3 次元球殻領域での拡散型方程式の解析解

竹広真一

平成 18 年 2 月 25 日

この文章では, 球面調和函数–チェビシェフ関数展開を利用した 3 次元球殻領域での流体計算のための SPMODEL ライブラリ (spml) のモジュール wt_module のテストのために, 3 次元球殻領域での拡散型方程式のさまざまな境界条件に対する解を (できるだけ) 解析的に求めることを行う.

1　拡散方程式

半径 r_i, r_o の同心球面の間の 3 次元球殻領域での拡散問題を考える. 支配方程式は 3 次元拡散方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \phi \tag{1}$$

ϕ は拡散する物理量であり, 例えば温度, 組成濃度, 磁場などである. x, y はそれぞれ壁に平行および垂直方向の座標, κ は拡散率 (正数) である. ∇^2 は 3 次元ラプラシアンであり, 緯度経度動径座標系 (λ, φ, r) での表現は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}. \tag{2}$$

一般的な境界条件は, 内外境界球面での物理量とその r 微分の線形結合で与えられる (混合型境界条件).

$$\alpha_{1,i}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \alpha_{0,i}\phi = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i, \tag{3}$$

$$\alpha_{1,o}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \alpha_{0,o}\phi = 0, \quad \text{at} \quad r = r_o, \tag{4}$$

ここで $\alpha_{i,j}$ は定数係数であり, 以下の条件を満たしているものとする.

$$\alpha_{1,o} \cdot \alpha_{0,o} \geq 0, \quad \alpha_{1,i} \cdot \alpha_{0,i} \leq 0, \tag{5}$$

ただし $\alpha_{1,i}$ と $\alpha_{0,i}$, および $\alpha_{1,o}$ と $\alpha_{0,o}$ は同時には 0 にはならないものとする.

1.1　球面調和関数展開

緯度・経度方向には球面調和関数で展開して解くことができる. 以下, その 1 波数成分のみ取りだして扱う. 時間に関しても指数型の解を仮定し,

$$\phi(x, y, t) = \tilde{\phi}_{lm}(r) Y_{lm}(\lambda, \varphi) e^{\sigma t} \tag{6}$$

これを支配方程式に代入すると,

$$\sigma \tilde{\phi}_{lm} = \kappa \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{\phi}_{lm} \right], \tag{7}$$

境界条件は,

$$\alpha_{1,i} \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dy} + \alpha_{0,i} \tilde{\phi}_{lm} = 0 \quad \text{at} \quad y = r_i, \tag{8}$$

$$\alpha_{1,o} \frac{d\phi}{dy} + \alpha_{0,o} \tilde{\phi}_{lm} = 0 \quad \text{at} \quad y = r_o. \tag{9}$$

1.2　最大成長率の見積もり

成長率の最大値を領域積分から見積もることができる. (2) $r^2 \tilde{\phi}^*_{lm}$ をかけて r 方向に全領域積分を行い, 部分積分を繰り返すと,

$$\begin{aligned}
\sigma \int_{r_i}^{r_o} r^2 |\tilde{\phi}_{lm}|^2 dr &= \int_{r_i}^{r_o} dr r^2 \tilde{\phi}^*_{lm} \kappa \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{\phi}_{lm} \right] \\
&= \kappa \int_{r_i}^{r_o} dr \tilde{\phi}^*_{lm} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} \right) - \kappa l(l+1) \int_{r_i}^{r_o} |\tilde{\phi}_{lm}|^2 dr \\
&= \kappa \left[r^2 \tilde{\phi}^*_{lm} \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} \right]_{r_i}^{r_o} - \kappa \int_{r_i}^{r_o} r^2 \left| \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} \right|^2 dr - \kappa l(l+1) \int_{r_i}^{r_o} |\tilde{\phi}_{lm}|^2 dr
\end{aligned}$$

ここで, 境界条件を用いて右辺第 1 項目を見積もると

$$
\begin{aligned}
&\left[r^2\tilde{\phi}^*_{lm}\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dy}\right]_{r_i}^{r_o}\\
&= \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\alpha_{1,o}}{\alpha_{0,o}}r_o^2\left|\dfrac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|^2_{r=r_o} & (\alpha_{0,o}\neq 0)\\ -\dfrac{\alpha_{0,o}}{\alpha_{1,o}}r_o^2|\tilde{\phi}_{lm}|^2_{r=r_o} & (\alpha_{1,o}\neq 0)\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{0,i}}r_i^2\left|\dfrac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|^2_{r=r_i} & (\alpha_{0,i}\neq 0)\\ -\dfrac{\alpha_{0,i}}{\alpha_{1,i}}r_i^2|\tilde{\phi}_{lm}|^2_{r=r_i} & (\alpha_{1,i}\neq 0)\end{array}\right\}\\
&= -\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\alpha_{1,o}}{\alpha_{0,o}}r_o^2\left|\dfrac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|^2_{r=r_o} & (\alpha_{0,o}\neq 0)\\ \dfrac{\alpha_{0,o}}{\alpha_{1,o}}r_o^2|\tilde{\phi}_{lm}|^2_{r=r_o} & (\alpha_{1,o}\neq 0)\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\alpha_{1,i}}{\alpha_{0,i}}r_i^2\left|\dfrac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|^2_{r=r_i} & (\alpha_{0,i}\neq 0)\\ \dfrac{\alpha_{0,i}}{\alpha_{1,i}}r_i^2|\tilde{\phi}_{lm}|^2_{r=r_i} & (\alpha_{1,i}\neq 0)\end{array}\right\}\\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\sigma &\leq -\kappa\int_{r_i}^{r_o} r^2\left|\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|^2 dr - \kappa l(l+1)\int_{r_i}^{r_o}|\tilde{\phi}_{lm}|^2dr < -\kappa l(l+1)\int_{r_i}^{r_o}|\tilde{\phi}_{lm}|^2dr,\\
\sigma &< \frac{-\kappa l(l+1)\displaystyle\int_{r_i}^{r_o} r^2|\tilde{\phi}_{lm}|^2dr}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_o} r^2|\tilde{\phi}_{lm}|^2dr} < \frac{-\kappa l(l+1)\displaystyle\int_{r_i}^{r_o}|\tilde{\phi}_{lm}|^2dr}{r_i^2\displaystyle\int_{r_i}^{r_o}|\tilde{\phi}_{lm}|^2dr} = -\kappa\frac{l(l+1)}{r_i^2}.
\end{aligned}
$$

よって成長率の最大値が

$$\sigma < -\kappa\frac{l(l+1)}{r_i^2} \tag{10}$$

と見積もられる.

1.3　一般解

支配方程式を変形すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right) + \left[\frac{-\sigma}{\kappa} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\tilde{\phi}_{lm},$$

さらに動径座標を

$$\tilde{r} = \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}}r, \quad r = \sqrt{\frac{\kappa}{-\sigma}}\tilde{r}, \tag{11}$$

と変形すると,

$$\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{d\tilde{r}}\right) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2}\right]\tilde{\phi}_{lm},$$

この微分方程式は球ベッセルの微分方程式であり, その一般解は l 次の球ベッセル関数 $\mathcal{J}_l(\tilde{r}), \mathcal{N}_l(\tilde{r})$ の線形結合として表される.

$$\tilde{\phi}_{lm} = A_1 \mathcal{J}_l(\tilde{r}) + A_2 \mathcal{N}_l(\tilde{r}) = A_1 \mathcal{J}_l\left(\sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} r\right) + A_2 \mathcal{N}_l\left(\sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} r\right) \tag{12}$$

1.4　両端ディリクレ型境界条件の場合

両端での境界条件がディリクレ型の

$$\tilde{\phi}_{lm} = 0 \quad \text{at} \quad y = r_i, r_o \tag{13}$$

場合を考える. これを一般解 (12) に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_l(r_i\alpha) & \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_l(r_o\alpha) & \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{14}$$

ただし $\alpha = \sqrt{\dfrac{-\sigma}{\kappa}}$ とおいた. 係数行列の行列式が 0 であることから, 成長率を定める分散関係に相当する式が得られる.

$$\mathcal{J}_l(r_i\alpha) \cdot \mathcal{N}_l(r_o\alpha) - \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \cdot \mathcal{J}_l(r_o\alpha) = 0. \tag{15}$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる. [1] 係数 A_1, A_2 の組合せは, 求まった α を用いて

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} -\mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_l(r_i\alpha) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

[1] 球ベッセル関数の形は

$$\mathcal{J}_l(x) = a_l(x)\sin x + b_l(x)\cos x, \quad \mathcal{J}_l(x) = b_l(x)\sin x - a_l(x)\cos x, \tag{16}$$

と表される. ここで $a_l(x), b_l(x)$ は x の有理多項式である. この形を代入すると

$$\begin{aligned}
& [a_l(r_i\alpha)\sin(r_i\alpha) + b_l(r_i\alpha)\cos(r_i\alpha)][b_l(r_o\alpha)\sin(r_o\alpha) - a_l(r_o\alpha)\cos(r_o\alpha)] \\
& -[b_l(r_i\alpha)\sin(r_i\alpha) - a_l(r_i\alpha)\cos(r_i\alpha)][a_l(r_o\alpha)\sin(r_o\alpha) + b_l(r_o\alpha)\cos(r_o\alpha)] \\
= \;& a_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)\sin(r_i\alpha)\sin(r_o\alpha) - a_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)\sin(r_i\alpha)\cos(r_o\alpha) \\
& +b_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)\cos(r_i\alpha)\sin(r_o\alpha) - b_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)\cos(r_i\alpha)\cos(r_o\alpha) \\
& -b_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)\sin(r_i\alpha)\sin(r_o\alpha) - b_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)\sin(r_i\alpha)\cos(r_o\alpha) \\
& +a_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)\cos(r_i\alpha)\sin(r_o\alpha) + a_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)\cos(r_i\alpha)\cos(r_o\alpha) \\
= \;& a_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)[\sin(r_i\alpha)\sin(r_o\alpha) + \cos(r_i\alpha)\cos(r_o\alpha)] \\
& +a_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)[-\sin(r_i\alpha)\cos(r_o\alpha) + \cos(r_i\alpha)\sin(r_o\alpha)] \\
& +b_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)[\cos(r_i\alpha)\sin(r_o\alpha) - \sin(r_i\alpha)\cos(r_o\alpha)] \\
& +b_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)[-\cos(r_i\alpha)\cos(r_o\alpha) - \sin(r_i\alpha)\sin(r_o\alpha)] \\
= \;& a_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)\cos[(r_o - r_i\alpha)] + a_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)\sin[(r_o - r_i)\alpha)] \\
& +b_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)\sin[(r_o - r_i)\alpha)] - b_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)\cos[(r_o - r_i\alpha)] \\
= \;& [a_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha) - b_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)]\cos[(r_o - r_i)\alpha)] \\
& +[a_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha) + b_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)]\sin[(r_o - r_i)\alpha] \\
= \;& \sin[(r_o - r_i)\alpha + \theta_l] = 0,
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
\sin\theta_l &= \frac{a_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha) - b_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)}{\sqrt{[a_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha) - b_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)]^2 + [a_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha) + b_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)]^2}}, \\
\cos\theta &= \frac{a_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha) + b_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)}{\sqrt{[a_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha) - b_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha)]^2 + [a_l(r_i\alpha)a_l(r_o\alpha) + b_l(r_i\alpha)b_l(r_o\alpha)]^2}},
\end{aligned}$$

したがって θ が α に対してそれほど急激に変化しないならば, この式の形は $\sin[(r_o - r_i)\alpha$ によってだいたいさだまるだろう. したがって

$$\begin{aligned}
& (r_o - r_i)\alpha + \theta_l = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots, \\
& \text{i.e.} \quad \alpha = \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} = \frac{n\pi - \theta_l}{r_o - r_i}, \quad \sigma = -\kappa\left(\frac{n\pi - \theta_l}{r_o - r_i}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{17}$$

特に $l = 0$ の場合, $a_0(x) = 1/x, b_0 = 0$ であるから

$$\sin\theta_0 = 0, \quad \cos\theta_0 = 1 \quad \text{i.e.} \quad \theta_0 = 0,$$

となるので

$$\alpha = \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} = \frac{n\pi}{r_o - r_i}, \quad \sigma = -\kappa\left(\frac{n\pi}{r_o - r_i}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

1.5　両端ノイマン型境界条件の場合

両端での境界条件がノイマン型の

$$\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} = 0 \quad \text{at} \quad y = r_i, r_o \tag{20}$$

場合を考える. これを一般解 (12) に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha) & \alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) \\ \alpha\mathcal{J}_l'(r_o\alpha) & \alpha\mathcal{N}_l'(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{21}$$

ただし $\alpha = \sqrt{\dfrac{-\sigma}{\kappa}}$ とおいた. 係数行列の行列式が 0 であることから, 成長率を定める分散関係に相当する式が得られる.

$$\alpha^2[\mathcal{J}_l'(r_i\alpha)\cdot\mathcal{N}_l'(r_o\alpha) - \mathcal{N}_l'(r_i\alpha)\cdot\mathcal{J}_l'(r_o\alpha)] = 0. \tag{22}$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる.

係数 A_1, A_2 の組合せは, 求まった α を用いて

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} -\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_l'(r_i\alpha) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

1.6　外側ディリクレ内側ノイマン型境界条件の場合

外側でディリクレ型, 内側がノイマン型の境界条件の場合,

$$\tilde{\phi}_{lm} = 0 \quad \text{at} \quad y = r_o, \quad \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} = 0 \quad \text{at} \quad y = r_i, \tag{24}$$

を考える. これを一般解 (12) に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha) & \alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_l(r_o\alpha) & \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{25}$$

ただし $\alpha = \sqrt{\dfrac{-\sigma}{\kappa}}$ とおいた. 係数行列の行列式が 0 であることから, 成長率を定める分散関係に相当する式が得られる.

$$\alpha[\mathcal{J}_l'(r_i\alpha)\cdot\mathcal{N}_l(r_o\alpha) - \mathcal{N}_l'(r_i\alpha)\cdot\mathcal{J}_l(r_o\alpha)] = 0. \tag{26}$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる.

係数 A_1, A_2 の組合せは, 求まった α を用いて

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} -\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_l'(r_i\alpha) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

1.7　外側ノイマン内側ディリクレ型境界条件の場合

外側でノイマン型, 内側がディリクレ型の境界条件の場合,

$$\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} = 0 \quad \text{at} \quad y = r_o, \quad \tilde{\phi}_{lm} = 0 \quad \text{at} \quad y = r_i \tag{28}$$

を考える. これを一般解 (12) に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_l(r_i\alpha) & \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \alpha\mathcal{J}_l'(r_o\alpha) & \alpha\mathcal{N}_l'(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{29}$$

ただし $\alpha = \sqrt{\dfrac{-\sigma}{\kappa}}$ とおいた. 係数行列の行列式が 0 であることから, 成長率を定める分散関係に相当する式が得られる.

$$\alpha[\mathcal{J}_l(r_i\alpha) \cdot \mathcal{N}_l'(r_o\alpha) - \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \cdot \mathcal{J}_l'(r_o\alpha)] = 0. \tag{30}$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる.

係数 A_1, A_2 の組合せは, 求まった α を用いて

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} -\mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_l(r_i\alpha) \end{pmatrix}. \tag{31}$$

1.8　領域外部の境界領域でラプラス方程式に従う場合

有限の熱伝導率を持つ物質で球殻内外領域が満たされている場合の熱拡散問題, あるいはポロイダル磁場の拡散の問題の場合には球殻領域の拡散方程式を次のような混合型の境界条件の下で解くことになる[2].

$$\left.\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|_{r_o} + \frac{(l+1)}{r_o}\tilde{\phi}_{lm}|_{r_o} = 0, \quad \left.\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|_{r_o} - \frac{l}{r_i}\tilde{\phi}_{lm}|_{r_o} = 0. \tag{32}$$

[2]領域外部の支配方程式は

$$\nabla^2\phi = 0,$$

これを一般解 (12) に代入して整理すると,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_l'(r_i\alpha) - l/r_i\mathcal{J}_l(r_i\alpha) & \mathcal{N}_l'(r_i\alpha) - l/r_i\mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_l'(r_o\alpha) + (l+1)/r_o\mathcal{J}_l(r_o\alpha) & \mathcal{N}_l'(r_o\alpha) + (l+1)/r_o\mathcal{N}_l(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{33}$$

ここで球ベッセル関数の性質

$$\mathcal{J}_l'(x) = \frac{l}{x}\mathcal{J}_l(x) - \mathcal{J}_{l+1}(x) = \mathcal{J}_{l-1}(x) - \frac{l+1}{x}\mathcal{J}_l(x),$$
$$\mathcal{N}_l'(x) = \frac{l}{x}\mathcal{N}_l(x) - \mathcal{N}_{l+1}(x) = \mathcal{N}_{l-1}(x) - \frac{l+1}{x}\mathcal{N}_l(x)$$

を適用すると,

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{J}_{l+1}(r_i\alpha) & -\mathcal{N}_{l+1}(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_{l-1}(r_o\alpha) & \mathcal{N}_{l-1}(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{34}$$

係数行列の行列式が 0 であることから, 成長率を定める分散関係に相当する式が得られる.

$$\mathcal{J}_{l+1}(r_i\alpha)\cdot\mathcal{N}_{l-1}(r_o\alpha) - \mathcal{N}_{l+1}(r_i\alpha)\cdot\mathcal{J}_{l-1}(r_o\alpha) = 0. \tag{35}$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる.

緯度経度に関して球面調和関数変換すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\tilde{\phi}_{lm} = 0$$

この方程式の独立な 2 つの解は $r^{-(l+1)}, r^l$ である. それぞれ $r = 0, \infty$ で発散しない解を求めると

$$\tilde{\phi}_{lm} = C_1 r^{-(l+1)} \quad (r \geq r_o), \qquad \tilde{\phi}_{lm} = C_2 r^l \quad (r \leq r_i),$$

境界 $r = r_o$ で値と 1 階微分が連続であることから

$$\tilde{\phi}_{lm}|_{r=r_o} = C_1 r^{-(l+1)r_o}, \quad \left.\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|_{r_o} = -(l+1)C_1 r^{-(l+2)r_o}$$

これらより C_1 を消去すると $r = r_o$ での境界条件

$$\left.\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|_{r_o} + \frac{(l+1)}{r_o}\tilde{\phi}_{lm}|_{r_o} = 0,$$

が得られる. $r = r_i$ の場合も同様に計算すると,

$$\left.\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|_{r_o} - \frac{l}{r_i}\tilde{\phi}_{lm}|_{r_o} = 0.$$

2　非圧縮流体の粘性拡散解

半径 r_i, r_o の同心球面の間の 3 次元球殻領域での非圧縮流体の運動を考える. 非圧縮速度場はトロイダル・ポロイダルポテンシャルを用いて次のように表すことができる.

$$\boldsymbol{u} = \nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) + \nabla\times\nabla\times(\phi\boldsymbol{r}). \tag{36}$$

ストークス近似の下でこれらポテンシャルの従う方程式は[3]

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_2\psi) = \nu L_2\nabla^2\psi, \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_2\nabla^2\phi) = \nu L_2\nabla^2\nabla^2\phi, \tag{38}$$

ここで式中の演算子 L_2 は半径 1 の球面上の 2 次元ラプラシアンの逆符号のものであり,

$$\begin{aligned} L_2 &\equiv -r^2\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} \\ &= -\left[\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]. \end{aligned} \tag{39}$$

運動学的境界条件は, 内外球面にて法線方向の速度成分が 0 となることである. ポテンシャルで表現すれば,

$$\phi = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i, r_o \tag{40}$$

力学的境界条件が自由すべりの場合は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i, r_o \tag{41}$$

粘着条件の場合には,

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{at} \quad r = r_i, r_o$$

2.1　球面調和関数展開

緯度・経度方向には球面調和関数で展開して解くことができる. 以下, その 1 波数成分のみ取りだして扱う. 時間に関しても指数型の解を仮定し,

$$\psi(x,y,t) = \tilde{\psi}_{lm}(r)Y_{lm}(\lambda,\varphi)e^{\sigma t}, \quad \phi(x,y,t) = \tilde{\phi}_{lm}(r)Y_{lm}(\lambda,\varphi)e^{\sigma t} \tag{42}$$

[3]方程式の導出に関しては '3 次元回転球殻内での粘性流体 (非圧縮ナビエーストークス方程式) の定式化' を参照されたい.

これを支配方程式に代入すると,

$$\sigma l(l+1)\tilde{\psi}_{lm} = \nu l(l+1)\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\psi}_{lm}}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\tilde{\psi}_{lm}\right],$$

$$\sigma l(l+1)\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\tilde{\phi}_{lm} = \nu l(l+1)\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]^2\tilde{\phi}_{lm}$$

したがって $l \neq 0$ のモードに対して

$$\sigma\tilde{\psi}_{lm} = \nu\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\psi}_{lm}}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\tilde{\psi}_{lm}\right], \tag{43}$$

$$\sigma\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\tilde{\phi}_{lm} = \nu\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]^2\tilde{\phi}_{lm}. \tag{44}$$

境界条件は自由すべりの場合, 力学的境界条件が

$$\tilde{\phi}_{lm} = \frac{d^2\tilde{\phi}_{lm}}{dr^2} = 0, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{\tilde{\psi}_{lm}}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i, r_o \tag{45}$$

粘着条件の場合には,

$$\tilde{\phi}_{lm} = \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} = 0, \quad \tilde{\psi}_{lm} = 0 \quad \text{at} \quad r = r_i, r_o$$

2.2　最大成長率の見積もり

境界条件が粘着条件の場合には, 最大成長率が負となることを支配方程式を全積分することで求められる. トロイダルポテンシャルに関しては, 拡散方程式の両端ディリクレ境界条件の場合と同じであるから最大成長率が

$$\sigma < -\nu\frac{l(l+1)}{r_i^2} \tag{46}$$

と評価される.

ポロイダルポテンシャルについては, 演算子 $\mathcal{D}_l$ を

$$\mathcal{D}_l \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

と定義すると, 任意の 2 つの関数 $f(r), g(r)$ に対して

$$\int_{r_i}^{r_o} f(r)\mathcal{D}_l g(r) r^2 dr \;=\; \int_{r_i}^{r_o} f\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] g r^2 dr$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{r_i}^{r_o} f\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg}{dr}\right) - \int_{r_i}^{r_o} l(l+1)fgdr \\
&= \left[fr^2\frac{dg}{dr}\right]_{r_i}^{r_o} - \int_{r_i}^{r_o}\frac{df}{dr}\left(r^2\frac{dg}{dr}\right)dr - \int_{r_i}^{r_o} l(l+1)fgdr \\
&= \left[fr^2\frac{dg}{dr}\right]_{r_i}^{r_o} - \left[r^2\frac{df}{dr}g\right]_{r_i}^{r_o} + \int_{r_i}^{r_o} g\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) - \int_{r_i}^{r_o} l(l+1)fgdr \\
&= \left[fr^2\frac{dg}{dr}\right]_{r_i}^{r_o} - \left[r^2\frac{df}{dr}g\right]_{r_i}^{r_o} + \int_{r_i}^{r_o} g(r)\mathcal{D}_l f(r)r^2dr
\end{aligned}
$$

$f = \psi^*_{lm}(r), g = \mathcal{D}_l\psi_{lm}(r)$ と選ぶと境界条件 (46) を用いて

$$
\begin{aligned}
\int_{r_i}^{r_o}\psi^*_{lm}(r)\mathcal{D}_l\mathcal{D}_l\psi_{lm}(r)r^2dr &= \left[\psi^*_{lm}r^2\frac{d\mathcal{D}_l\psi_{lm}}{dr}\right]_{r_i}^{r_o} - \left[r^2\frac{d\psi^*_{lm}}{dr}\mathcal{D}_l\psi_{lm}\right]_{r_i}^{r_o} + \int_{r_i}^{r_o}\mathcal{D}_l\psi^*_{lm}\mathcal{D}_l\psi_{lm}r^2dr \\
&= \int_{r_i}^{r_o}|\mathcal{D}_l\psi_{lm}|^2r^2dr
\end{aligned}
$$

ポロイダルポテンシャルの式 (44) に $\phi^*_{lm}r^2$ をかけて積分すると

$$
\sigma\int_{r_i}^{r_o}\tilde{\phi}^*_{lm}\mathcal{D}_l\tilde{\phi}_{lm}r^2dr = \nu\int_{r_i}^{r_o}\tilde{\phi}^*_{lm}\mathcal{D}_l\mathcal{D}_l\tilde{\phi}_{lm}r^2dr,
$$

左辺は拡散方程式の右辺の式変形と同様に計算できて,

$$
\sigma\int_{r_i}^{r_o}\tilde{\phi}^*_{lm}\mathcal{D}_l\tilde{\phi}_{lm}r^2dr = -\sigma\int_{r_i}^{r_o}\left[r^2\left|\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|^2 + l(l+1)\int_{r_i}^{r_o}|\tilde{\phi}_{lm}|^2\right]dr
$$

であるから,

$$
-\sigma\int_{r_i}^{r_o}\left[r^2\left|\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|^2 + l(l+1)|\tilde{\phi}_{lm}|^2\right]dr = \nu\int_{r_i}^{r_o}|\mathcal{D}_l\psi_{lm}|^2r^2dr,
$$

よって

$$
\sigma = -\nu\frac{\displaystyle\int_{r_i}^{r_o}|\mathcal{D}_l\psi_{lm}|^2r^2dr}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_o}\left[r^2\left|\frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr}\right|^2 + l(l+1)|\tilde{\phi}_{lm}|^2\right]dr}.
$$

2.3　一般解

拡散方程式の場合と同様に支配方程式を変形すると

$$
\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\psi}_{lm}}{dr}\right) + \left[\frac{-\sigma}{\kappa} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\tilde{\psi}_{lm},
$$

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\psi}_{lm}}{dr}\right)+\left[\frac{-\sigma}{\kappa}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\right\}\tilde{\psi}_{lm},$$

成長率 $\sigma<0$ に対してのこれらの一般解は

$$\tilde{\psi}_{lm}=A_1\mathcal{J}_l\left(\sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}}r\right)+A_2\mathcal{N}_l\left(\sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}}r\right), \tag{47}$$

$$\tilde{\phi}_{lm}=B_1r^l+B_2r^{-(l+1)}+B_3\mathcal{J}_l\left(\sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}}r\right)+B_4\mathcal{N}_l\left(\sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}}r\right). \tag{48}$$

2.4　両端粘着条件の場合のトロイダルポテンシャル

この場合は拡散方程式での両端ディリクレ問題と同じである.

2.5　両端自由すべり条件の場合のトロイダルポテンシャル

この場合の境界条件 (45) を書き換えると

$$\frac{d\tilde{\psi}_{lm}}{dr}-\frac{\tilde{\psi}_{lm}}{r}=0,\quad \text{at}\quad r=r_i,r_o.$$

これに (47) を代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha)-\mathcal{J}_l(r_i\alpha)/r_i & \alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha)-\mathcal{N}_l(r_i\alpha)/r_i \\ \alpha\mathcal{J}_l'(r_o\alpha)-\mathcal{J}_l(r_o\alpha)/r_o & \alpha\mathcal{N}_l'(r_o\alpha)-\mathcal{N}_l(r_o\alpha)/r_o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=0, \tag{49}$$

左辺の係数行列式が 0 なる条件が固有値 α を定める分散関係となる.

$$\begin{aligned}&[\alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha)-\mathcal{J}_l(r_i\alpha)/r_i][\alpha\mathcal{N}_l'(r_o\alpha)-\mathcal{N}_l(r_o\alpha)/r_o]\\&-[\alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha)-\mathcal{N}_l(r_i\alpha)/r_i][\alpha\mathcal{J}_l'(r_o\alpha)-\mathcal{J}_l(r_o\alpha)/r_o]=0.\end{aligned}$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma=-\nu\alpha^2$ が定められる.

係数 A_1,A_2 の組合せは, 求まった α を用いて

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\text{const}\cdot\begin{pmatrix} -[\alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha)-\mathcal{N}_l(r_i\alpha)/r_i] \\ \alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha)-\mathcal{J}_l(r_i\alpha)/r_i \end{pmatrix}. \tag{50}$$

2.6　外側自由すべり内側粘着条件の場合のトロイダルポテンシャル

この場合の境界条件 (45) を書き換えると

$$\frac{d\tilde{\psi}_{lm}}{dr} - \frac{\tilde{\psi}_{lm}}{r} = 0, \quad \text{at} \quad r = r_o, \quad \tilde{\psi}_{lm} = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i.$$

これに (47) を代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_l(r_i\alpha) & \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \alpha\mathcal{J}_l'(r_o\alpha) - \mathcal{J}_l(r_o\alpha)/r_o & \alpha\mathcal{N}_l'(r_o\alpha) - \mathcal{N}_l(r_o\alpha)/r_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{51}$$

左辺の係数行列式が 0 なる条件が固有値 α を定める分散関係となる.

$$\mathcal{J}_l(r_i\alpha)\left[\alpha\mathcal{N}_l'(r_o\alpha) - \mathcal{N}_l(r_o\alpha)/r_o\right] - \mathcal{N}_l(r_i\alpha)\left[\alpha\mathcal{J}_l'(r_o\alpha) - \mathcal{J}_l(r_o\alpha)/r_o\right] = 0.$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる.

係数 A_1, A_2 の組合せは, 求まった α を用いて

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} -\mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \mathcal{J}_l(r_i\alpha) \end{pmatrix}. \tag{52}$$

2.7　外側粘着内側自由すべり条件の場合のトロイダルポテンシャル

この場合の境界条件 (45) を書き換えると

$$\tilde{\psi}_{lm} = 0, \quad \text{at} \quad r = r_o, \quad \frac{d\tilde{\psi}_{lm}}{dr} - \frac{\tilde{\psi}_{lm}}{r} = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i.$$

これに (47) を代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha) - \mathcal{J}_l(r_i\alpha)/r_i & \alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) - \mathcal{N}_l(r_i\alpha)/r_i \\ \mathcal{J}_l(r_o\alpha) & \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{53}$$

左辺の係数行列式が 0 なる条件が固有値 α を定める分散関係となる.

$$\left[\alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha) - \mathcal{J}_l(r_i\alpha)/r_o\right]\mathcal{N}_l(r_o\alpha) - \left[\alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) - \mathcal{N}_l(r_i\alpha)/r_o\right]\mathcal{J}_l(r_o\alpha) = 0.$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる.

係数 A_1, A_2 の組合せは, 求まった α を用いて

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} -\mathcal{N}_l(r_o\alpha) \\ \mathcal{J}_l(r_o\alpha) \end{pmatrix}. \tag{54}$$

2.8　両端粘着条件の場合のポロイダルポテンシャル

この場合の境界条件は (45) より

$$\tilde{\phi}_{lm} = \frac{d\tilde{\phi}_{lm}}{dr} = 0, \quad \text{at} \quad r = r_o, r_i.$$

一般解 (48) をこれに代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} r_i^l & r_i^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_i\alpha) & \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ r_o^l & r_o^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_o\alpha) & \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \\ lr_i^{l-1} & -(l+1)r_i^{-(l+2)} & \alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha) & \alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) \\ lr_o^{l-1} & -(l+1)r_o^{-(l+2)} & \alpha\mathcal{J}_l'(r_o\alpha) & \alpha\mathcal{N}_l'(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0, \tag{55}$$

左辺の係数行列式が 0 なる条件が固有値 α を定める分散関係となる.

$$\begin{vmatrix} r_i^l & r_i^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_i\alpha) & \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ r_o^l & r_o^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_o\alpha) & \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \\ lr_i^{l-1} & -(l+1)r_i^{-(l+2)} & \alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha) & \alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) \\ lr_o^{l-1} & -(l+1)r_o^{-(l+2)} & \alpha\mathcal{J}_l'(r_o\alpha) & \alpha\mathcal{N}_l'(r_o\alpha) \end{vmatrix} = 0. \tag{56}$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる.

係数 B_1, B_2, B_3, B_4 の組合せは, 求まった α を用いて先の連立方程式にたとえば $B_4 = -1$ を代入して整理した

$$\begin{pmatrix} r_i^l & r_i^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_i\alpha) \\ r_o^l & r_o^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_o\alpha) \\ lr_i^{l-1} & -(l+1)r_i^{-(l+2)} & \alpha\mathcal{J}_l'(r_i\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \\ \alpha\mathcal{N}_l'(r_i\alpha) \end{pmatrix} \tag{57}$$

を解くことで定められる.

2.9　両端自由すべり条件の場合のポロイダルポテンシャル

この場合の境界条件は (45) より

$$\tilde{\phi}_{lm} = \frac{d^2\tilde{\phi}_{lm}}{dr^2} = 0, \quad \text{at} \quad r = r_o, r_i.$$

これに一般解 (48) を代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} r_i^l & r_i^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_i\alpha) & \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ r_o^l & r_o^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_o\alpha) & \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \\ l(l-1)r_i^{l-2} & (l+1)(l+2)r_i^{-(l+3)} & \alpha^2\mathcal{J}_l''(r_i\alpha) & \alpha^2\mathcal{N}_l''(r_i\alpha) \\ l(l-1)r_o^{l-2} & -(l+1)(l+2)r_o^{-(l+3)} & \alpha^2\mathcal{J}_l''(r_o\alpha) & \alpha^2\mathcal{N}_l''(r_o\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0, \tag{58}$$

左辺の係数行列式が 0 なる条件が固有値 α を定める分散関係となる. [4]

$$\begin{vmatrix} r_i^l & r_i^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_i\alpha) & \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ r_o^l & r_o^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_o\alpha) & \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \\ l(l-1)r_i^{l-2} & (l+1)(l+2)r_i^{-(l+3)} & \alpha^2\mathcal{J}_l''(r_i\alpha) & \alpha^2\mathcal{N}_l''(r_i\alpha) \\ l(l-1)r_o^{l-2} & -(l+1)(l+2)r_o^{-(l+3)} & \alpha^2\mathcal{J}_l''(r_o\alpha) & \alpha^2\mathcal{N}_l''(r_o\alpha) \end{vmatrix} = 0. \tag{59}$$

この分散関係から動径波数 α と成長率 $\sigma = -\nu\alpha^2$ が定められる.

係数 B_1, B_2, B_3, B_4 の組合せは, 求まった α を用いて先の連立方程式にたとえば $B_4 = -1$ を代入して整理した

$$\begin{pmatrix} r_i^l & r_i^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_i\alpha) \\ r_o^l & r_o^{-(l+1)} & \mathcal{J}_l(r_o\alpha) \\ l(l-1)r_i^{l-2} & (l+1)(l+2)r_i^{-(l+3)} & \alpha^2\mathcal{J}_l''(r_i\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_l(r_i\alpha) \\ \mathcal{N}_l(r_o\alpha) \\ \alpha^2\mathcal{N}_l''(r_i\alpha) \end{pmatrix} \tag{60}$$

を解くことで定められる.

[4]球ベッセル函数の 2 階微分は球ベッセルの満たす微分方程式から

$$\mathcal{J}'' = -\frac{2}{r}\mathcal{J}' - \left[1 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\mathcal{J}, \quad \mathcal{N}'' = -\frac{2}{r}\mathcal{N}' - \left[1 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\mathcal{N}$$

と計算される.