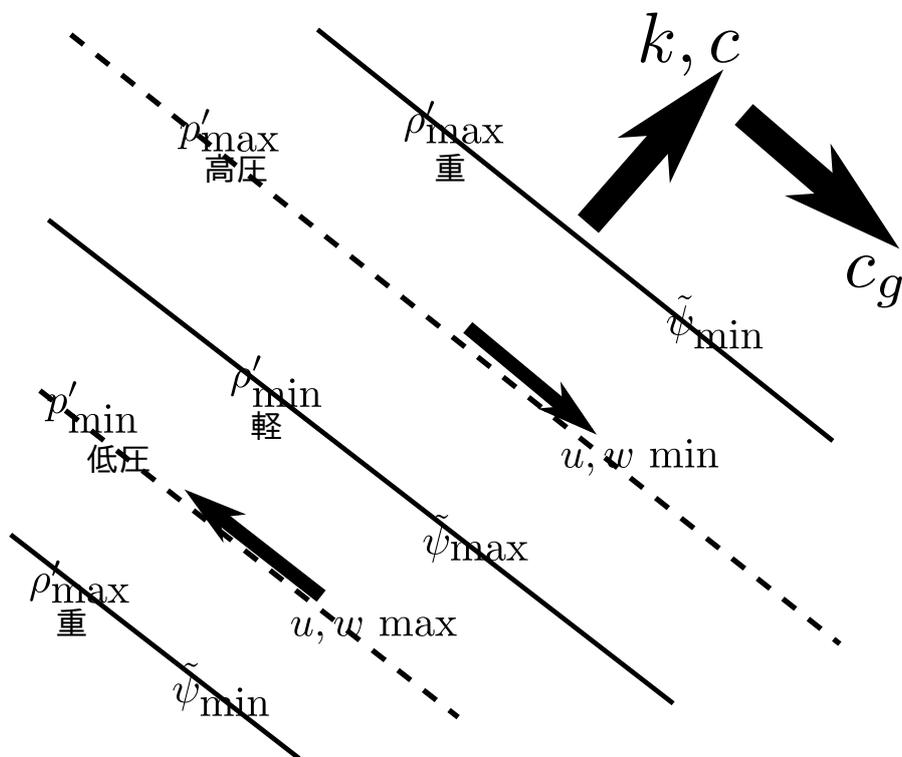


図 5: 内部重力波の構造

6 内部重力波の伝播

図5の構造を持つ波がどのようにして伝播していくかを説明する.

6.1 力のバランスによる説明

1. 図6 (a) のような平面波がある瞬間に存在していたとする. 波面に平行な直線 AB 上の流体について考える. (a) の状態では, AB 上の流体は周囲に比べて重いので下向きに重力が働く. 重力の波面に垂直な方向の成分は圧力傾度とバランスしている¹. したがって AB 上の流体は波面に平行に斜め下向きに加速される.
2. 斜め下向きに動いた流体の密度は周囲の密度とやがて等しくなる. しかし依然として \vec{AB} 方向の速度をもっているので, さらに斜め下に移動し密度は相対的に小さくなる. (図6.(b))
3. 周囲より軽くなった AB 上の流体は浮力を受ける. 1. の場合と同様に, 波面に垂直な成分は圧力傾度とバランスしているので, 流体は \vec{BA} 方向に加速される. (図6.(c))
4. 加速された流体はやがて \vec{BA} 方向に移動し始め, 再び周囲と密度が等しくなる (図6.(c)). しかし 2. の場合と同様に, さらに \vec{BA} 方向に移動して 1. の状態にもどる.

¹運動方程式の x, z 成分

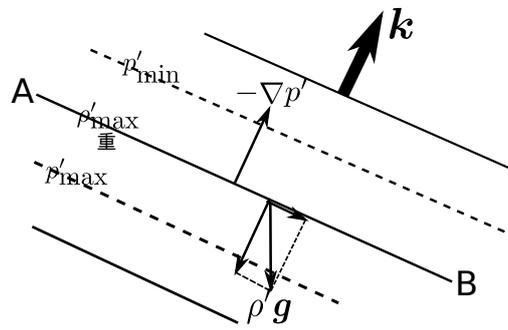
$$-i\omega u = -ik \frac{p'}{\rho}, \quad -i\omega w = -im \frac{p'}{\rho} - \frac{\rho' g}{\rho}$$

にそれぞれ k, m をかけて足すことにより

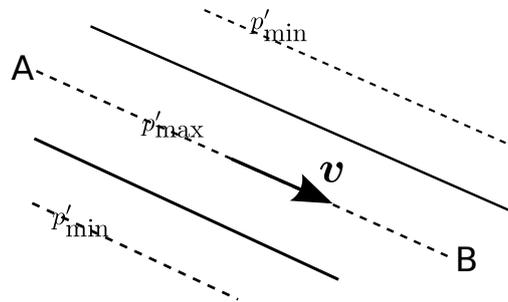
$$-\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \nabla p' = \frac{\rho' g}{\rho} \sin \varphi$$

となる.

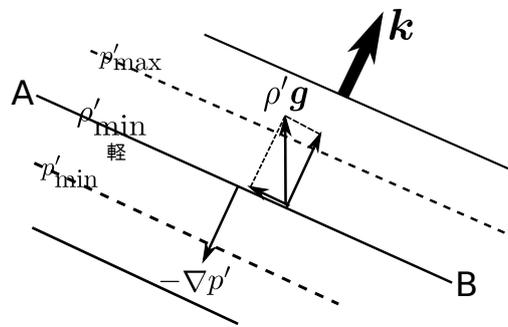
(a)



(b)



(c)



(d)

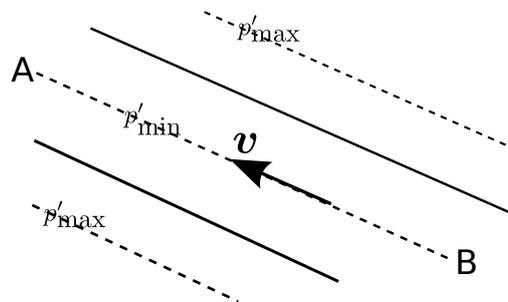


図 6: 内部重力波の伝播

6.2 渦度による説明

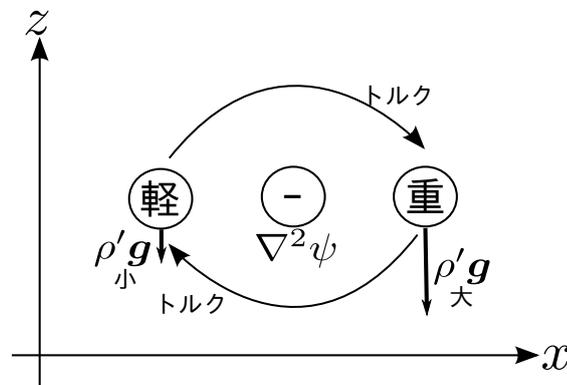
渦度方程式 (6) を導く過程において、渦度 $\nabla^2\psi$ と密度の perturbation ρ' についての 2 変数の式でとどめておくと次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2\psi - \frac{1}{H_d} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \sim \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2\psi = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial\rho'}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} - \frac{\rho N^2}{g} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

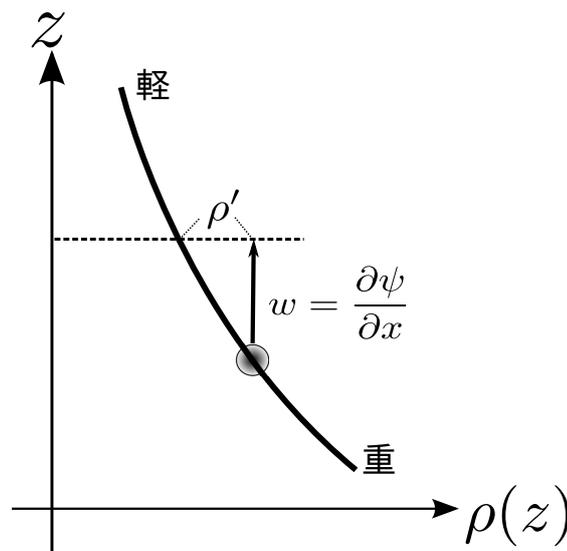
- (16) のイメージ

水平密度差のトルクにより渦度が生じる。



- (17) のイメージ

相対的に重い流体が下方から移流して、 ρ' が大きくなる。



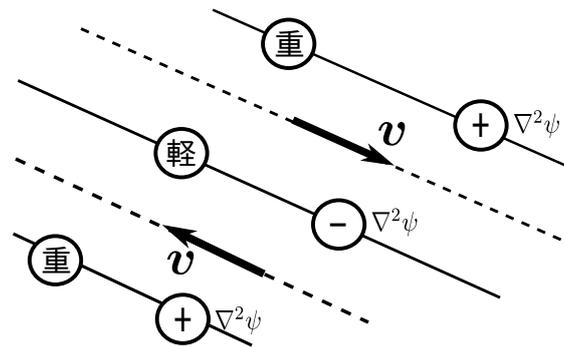


図 7: 内部重力波の構造 (渦度と速度, 密度の関係)

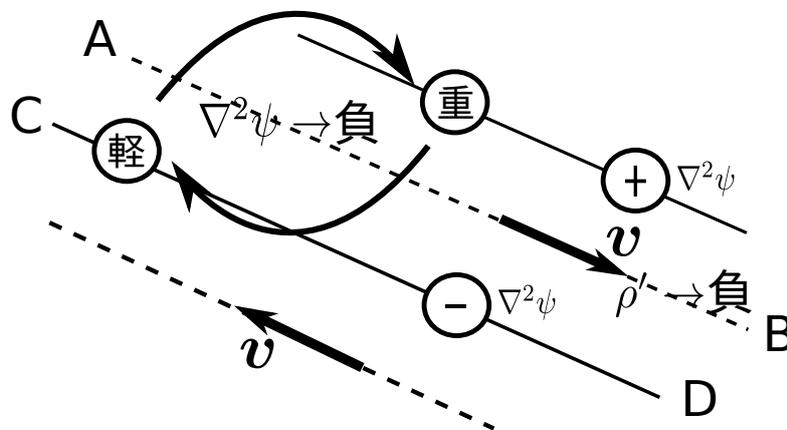


図 8: 内部重力波の伝播 (渦度による記述)

(16),(17) より, 平面波の伝播を考える. 渦度の位相は,

$$\nabla^2\psi = -(k^2 + l^2)\psi$$

より, ψ に対して π ずれている (図 7) .

1. AB 上では w が負となるので (17) より AB 上で密度の擾乱 ρ' は小さくなっていく. また, 水平密度差によりトルクが生じ, 負の渦度が生じる (図 8) . したがって, CD から AB へ波面が移動する.
2. AB 上に渦度ができるに伴って CD 上では正の w が引き起こされ密度の小ささが解消される.

7 シア一流中の伝播：W.K.B. 近似による記述

7.1 局所分散関係式

$x - z$ 2次元成層流体について、密度 $\rho(z)$ 、 x 方向の速度 $U(z)$ の基本場に対する擾乱の方程式は¹

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{dU}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho} g, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w \frac{d\rho}{dz} = 0. \quad (21)$$

ただし g は重力である.

連続の式 (1) から流線関数 ψ を導入することができる.

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (22)$$

(1)~(4) から渦度方程式を作ると次のようになる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \nabla^2 \psi - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (23)$$

以下簡単のため $N \equiv -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ は定数とする.

(6) の解として微小なパラメータ ε で展開した形を考える.

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(X, Z, T) e^{\frac{i\vartheta(X, Z, T)}{\varepsilon}} \quad (24)$$

$$X = \varepsilon x, \quad Z = \varepsilon z, \quad T = \varepsilon t,$$

$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

X, Z, T は x, z, t に比べてゆっくりとした変化を表す変数である. (7) は振幅 $A(X, Z, T)$ が位相 ϑ/ε に比べてゆっくりとした変化している波束を表現している (図 1).

¹この導出についてはシリーズ '2次元非圧縮流体の支配方程式' を参照せよ

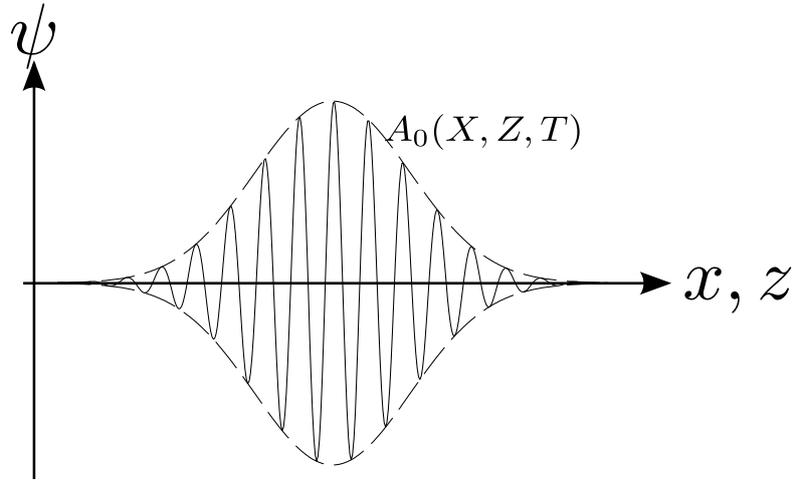


図 9: 波束のイメージ

局所的な波数，振動数は次のように定義される．

$$k = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \vartheta(X, Z, T) \quad (25)$$

$$m = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial Z} \vartheta(X, Z, T) \quad (26)$$

$$\omega = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial T} \vartheta(X, Z, T) \quad (27)$$

基本流が $U(z)$ が z 方向にゆっくりと変化していると仮定する． U は Z のみで表わされねばならない．

$$U \equiv U(Z)$$

(7) を (6) に代入し， ε の各 order でまとめると， $O(\varepsilon)$ より局所分散関係が求まる．

$$(Uk - \omega)^2 (k^2 + m^2) - N^2 k^2 = 0 \quad (28)$$

$$\omega = U(z)k \pm \sqrt{\frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2}} \quad (29)$$

ω, k, m は Z の関数である．

7.2 波数・振動数の保存則

(8)~(10) のように局所的に定義された波数，振動数の時間変化を計算しよう．

波数を時間で微分することにより ω , k , m の間に次の関係が成り立つことがわかる．

$$\frac{\partial k}{\partial T} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X \partial T} = -\frac{\partial \omega}{\partial X}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial m}{\partial T} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Z \partial T} = -\frac{\partial \omega}{\partial Z}. \quad (31)$$

まとめて書くと，

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial T} + \nabla_X \omega = 0 \quad (32)$$

ただし

$$\begin{aligned} \nabla_X &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial Z}, \\ \mathbf{k} &= (k, m), \end{aligned}$$

である．波数 k , m は単位長さ当たりの波の数， ω はある場所を単位時間当たり通過する波の数である．(15) は波数の保存を表す式である．

さて，局所分散関係

$$\omega = \omega(k, m, Z)$$

を用いれば， k の時間変化を与える (13) の右辺を計算することができる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial X} &= \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial X} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial X} \\ &= c_{gx} \frac{\partial k}{\partial X} + c_{gz} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X \partial Z} \\ &= c_{gx} \frac{\partial k}{\partial X} + c_{gz} \frac{\partial k}{\partial Z}, \end{aligned}$$

ただし， $\mathbf{c}_g = (c_{gx}, c_{gy})$ は群速度である．

$$c_{gx} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_m, \quad c_{gz} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_k$$

これより波数 k の時間変化の式は

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_{gx} \frac{\partial k}{\partial X} + c_{gz} \frac{\partial k}{\partial Z} = 0, \quad (33)$$

となる。

同様に，波数 m の時間変化を計算する．(14) 式の右辺は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial Z} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{m,z} \frac{\partial k}{\partial Z} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial m} \right)_{k,z} \frac{\partial m}{\partial Z} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial Z} \right)_{k,m} \\ &= c_{gx} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X \partial Z} + c_{gz} \frac{\partial m}{\partial Z} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial Z} \right)_{k,m} \\ &= c_{gx} \frac{\partial m}{\partial X} + c_{gz} \frac{\partial m}{\partial Z} + \frac{dU}{dZ} k. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial m}{\partial T} + c_{gx} \frac{\partial m}{\partial X} + c_{gz} \frac{\partial m}{\partial Z} = - \left(\frac{\partial \omega}{\partial Z} \right)_{k,m}. \quad (34)$$

最後に ω について

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial T} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right) \frac{\partial k}{\partial T} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial m} \right) \frac{\partial m}{\partial T} \\ &= c_{gx} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X \partial T} + c_{gz} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Z \partial T} \\ &= -c_{gx} \frac{\partial \omega}{\partial X} - c_{gz} \frac{\partial \omega}{\partial Z}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial \omega}{\partial T} + c_{gx} \frac{\partial \omega}{\partial X} + c_{gz} \frac{\partial \omega}{\partial Z} = 0. \quad (35)$$

(11) ~ (13) より, ω, k は群速度とともに移動する系から見れば保存するが, m は保存しないことがわかる¹.

7.3 wave action 保存則

1 波長について平均した波のエネルギー \bar{E} は

$$\bar{E} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \overline{u^2} + \overline{w^2} + \overline{\left(\frac{g\rho}{\rho_0 N} \right)^2} \right\} \quad (36)$$

で定義される.

流れののってみた波の振動数 $\hat{\omega}$

$$\hat{\omega} = \omega - Uk$$

を定義する.

$O(\varepsilon^1)$ の式より \bar{E} , $\hat{\omega}$ に関して次の式が導かれる (Appendix.A).

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(c_{gx} \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(c_{gz} \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) = 0. \quad (37)$$

$\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}$ を群速度 $\mathbf{c}_g = (c_{gx}, c_{gy})$ で動く体積 V について積分すれば,

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} = 0 \quad (38)$$

$\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}$ は波束についての保存量である. これを wave action(波の作用) という.

¹一般に局所分散関係は $\omega = \omega(k, m, X, Z, T)$ となる. そのとき波数, 振動数の式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial T} + \mathbf{c}_g \cdot \nabla_X k &= -\nabla_X \omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial T} + \mathbf{c}_g \cdot \nabla_X \omega &= -\frac{\partial \omega}{\partial T}. \end{aligned}$$

ω が X, Z, T に陽によらなければ, それぞれの場合について k, m, ω が保存する. ここでは ω が Z のみによる場合であった.

8 シア一流中の波束の伝播

8.1 波数並びに波束の変化

波束は局所的な群速度 c_g で振動数 ω ，水平波数 k ，wave action $\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}$ を保存しながら伝播していく。しかし，鉛直波数は保存せず，局所分散関係を満たしながら変化してゆく。

いま，図2のような $U(z)$ の流れに，上向きで U と同方向の群速度をもつ波束をおいたとする。

1. 上に伝播するにしたがって， $\hat{\omega} = \omega - Uk$ は減少する。鉛直波数 m ，群速度は分散関係 (7) より，

$$m^2 = k^2 \left(\frac{N^2}{\hat{\omega}^2} - 1 \right) \quad (39)$$

$$c_{gx} = U + \frac{\hat{\omega}^4}{N^2 k^3} (N^2 - \hat{\omega}^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (40)$$

$$c_{gz} = \frac{\hat{\omega}^2}{Nk} \left(1 - \frac{\hat{\omega}^2}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

$\hat{\omega}$ が減少すると m は増加する。したがって波面は次第に水平になってゆく。また鉛直群速度も減少してゆく。

2. $\hat{\omega} \rightarrow 0$ となる高さに近づくとつれ， $m \rightarrow \infty$ $c_{gz} \rightarrow 0$ $c_{gx} \rightarrow U$ となる。また wave action の保存より， $\bar{E} \rightarrow 0$ となる。すなわち波は‘吸収’されて見えなくなってしまう。

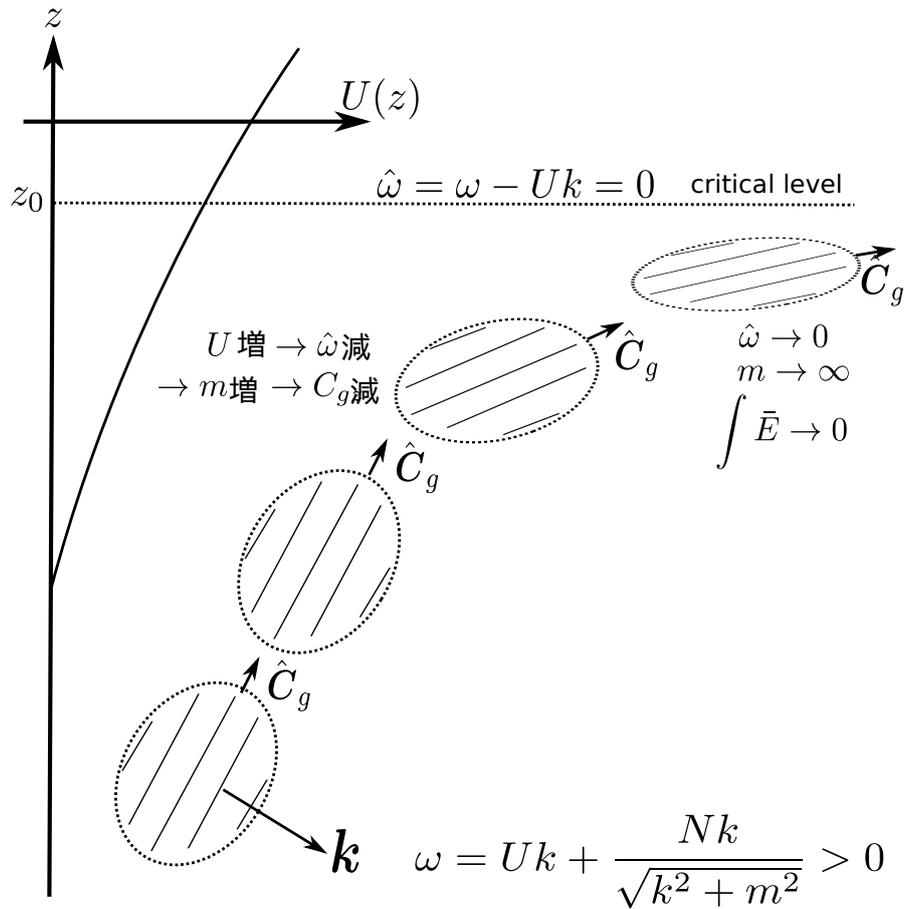


図 10: シア一流中を伝播する内部重力波の波束

8.2 critical level

$\hat{\omega} \equiv \omega - Uk = 0$ となる高さでは $m \rightarrow \infty$ となる. $\hat{\omega} = 0$ となる高さ $Z = Z_c$ を critical level という.

critical level 付近で波がどのように振舞うかを群速度を用いて考える. critical level の近くでは

$$\hat{\omega} \equiv \omega - U(z)k \sim -k \left. \frac{dU}{dz} \right|_{Z_c} (Z - Z_c)$$

と近似できる. これを鉛直群速度 c_{gz} の式 (41) に代入すると

$$c_{gz} \sim \frac{k}{N} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 (Z - Z_c)^2$$

高さ Z_1 から Z_2 まで波束が伝播するのに要する時間 T は

$$T = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{dz}{c_{gz}}$$
$$\sim \frac{N}{k} \left(\frac{dU}{dz} \right)^{-2} \left(\frac{1}{Z_1 - Z_c} - \frac{1}{Z_2 - Z_c} \right)$$

$Z_2 \rightarrow Z_c$ とすると $T \rightarrow \infty$ となる. すなわち, 波束が critical level に達するまでには無限の時間がかかる. 波束は critical level にいつまでたっても達することができない.

8.3 W.K.B 近似の成立条件の吟味

W.K.B 近似が成立するには、波長の変化のスケールが波長に比べて十分に長いことが必要となる（局所的な波数が定義できないとダメ）。critical level 付近においてその条件を満たすかどうか調べてみる。

全波数は $k = \sqrt{k^2 + m^2}$ であるが critical level 付近では $m \rightarrow \infty$ となるので m について調べる。

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m} \frac{dm}{dz}} \right| &= \left| \frac{1}{m^2} \frac{dm}{dz} \right| \\ &= \left| \frac{1}{m^3} \frac{N^2}{(U-c)^3} \frac{dU}{dZ} \right| \\ &= \frac{1}{\left[\frac{N^2}{(U-c)^2} - k^2 \right]^{\frac{3}{2}} (U-c)^3} N^2 U_z \\ &= \left| \frac{N^2 U_z}{[N^2 - k^2(U-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \right| \Big|_{U-c \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{dU}{dZ} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} m^2 &= k^2 \left(\frac{N^2}{\hat{\omega}^2} - 1 \right) = \frac{N^2}{(U-c)^2} - k^2 \\ m \frac{dm}{dZ} &= - \frac{N^2}{(U-c)^3} \frac{dU}{dZ} \end{aligned}$$

したがって $\frac{1}{N} \frac{dU}{dZ} \ll 1$ である限り、critical level 付近でも W.K.B 近似が成立する¹。

¹ $Ri \equiv N^2 \left(\frac{dU}{dz} \right)^{-2}$ は Richardson Number と呼ばれる。 Ri が十分大きければ W.K.B. 近似が成り立つ。

8.4 W.K.B 近似の妥当性

近似の成立する条件は

1. 振幅変化のスケールが波長より長い

$$\left| \frac{A_{\mathbf{x}}}{A} \right|^{-1} \gg \vartheta_{\mathbf{x}}$$

2. 波長変化のスケールが波長より長い

$$\left| \frac{\vartheta_{\mathbf{x}}}{\vartheta_{\mathbf{x}}} \right|^{-1} \gg \vartheta_{\mathbf{x}}$$

内部重力波の場合, 2. については $m^2 = \frac{N^2}{(U-c)^2} - k^2$ より,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m^2} \frac{dm}{dZ} \right| &= \frac{\left| \frac{2N^2}{(U-c)^3} \frac{dU}{dZ} \right|}{\left[\frac{N^2}{(U-c)^2} - k^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\frac{2U_z}{N}}{\left[1 - \frac{k^2(U-c)^2}{N^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\frac{2U_z}{N}}{\left(1 - \frac{k^2}{k^2+m^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

k, m に対し, 十分 U_z/N が大きければ近似は成り立つ.

9 内部重力波の critical level 付近での定常解

図3のように下から $e^{ik(x-ct)}$ 型の波を励起させるとき, critical level 付近ではどのような状態になるかを考える.

(6) の解を

$$\psi = \tilde{\psi}(z)e^{ik(x-ct)}$$

の形で求める. (6) に代入すると

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{(U-c)^2} - \frac{U_{zz}}{U-c} - k^2 \right] \tilde{\psi} = 0. \quad (42)$$

(25) の解を $U-c=0$ となる高さ Z_c のまわりの級数解の形で求めると (Appendix.C),

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} Ae^{\frac{1}{2}\mu \ln|z-z_c|} e^{i\mu \ln|z-z_c|} & (z-z_c > 0) \\ -ie^{\mu\pi} A |z-z_c|^{\frac{1}{2}} e^{i\mu \ln|z-z_c|} & (z-z_c < 0) \end{cases}$$

ただし

$$\mu = \sqrt{\frac{N^2}{U_z(z_c)^2} - \frac{1}{4}}$$

である. 結果を図4に示す. Z_c に近づくにつれ, 波の振幅が減少する様子がみられる². 鉛直波数は

$$m = \frac{\partial}{\partial Z}(\mu \ln|z-z_c|) = \frac{1}{z-z_c}$$

$z \rightarrow z_c$ で $m \rightarrow \infty$ となっている. このことは波線理論で求めた波束の伝播性質と同じである.

² $\psi \rightarrow 0$ だが, $\bar{E} \rightarrow 0$ とはならないことに注意しよう.

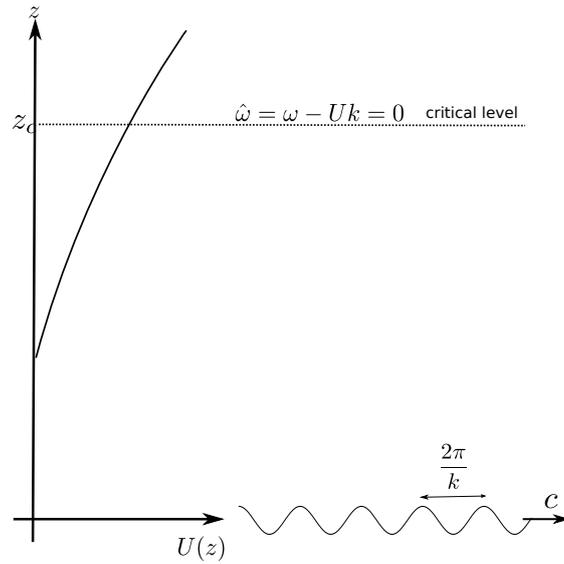


図 11: 内部重力波の critical level 付近での定常解を考える状況

critical level 付近では

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{\partial\psi}{\partial z} \propto \frac{1}{\sqrt{z-z_c}} \rightarrow \infty, \\
 w &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \propto k\sqrt{z-z_c} \rightarrow 0, \\
 \bar{E} &= \frac{1}{2} \left\{ \overline{u^2} + \overline{w^2} + \overline{\left(\frac{g\rho}{\rho N}\right)^2} \right\} \propto \frac{1}{z-z_c} \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

エネルギーは無限大になる。これは無限時間をかけて波束が critical level へ圧縮されているからである。

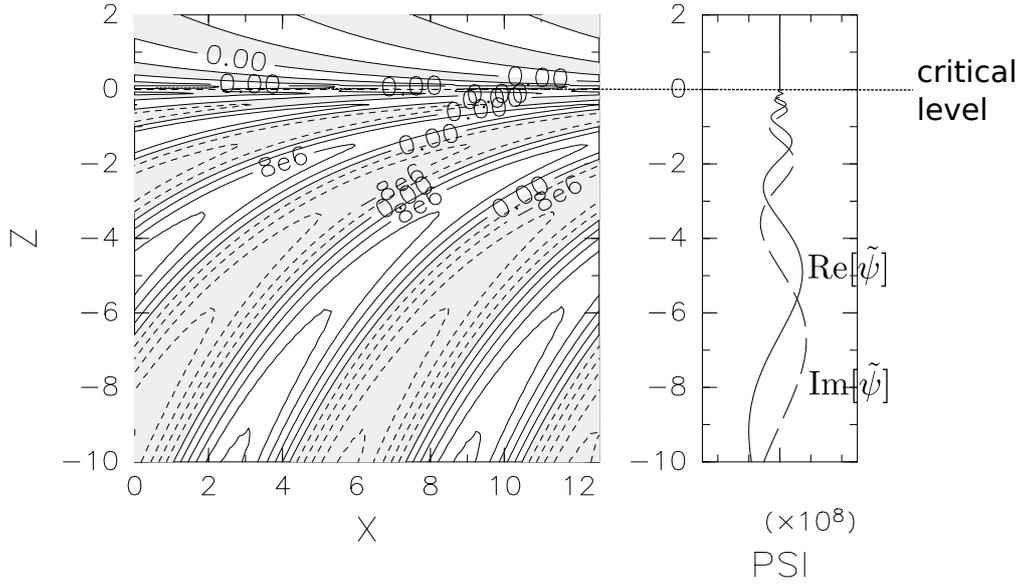


図 12: 内部重力波の critical level 付近での定常解

10 内部重力波の wave action 保存則

Boussinesq 近似でのエネルギー方程式を導くため、基本方程式に戻る²。 N, ρ は一定とする。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{dU}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho} g, \quad (45)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho N^2 w}{g} = 0, \quad (46)$$

ただし $N \equiv -\frac{g d\rho}{\rho dz}$ である。 (44) $\times u$ + (45) $\times w$ より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \frac{1}{2} (u^2 + w^2) \right\} + uw \frac{dU}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} w - \frac{\rho g w}{\rho} \quad (47)$$

²ここでの量 u, w, ρ', p' はすべて実数であることに注意しよう。線型論の結果を代入するにはその実部をとることが必要である。簡単のため複素数を $\tilde{\cdot}$ をつけて表わすことにする。たとえば

$$u = \text{Re}[\tilde{u}], \quad w = \text{Re}[\tilde{w}] \text{ etc.}$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{2} \tilde{u} \tilde{u}^*, \quad \overline{uw} = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{u} \tilde{w}^*].$$

(46) $\times \frac{\rho g^2}{\rho^2 N^2}$ より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\rho N}\right)^2 \rho^2 \right\} = \frac{\rho g w}{\rho} \quad (48)$$

(48) + (49) より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) E + uw \frac{dU}{dz} = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(p'u) + \frac{\partial}{\partial z}(p'w) \right\} \quad (49)$$

ただし E は擾乱のエネルギー

$$E \equiv \frac{1}{2} \left\{ u^2 + w^2 + \left(\frac{\rho g}{\rho N}\right)^2 \right\}$$

を表わす。

(49) について 1 波長についての平均をとる。局所的分散関係が成り立つとして

$$\begin{aligned} \overline{u^2} &= \overline{\left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} = m^2 \overline{\psi^2}, \\ \overline{w^2} &= \overline{\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2} = k^2 \overline{\psi^2} \\ \overline{\left(\frac{g\rho}{\rho N}\right)^2} &= \frac{g^2}{\rho^2 N^2} \cdot \overline{\left(\frac{\rho N^2 k}{g \hat{\omega}} \psi\right)^2} = \frac{N^2 k^2}{\hat{\omega}^2} \overline{\psi^2} = (k^2 + m^2) \overline{\psi^2} \end{aligned}$$

ただし $\hat{\omega} \equiv \omega - Uk$, $\bar{E} = (k^2 + m^2) \overline{\psi^2}$ である。

一方 $\tilde{p} = -i \frac{\hat{\omega} m}{k} \rho \tilde{\psi}$ より

$$\begin{aligned} \frac{\overline{p'u}}{\rho} &= \frac{\hat{\omega} m^2}{k} \overline{\psi^2} = \frac{\hat{\omega} m^2}{k(k^2 + m^2)} \bar{E} = \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} \bar{E} = \hat{c}_{gx} \bar{E}, \\ \frac{\overline{p'w}}{\rho} &= -\hat{\omega} m \overline{\psi^2} = \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} \bar{E} = \hat{c}_{gz} \bar{E}, \\ \overline{uw} &= -mk \overline{\psi^2} = -\frac{mk}{k^2 + m^2} \bar{E} = \frac{kc_{gz}}{\hat{\omega}} \bar{E} \end{aligned}$$

ただし

$$\hat{c}_{gx} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial k}, \quad \hat{c}_{gz} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial m}$$

である。

以上から (49) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{E} + \frac{k \hat{c}_{gz}}{\hat{\omega}} \frac{dU}{dz} \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial x} (\hat{c}_{gx} \bar{E}) - \frac{\partial}{\partial z} (\hat{c}_{gz} \bar{E})$$

さらに $c_{gx} = U + \hat{c}_{gx}$, $c_{gz} = \hat{c}_{gz}$ より

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c_{gx} \bar{E}) + \frac{\partial}{\partial z} (c_{gz} \bar{E}) = -\frac{k}{\hat{\omega}} c_{gz} \frac{dU}{dz} \bar{E} \quad (50)$$

一方, 波数, 振動数の保存則 $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{c}_g \cdot \nabla \omega = 0$, $\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{c}_g \cdot \nabla k = 0$ より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} &= \frac{\partial \omega}{\partial t} - U \frac{\partial k}{\partial t} \\ &= -c_{gx} \frac{\partial \omega}{\partial x} - c_{gz} \frac{\partial \omega}{\partial z} + U c_{gx} \frac{\partial k}{\partial x} + U c_{gz} \frac{\partial k}{\partial z} \\ &= -c_{gx} \frac{\partial}{\partial x} (\omega - Uk) - c_{gz} \frac{\partial}{\partial z} (\omega - Uk) - c_{gz} k \frac{dU}{dz} \\ &= -c_{gx} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} - c_{gz} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial z} - c_{gz} k \frac{dU}{dz} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + c_{gx} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} + c_{gz} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial z} = -c_{gz} k \frac{dU}{dz} \quad (51)$$

$\frac{1}{\hat{\omega}}(50) - (51) \times \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}^2}$ より

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(c_{gx} \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(c_{gz} \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) = 0. \quad (52)$$

これを波束と共に動く領域 V で積分すると

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) dV + \int_{\partial V} \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \mathbf{c}_g \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (53)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} dV = 0 \quad (54)$$

11 wave action 保存則についての注意

波束について保存するのは wave action を 波束で積分した

$$\int_V \frac{\bar{E}}{\bar{\omega}} dV$$

であることに気を付けよう。 $\frac{\bar{E}}{\bar{\omega}}$ が 波束内部でどの様になるかは場合によって異なる。 というのは波束が伝播するにしたがって波束の体積 V が変化する (disperse) からである。

簡単のため場が一様 ($\bar{\omega} = \text{const.}$) で考えよう。 この時波束で積分したエネルギー

$$\int_V \bar{E} dV$$

が保存量となる。 今図5 (a) のように、 初期に先頭部の群速度が大きい波束を作ると、 分散して波束は拡がる一方である。 全エネルギーは保存量であるから (平均の) エネルギー密度 \bar{E} は減少しなければならない。

一方 (b) のように先頭の方に群速度が小さい波束を作れば一度波束は縮まってから分散することになる。 \bar{E} は一度増加して、 それから減少してゆくと考えられる。

また、 定常応答問題では critical level に近づくにつれて $\bar{E} \rightarrow \infty$ となる。 その理由は、 定常波源では critical level に近づくにつれて $V \rightarrow 0$ となるからである (後の例参照)。 通常の波束では $V \rightarrow 0$ にはならない。

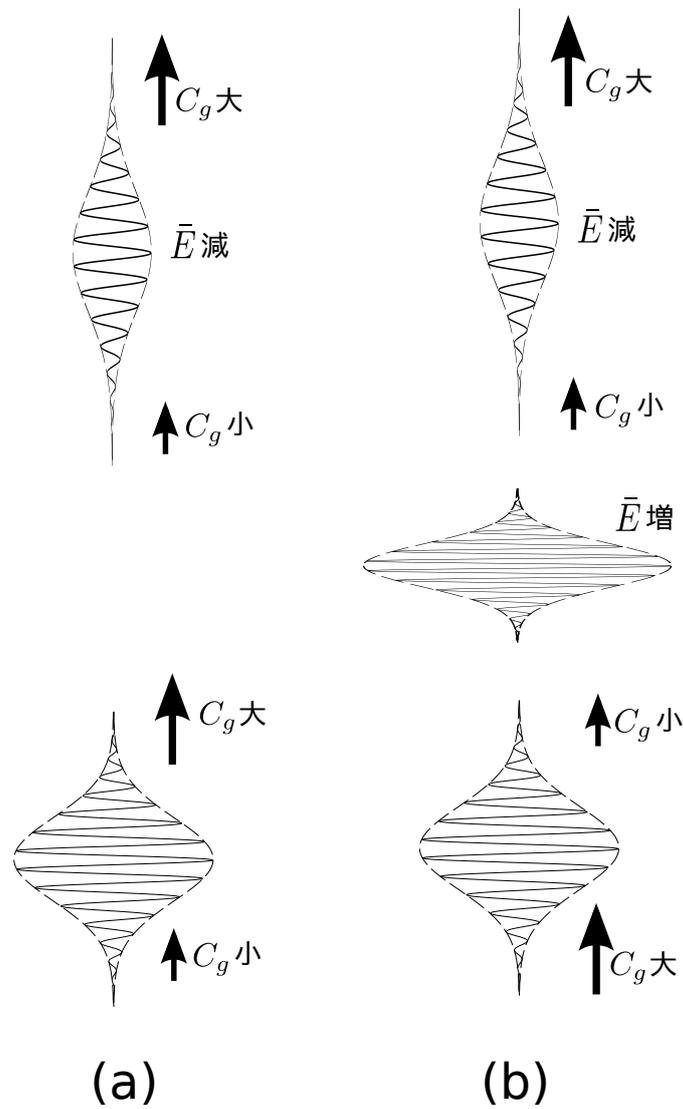


図 13: 波束の分散と \bar{E} の変化. (a) は先頭の方の群速度が大きい波束, (b) は先頭の方の群速度が小さい波束を与えたときの分散の様子

11.1 例 1. 波数が場所によらない波束のシア一流中の伝播

簡単のため x 方向には一定波数の波, e^{ikx} であるとする. 初期に一様な鉛直波数を持った波束を与える.

$$\begin{aligned}\psi &= A(Z)e^{iQ(Z)} \\ &= A_0 e^{a(Z-Z_0)^2} \cdot e^{im_0 Z/\epsilon}\end{aligned}$$

解く方程式は, 鉛直波数と wave action の式である.

$$\frac{\partial m}{\partial T} + c_{gx} \frac{\partial m}{\partial x} + c_{gz} \frac{\partial m}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{dU}{dz} k, \quad (55)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(c_{gx} \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(c_{gz} \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) = 0. \quad (56)$$

初期に m が場所によらないので $\frac{\partial m}{\partial Z} = 0$ である.

$$m = m_0 - \frac{dU}{dz} k T$$

分散関係より $\hat{\omega}$ は時間のみ関数であり, Z によらなくなる.

$$\hat{\omega} = \omega - Uk = \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m(T)}} = \hat{\omega}(T)$$

同様に, 群速度の鉛直成分は

$$c_{gz} = c_{gz}(T) = \mp \frac{Nkm(T)}{\{k^2 + m^2(T)\}^{\frac{3}{2}}}$$

wave action の式は

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\bar{E}(Z, T)}{\hat{\omega}(T)} \right) + c_{gz}(T) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\bar{E}(Z, T)}{\hat{\omega}(T)} \right) = 0$$

この方程式の解は

$$\bar{E}(Z, T) = \frac{\hat{\omega}(T)}{\hat{\omega}(0)} \bar{E}(\xi, 0)$$

となる. ただし $\xi = Z - \int^T c_g(T) dT$ である.

時間の経過とともに critical level に近づくにつれて ($\hat{\omega} \rightarrow 0$), $\bar{E} \rightarrow 0$ となる. 波束の形が変わらない解となっている (図 6).

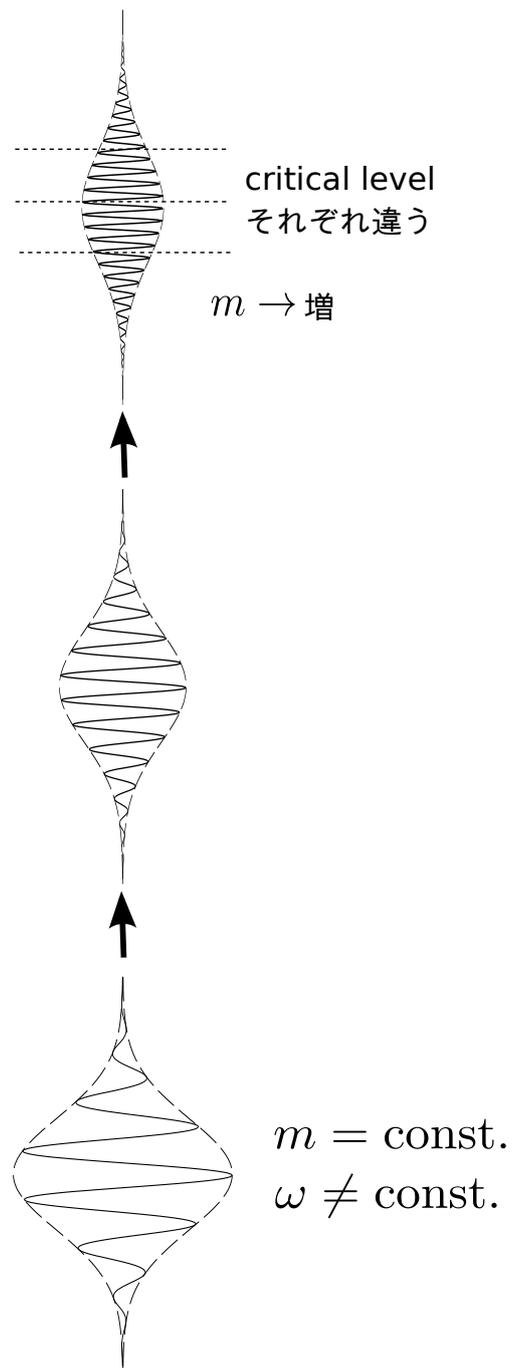


図 14: 形が変わらない波束の伝播

11.2 例 2. 振動数が場所によらない波束の伝播

初期に ω が一定となるような鉛直波数分布を持って波束を与えることを考える。
 ω が一定であるから、どの波数成分についても critical level が同じ高さになる。

図7のように $t = 0$ において $\delta\xi_0 = \xi_2 - \xi_1$ の幅の波束を critical level から ξ 離れた位置に置いたとする.

伝播するにつれて、波束の幅がどの程度縮むか計算する. critical level 付近では、

$$c_{gz} \sim \frac{U_z k^2}{N} (z - z_c)^2 \equiv \frac{1}{A} \xi^2$$

であるから、波束の先端の位置 ξ_1 は

$$t = \int_{\xi_1(0)}^{\xi_1(t)} \frac{-d\xi}{c_{gz}} = -\frac{1}{A} \int \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{1}{A} \left\{ \frac{1}{\xi_1(0)} - \frac{1}{\xi_1(t)} \right\}$$

よって

$$\xi_1(t) = \frac{\xi_1(0)}{A\xi_1(0)t + 1}$$

同様に波束の後端の位置は

$$\xi_2(t) = \frac{\xi_2(0)}{A\xi_2(0)t + 1}$$

となる. よって波束の幅は

$$\delta\xi(t) \equiv \xi_2(t) - \xi_1(t) = \frac{\xi_2(0) - \xi_1(0)}{\{A\xi_1(0)t + 1\}\{A\xi_2(0)t + 1\}}$$

ところで、 t 時間後の波束の位置は

$$\xi = \frac{\xi_0}{A\xi_0 t + 1} \sim \frac{1}{At}$$

であるから

$$\delta\xi \sim \frac{\xi_2(0) - \xi_1(0)}{\xi_1(0)\xi_2(0)} \frac{1}{A^2 t^2} \sim \frac{\delta\xi_0}{\xi_0} \times \xi^2$$

波束の幅は critical level からの距離の2乗に比例する.

一方、エネルギー密度 \bar{E} を、wave action 保存則で考える.

$$\int_V \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} dV \sim \frac{\bar{E}(\xi)}{\hat{\omega}(\xi)} \delta\xi = \text{const.}$$

これに $\hat{\omega} \equiv \omega - Uk \sim -kU_z(z - z_c) = kU\xi$ と $\delta\xi$ の表式を代入すると

$$\frac{\bar{E}(\xi)}{kU_z\xi} \cdot \frac{\delta\xi_0}{\xi_0} \xi^2 = \text{const.}$$

よって

$$\bar{E}(\xi) \propto \frac{1}{\xi}$$

critical level に近づくとつれ $\bar{E} \rightarrow \infty$ となる.

$\hat{\omega}$ の減り方よりも波束の縮まり方のほうが大きい.

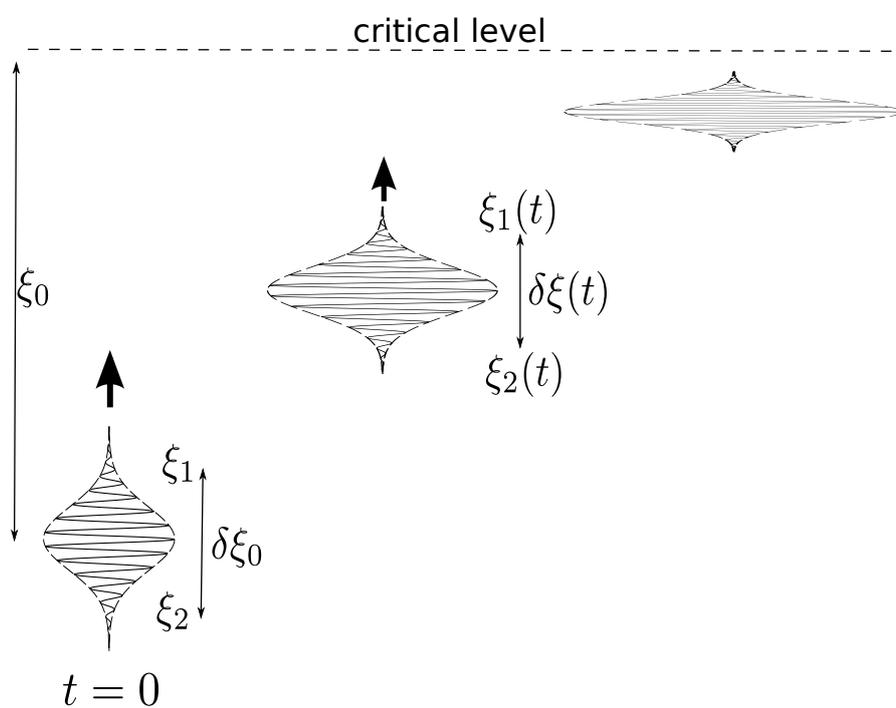


図 15: 振動数が一定の波束の伝播

12 内部重力波の critical level 付近の定常解

critical level 付近での定常解を

$$\psi = \tilde{\psi}(z)e^{ik(x-ct)}$$

の形で求める.

(6) に代入することにより

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{(U-c)^2} - \frac{U_{zz}}{U-c} - k^2 \right] \tilde{\psi} = 0.$$

$c = c_r + ic_i$ で $c_i = 0$ ならば $U(z_c) - c = 0$ となる z_c で特異点をもつ (critical level). ゆっくりと振幅が時間的に増大する解を特異点 $U(z_0) - c_r - ic_i = 0$ のまわりの級数解で求める ($0 < c_i \ll 1$).

仮定として

$$\begin{aligned} \frac{|U_{zz}(z_c)|}{U_z^2(z_c)} c_i &\ll 1, \\ Ri \equiv \frac{N^2}{U_z^2(z_c)} &\gg \frac{1}{4} \end{aligned}$$

とする. $U - c$ を特異点 z_0 のまわりで展開すると

$$U(z) - c = \bar{U}_z(z_0)(z - z_0) + \dots$$

一方

$$\begin{aligned} U(z) - c &= U(z_c) - c + U_z(z_c)(z - z_c) + \dots \\ &= -ic_i + U_z(z_0)(z - z_0) + \dots \end{aligned}$$

$z = z_0$ を代入すると

$$0 \sim -ic_i + U_z(z_0)(z_0 - z_c)$$

よって

$$z_0 \sim z_c + \frac{-ic_i}{U_z(z_c)}$$

また,

$$\begin{aligned}
U_z &= U_z(z_c) + U_{zz}(z_c)(z_0 - z_c) \\
&= U_z(z_c) + \frac{iU_{zz}(z_c)c_i}{U_z(z_c)} \\
&\sim U_z(z_c)
\end{aligned}$$

よって

$$U - c \sim U_z(z_c)(z_0 - z_c)$$

したがって解く方程式は近似的に次のようになる.

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2} + \left[\frac{Ri}{(z_0 - z_c)^2} - k^2 \right] \tilde{\psi} = 0.$$

$z = z_0$ のまわりでの級数解

$$\tilde{\psi} = (z - z_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1)a_n (z - z_0)^{\lambda+n-2} \\
&+ Ri \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{\lambda+n-2} \\
&- k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{\lambda+n} = 0.
\end{aligned}$$

$(\lambda - 2)$ 次の項より

$$\lambda(\lambda - 1) + Ri = 0.$$

よって

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{Ri - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm i\mu$$

ただし $\mu \equiv \sqrt{Ri - \frac{1}{4}}$ である.

$(\lambda - 1)$ 次の項より

$$[(\lambda + 1)\lambda + Ri]a_1 = 0$$

よって

$$a_1 = 0$$

$(\lambda + n)$ 次の項より

$$[(\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1) + R_i]a_{n+2} - k^2 a_n = 0$$

よって

$$a_{n+2} = \frac{k^2}{\lambda^2 + (2n + 3)\lambda + n^2 + 3n + 2 + R_i} a_n$$

2つの独立な解は

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1 &= A(z - z_0)^{\frac{1}{2} + i\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (z - z_0)^{2n} \\ \tilde{\psi}_2 &= B(z - z_0)^{\frac{1}{2} - i\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (z - z_0)^{2n}\end{aligned}$$

今、最低次 $n = 0$ のみ考える． z_0 を z_c に書き換えると

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1 &= A \left(z - z_c - \frac{ic_i}{U_z} \right)^{\frac{1}{2} + i\mu} \\ \tilde{\psi}_2 &= B \left(z - z_c - \frac{ic_i}{U_z} \right)^{\frac{1}{2} - i\mu}\end{aligned}$$

さて、 $z - z_0 = z - z_c + \frac{ic_i}{U_z}$ の argument を考える．

1. $U_z > 0$ のとき

特異点 z_0 は複素 z 平面の上半平面にある．したがって、 $z - z_0 = |z - z_0|e^{i\vartheta}$ と表すとき、argument ϑ は

$$\begin{cases} z - z_c < 0 & \text{のとき} & \vartheta = -\pi \\ z - z_c > 0 & \text{のとき} & \vartheta = 0 \end{cases}$$

$\tilde{\psi}_1$ を変型すると

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1 &= A(z - z_0)^{\frac{1}{2} + i\mu} \\ &= A[|z - z_0|e^{i\vartheta}]^{\frac{1}{2} + i\mu} \\ &= A|z - z_0|^{\frac{1}{2} + i\mu} e^{\frac{i\vartheta}{2} - \vartheta\mu} \\ &= A|z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{i\mu \ln |z - z_0| + \frac{i\vartheta}{2} - \vartheta\mu}\end{aligned}$$

よって

$$\tilde{\psi}_1 = \begin{cases} A|z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{i\mu \ln |z - z_0|} & (z - z_c > 0) \\ -iAe^{\mu\pi} |z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{i\mu \ln |z - z_0|} & (z - z_c < 0) \end{cases}$$

同様に

$$\tilde{\psi}_2 = \begin{cases} B|z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{-i\mu \ln |z - z_0|} & (z > z_c) \\ -ie^{-\mu\pi} B|z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{-i\mu \ln |z - z_0|} & (z < z_c) \end{cases}$$

2. $U_z < 0$ のとき

z_0 は複素 z 平面の下半平面であるから argument は

$$\begin{cases} z - z_c > 0 \text{ のとき } \vartheta = 0, \\ z - z_c < 0 \text{ のとき } \vartheta = \pi. \end{cases}$$

よって $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ は次のようになる.

$$\tilde{\psi}_1 = \begin{cases} A|z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{i\mu \ln |z - z_0|} & (z > z_c) \\ ie^{-\mu\pi} A|z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{i\mu \ln |z - z_0|} & (z < z_c) \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_2 = \begin{cases} B|z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{-i\mu \ln |z - z_0|} & (z > z_c) \\ ie^{\mu\pi} B|z - z_0|^{\frac{1}{2}} e^{-i\mu \ln |z - z_0|} & (z < z_c) \end{cases}$$

$c_i \rightarrow 0$ により $z_0 \rightarrow z_c$ となる.

求めた解が, 上方, 下方のどちらに伝播する波に対応するかを考える.

1. $U_z > 0$ のとき

$\tilde{\psi}_1$ の位相部分は $e^{i\mu \ln |z - z_c|}$ である. 位相関数 $\vartheta = \mu \ln |z - z_c|$ から鉛直群速度を計算して, 上方・下方どちらに伝播する波かを判定する.

局所的鉛直波数 m を計算する.

$$m \equiv \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\mu}{z - z_c}$$

局所的分散関係から求まる鉛直群速度 c_{gx} は

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{km(U - c)}{N^3}$$

$z - z_c > 0$ では, $m > 0$, $U - c > 0$ より

$$c_{gz} > 0$$

$z - z_c < 0$ では, $m < 0$, $U - c < 0$ より

$$c_{gz} > 0$$

これより $\tilde{\psi}_1$ は上方に伝わる波に対応する.
同様に $\tilde{\psi}_2$ は下方に伝わる波に対応する.

2. $U_z < 0$ のとき

$z - z_c > 0$ で ψ_1 は $m > 0$, $U - c < 0$ より

$$c_{gz} < 0$$

$z - z_c < 0$ で $m < 0$, $U - c > 0$ より

$$c_{gz} < 0$$

$\tilde{\psi}_1$ は下方伝播する波, $\tilde{\psi}_2$ は上方伝播する波であることがわかる.

13 参考文献

- Booker, J.R., Bretherton, F.P., 1967 : The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J.Fluid Mech.*, **27**, 513-539.
- Bretherton, F.P., 1966 : Gravity waves in shear. *Quart.J.Roy.Met.Soc.*, **92**, 466-480.
- Mowbray, D.E., Rarity, B.S.H., 1967 : A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. *J.Fluid Mech.*, **28**, 1-16.
- Whitham, G.B., 1974 : Linear and nonlinear waves. A Wiley-Interscience Publication, 636pp.