

マントル対流シミュレーション手法に関する補足情報

亀山 真典

平成 22 年 8 月 21 日

基礎方程式系 (無次元、非弾性近似)

> 基礎方程式系

- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

以下、 \sim で無次元化された量を示す

□ 運動方程式 (Navier-Stokes 方程式 + 連続の式)

$$0 = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} - Ra\tilde{T}\tilde{\boldsymbol{g}}, \quad \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}}) = 0$$

□ 粘性流体の構成方程式

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\tau}} &= 2\tilde{\eta} \left[\dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}})\boldsymbol{I} \right] \\ &= \tilde{\eta} \left[\tilde{\nabla} \otimes \tilde{\boldsymbol{v}} + \tilde{\boldsymbol{v}} \otimes \tilde{\nabla} - \frac{2}{3} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}) \boldsymbol{I} \right] \end{aligned}$$

ただし、 $Ra \equiv \frac{\alpha\Delta Tgd^3}{\eta\kappa}$: Rayleigh 数

基礎方程式系 (無次元、非弾性近似)

> 基礎方程式系

- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

□ 熱輸送方程式

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = - \underbrace{\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \tilde{T} - \tilde{k} \tilde{\nabla} \tilde{T})}_{\text{移流+拡散}} + \underbrace{Di \tilde{\alpha} \tilde{T} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{g}})}_{\text{静水圧下での断熱温度変化}} + \underbrace{\frac{\rho H d^2}{k \Delta T}}_{\text{内部発熱}} + \underbrace{\frac{Di}{Ra} \tilde{\eta} \left[2(\dot{\tilde{\epsilon}}_{II})^2 - \frac{2}{3} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}})^2 \right]}_{\text{粘性散逸}}$$

ただし、 $Di \equiv \frac{\alpha g d}{C_p}$: 散逸数 (運動から熱への変換効率に相当)

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{II} = \sqrt{\dot{\tilde{\epsilon}}_{11}^2 + \dot{\tilde{\epsilon}}_{22}^2 + \dot{\tilde{\epsilon}}_{33}^2 + 2\dot{\tilde{\epsilon}}_{12}^2 + 2\dot{\tilde{\epsilon}}_{23}^2 + 2\dot{\tilde{\epsilon}}_{13}^2}$$

: 歪速度テンソルの第2不変量

格子分割と変数配置

> 基礎方程式系

> 格子分割と変数配置

> 格子分割と座標系の設定

> 球座標系での基礎方程式

> SIMPLE 系解法

> ベキ乗法

> 1次元定常移流-拡散方程式の解

> 各種「上流化」法

> Gershgorin の定理

> 行列演算からみた CFL 条件

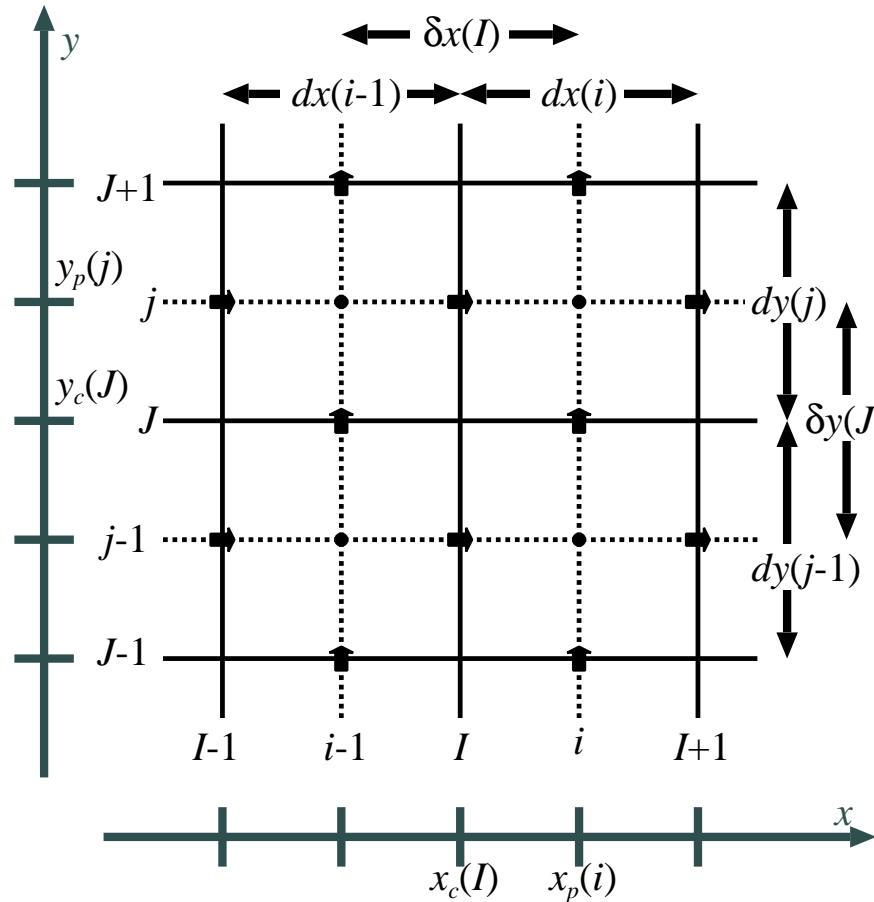
> Gershgorin の定理による CFL

> 格子界面での熱伝導率

> 格子界面での剪断粘性率

> 参考文献

Staggered grid に基づく有限体積法



解くべき変数のうち、

□ 点 (i, j) でスカラー量
(温度、圧力、 \dots)

□ 点 (I, j) で x 方向流速

□ 点 (i, J) で y 方向流速

を定義する。

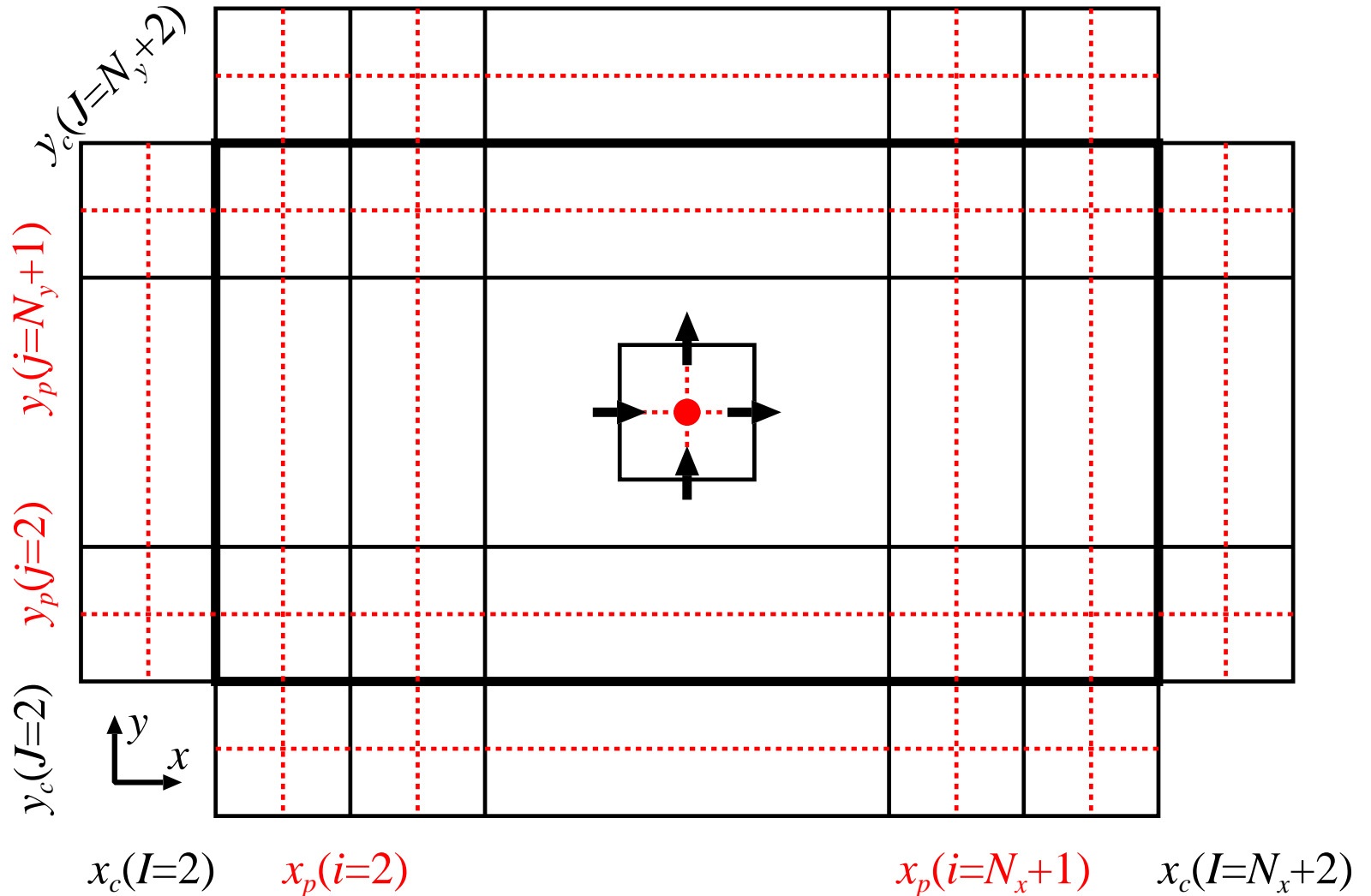
点 (i, j) は有限体積の中心にとる。このため

$$\delta x_{(I)} = \frac{dx_{(i-1)} + dx_{(i)}}{2} \text{ のようにとっている。}$$

格子分割と座標系の設定

(3次元の場合も同様)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > べき乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献



球座標系での基礎方程式系 (1)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

有限体積法に則って離散化をしたいので、基礎方程式はなるべく保存形で書くようにする。

熱輸送方程式をあらわに書くと以下の通り。

$$f_r = v_r T - \kappa \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$f_\theta = v_\theta T - \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$f_\phi = v_\phi T - \kappa \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + q$$

ただし簡単のため、Boussinesq 近似 (断熱温度変化なし、粘性散逸なし) を仮定してある。

球座標系での基礎方程式系 (2)

歪速度テンソルの対角成分をあらわに書くと以下の通り。

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\ \dot{\epsilon}_{\phi\phi} &= \frac{v_r}{r} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\end{aligned}$$

粗い空間解像度 (多重格子法で登場する) であっても
 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \dot{\epsilon}_{\phi\phi}$ を厳密に満たすよう工夫している。

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

球座標系での基礎方程式系 (3)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

歪速度テンソルの非対角成分をあらわに書くと以下の通り。

$$2\dot{\epsilon}_{r\theta} = 2\dot{\epsilon}_{\theta r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

$$2\dot{\epsilon}_{r\phi} = 2\dot{\epsilon}_{\phi r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi}$$

$$2\dot{\epsilon}_{\theta\phi} = 2\dot{\epsilon}_{\phi\theta} = \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}$$

これらと粘性率の積をとれば、応力テンソルの9成分の表式を得る。

球座標系での基礎方程式系 (4)

各方向の運動方程式をあらわに書くと以下の通り。

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

$$\begin{aligned} -b_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\theta r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\theta r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi})] - \frac{\partial}{\partial r} (\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}) \right\} \\ -b_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\theta\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} - \frac{\cot \theta \tau_{\phi\phi}}{r} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\theta\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \phi} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\theta r}) - \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\phi\phi}) - \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right] \\ -b_\phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\theta\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{\phi r}}{r} + \frac{\cot \theta \tau_{\phi\theta}}{r} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\theta\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\phi r}) - \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tau_{\phi\theta}) - \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

SIMPLE 系解法 (Patankar, 1980)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式

> SIMPLE 系解法

- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

有限体積法ベースのものではまだまだ一般的。

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -G_1 & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ -G_2 & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ -G_3 & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

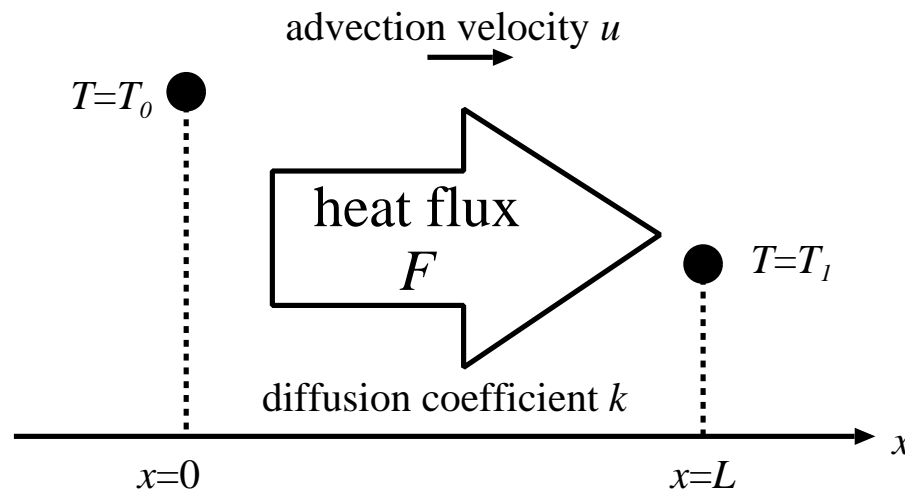
1. 圧力場の推定値 p^* を用意する。
2. p^* に対応する速度場 v_1^* 、 v_2^* 、 v_3^* を以下より求める。
 $C_{kk}v_k^* = G_k p^* - b_k \dots (k = 1, 2, 3)$
3. 以下の方程式により、圧力の補正量 p' を求める。
$$\begin{bmatrix} D_1(\text{diag}C_{11})^{-1}G_1 \\ + D_2(\text{diag}C_{22})^{-1}G_2 \\ + D_3(\text{diag}C_{33})^{-1}G_3 \end{bmatrix} p' = - \begin{bmatrix} D_1v_1^* \\ + D_2v_2^* \\ + D_3v_3^* \end{bmatrix}$$
4. 速度の補正量 v_1' 、 v_2' 、 v_3' を以下より求める。
 $v_k' = (\text{diag}C_{kk})^{-1}G_k p' (k = 1, 2, 3)$

べき乗法 (Patankar, 1980)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > **べき乗法**
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

数値的安定性のための移流-拡散流束の「上流化」の一種

- ある点でのある方向の熱流束 F を、その両側の温度 T_0 と T_1 を用いた適切な内挿により求める
- 各点での各方向の熱流束 F を、**そこでの1次元定常熱流束と(なるべく)一致させるように定める**



$$0 = \frac{d}{dx} \left(uT - \kappa \frac{dT}{dx} \right)$$

境界条件:

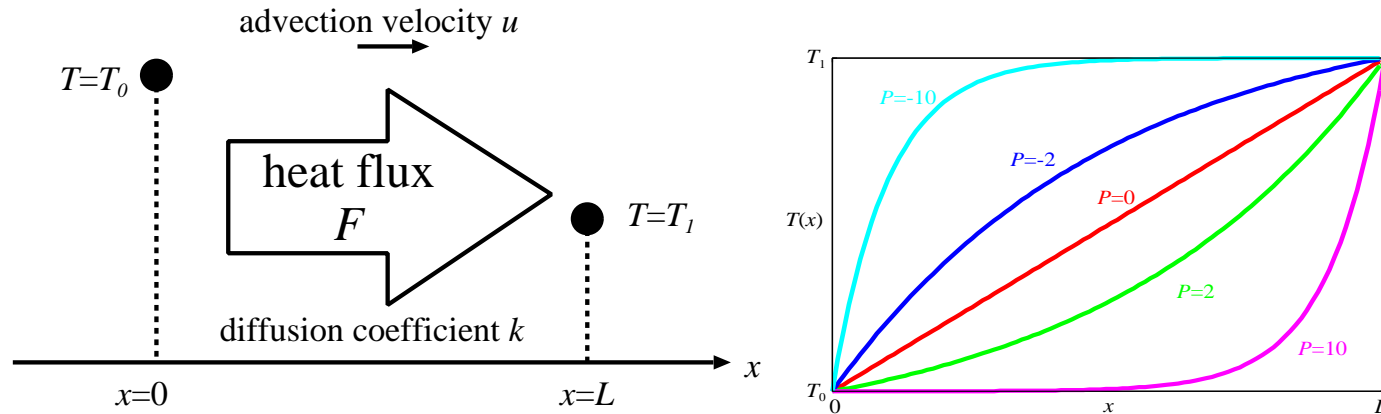
$$T = T_0 \text{ at } x = 0$$

$$T = T_1 \text{ at } x = L$$

1次元定常移流-拡散方程式の解

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > べき乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解

- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献



$0 \leq x \leq L$ での定常温度分布は

$$T(x) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{e^{P(x/L)} - 1}{e^P - 1} \quad (\text{右図})$$

と表わされる。ただし、 $P \equiv \frac{uL}{\kappa}$ は cell Péclet 数、 $D \equiv \frac{\kappa}{L}$ はコンダクタンスと呼ばれる。

これより熱流束 $F \equiv uT - \kappa \frac{dT}{dx}$ は

$$F = u \frac{e^P T_0 - T_1}{e^P - 1} = D \left[\frac{Pe^P}{e^P - 1} T_0 - \frac{P}{e^P - 1} T_1 \right]$$

各種「上流化」法 (1)

熱流束の表式として $F = D[B_{(P)}T_0 - A_{(P)}T_1]$ を採用すると、各種「上流化」法は以下のようにまとめられる。

スキーム	$A_{(P)}$	$B_{(P)}$ ($= A_{(P)} + P$)
厳密解 (指数法)	$\frac{P}{e^P - 1}$	$\frac{P e^P}{e^P - 1}$
中心差分	$1 - \frac{1}{2}P$	$1 + \frac{1}{2}P$
1 次の風上差分	$1 + \max(0, -P)$	$1 + \max(0, P)$
ハイブリッド法	$\max[0, (1 - 0.5 P)]$ $+ \max(0, -P)$	$(A_{(P)} + P)$
べき乗法	$\max[0, (1 - 0.1 P)^5]$ $+ \max(0, -P)$	$(A_{(P)} + P)$

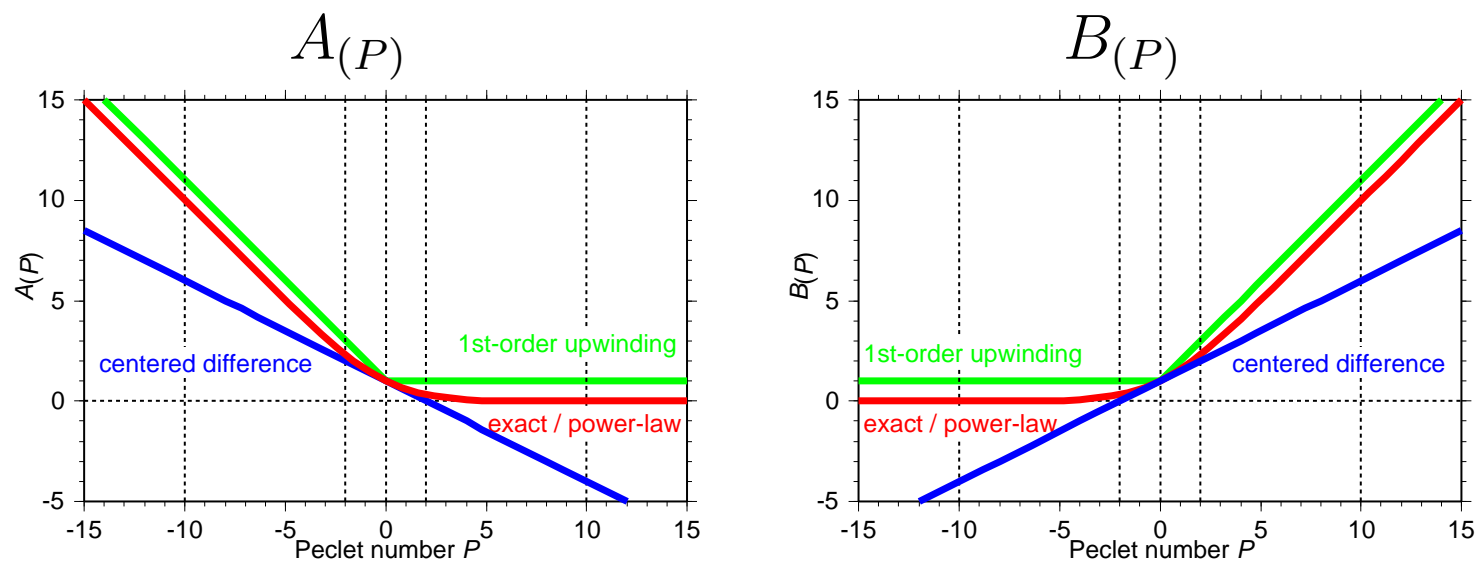
ただし熱流束 F が温度 T_0 と T_1 の「内挿」で決まるようにするには、 $A_{(P)}$ 、 $B_{(P)}$ は共に非負であってほしい。

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > べき乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

各種「上流化」法 (2)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

熱流束の表式として $F = D[B_{(P)}T_0 - A_{(P)}T_1]$ を採用すると、各種「上流化」法は以下のようにまとめられる。



ただし熱流束 F が温度 T_0 と T_1 の「内挿」で決まるようにするには、 $A_{(P)}$ 、 $B_{(P)}$ は共に非負であってほしい。

- 上流化をかけない中心差分では $|P| < 2$ でのみ OK
- 上流化をかけることにより、大きな P でも (一応) OK

Gershgorin の定理

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

中心が a_{ii} 、半径が $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ の円で囲まれた複素平面内の領域を S_i とする。このとき行列 $A = (a_{ij})$ の全ての固有値 λ_k は和集合 $\bigcup_{i=1}^n S_i = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ の内部に存在する。

証明: 行列 A の固有値 λ_k に対応する固有ベクトルを x とする。 x の成分のうちで絶対値が最大のものを x_i とすると、全ての $j \neq i$ に対して当然 $|x_i| \geq |x_j|$ を満たす。このとき、固有方程式 $Ax = \lambda_k x$ の第 i 行に注目すると、

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = \lambda_k x_i$$

これをさらに書き直すと、

$$|a_{ii} - \lambda_k| = \left| - \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} \left| a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

を得る。即ち、 λ_k を含む領域 S_i が必ず存在する。

行列演算からみた CFL 条件 (1)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > べき乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

係数一定の時間発展方程式 (拡散方程式とか) を離散化して得られる方程式は形式的に

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = d - Cx^n$$

と書ける。ただし、空間離散化を表わす行列 C は正則な疎行列とし、時間 t の方向には陽的な離散化を用いることにする。

これを書き直すと、

$$x^{n+1} - C^{-1}d = (I - \Delta t C)(x^n - C^{-1}d)$$

を得る。即ち、このスキームでは定常解 $C^{-1}d$ との差が反復の度に $(I - \Delta t C)$ 倍に「縮小」されていくことになる。

行列演算からみた CFL 条件 (2)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

時間方向に陽的な離散化を行って得られたスキーム

$$\mathbf{x}^{n+1} - C^{-1}d = (I - \Delta t C)(\mathbf{x}^n - C^{-1}d)$$

このスキームが収束するための必要十分条件は、行列 $I - \Delta t C$ のベキが 0 に収束すること、言い換えれば行列 $I - \Delta t C$ のスペクトル半径 (絶対値最大の固有値) が 1 より小さいことである。

さらに振動解の発生を抑えるために、行列 $I - \Delta t C$ の固有値 (の実部) が非負でなければならない。

ちなみに、時間方向に完全に陰的に離散化した場合には

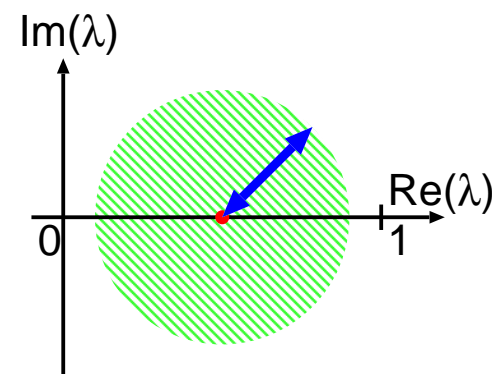
$$\frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta t} = d - C\mathbf{x}^{n+1}, \quad \mathbf{x}^{n+1} - C^{-1}d = (I + \Delta t C)^{-1}(\mathbf{x}^n - C^{-1}d)$$

Gershgorin の定理による CFL (1)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > べき乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

反復の際に現われる実行列 $I - \Delta t C$ の全ての固有値 λ が $0 < \lambda < 1$ を満たすようにしたい。

そのために、Gershgorin の円が右図のような位置にあるようにしたい。



具体例として、3次元熱輸送方程式を考える。

$$\frac{T_{(i,j,k)}^{\text{new}} - T_{(i,j,k)}}{\Delta t} = d_{(i,j,k)} - \begin{bmatrix} -c_1 T_{(i,j,k-1)} - c_2 T_{(i,j-1,k)} - c_3 T_{(i-1,j,k)} \\ + c_4 T_{(i,j,k)} \\ -c_5 T_{(i+1,j,k)} - c_6 T_{(i,j+1,k)} - c_7 T_{(i,j,k+1)} \end{bmatrix}$$

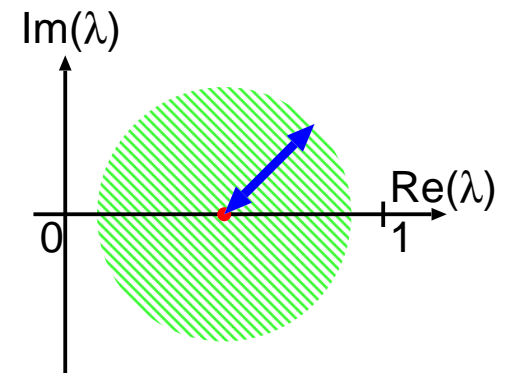
この場合、点 (i, j, k) に対応する Gershgorin の円は、
中心 $(1 - c_4(i,j,k)\Delta t, 0)$ の実軸上
半径 $\Delta t(c_1 + c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + c_7)_{(i,j,k)}$
で特徴づけられる。

Gershgorin の定理による CFL (2)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

Gershgorin の円が満たす条件は

1. 中心が実軸上 0 以上 1 未満
2. 左端が実軸上 0 以上
3. 右端が実軸上 1 未満



□ 条件 1 より $0 < 1 - c_4(i,j,k)\Delta t < 1$

□ 条件 2 より

$$0 < (1 - c_4(i,j,k)\Delta t) - \Delta t(c_1 + c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + c_7)(i,j,k)$$

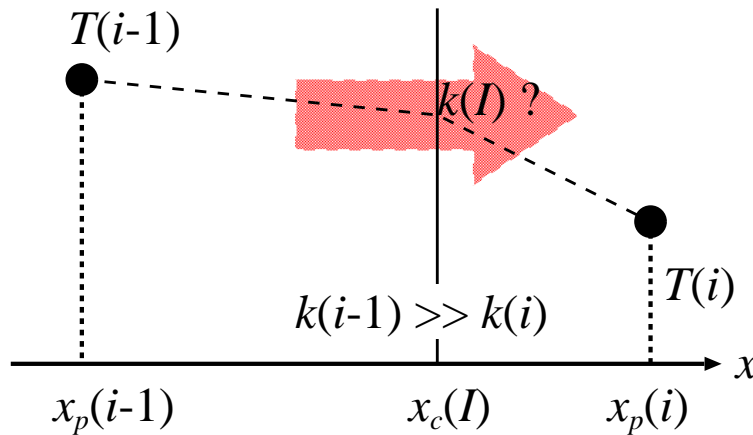
このうち、より厳しい条件をとると

$$(0 <) \Delta t < \frac{1}{(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7)(i,j,k)} \quad \text{を得る。}$$

ただし、Gershgorin の定理が示す固有値の存在範囲はかなり広いので、ここで求めた Δt の閾値も必要以上に厳しくなっていることに注意

格子界面での熱伝導率の設定 (Patankar, 1980)

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献



体積要素の境界面 $x_{c(I)}$ での熱流束が連続になるように、この点での熱伝導率 $k_{(I)}$ を定める。

ただし、各体積要素の内部では $k_{(i)}$ は一定であるとする。

$x = x_c(I)$ での温度を T_c とおく。熱流束の連続性より、

$$k_{(I)} \frac{T_{(i)} - T_{(i-1)}}{\delta x_{(I)}} = k_{(i-1)} \frac{T_c - T_{(i-1)}}{\frac{1}{2} dx_{(i-1)}} = k_{(i)} \frac{T_{(i)} - T_c}{\frac{1}{2} dx_{(i)}}$$

これを満たす $k_{(I)}$ は

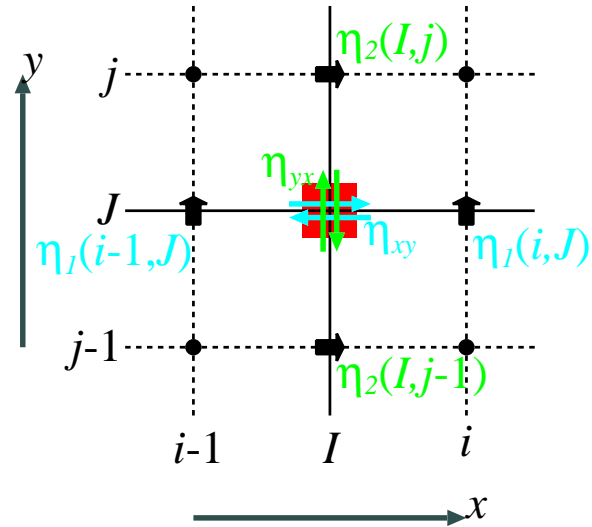
$$\frac{2\delta x_{(I)}}{k_{(I)}} = \frac{dx_{(i-1)}}{k_{(i-1)}} + \frac{dx_{(i)}}{k_{(i)}}$$

により与えられる。特に格子が等間隔 ($dx_{(i-1)} = dx_{(i)}$) の

場合には、 $k_{(I)} = \frac{2k_{(i-1)}k_{(i)}}{k_{(i-1)} + k_{(i)}}$ の如き調和平均となる。

格子界面での剪断粘性率の設定 (Ogawa et al., 1991)

熱伝導率の定義と同様、格子界面での剪断応力の連続性 (に相当するもの) を考える。



界面での熱伝導率の定義に倣い、

$$\begin{cases} \frac{2\delta y(J)}{2\delta x(I)} = \frac{dy_{(j-1)}}{dx_{(i-1)}} + \frac{dy_{(j)}}{dx_{(i)}} \\ \eta_1(i, J) = \eta_{(i, j-1)} + \eta_{(i, j)} \\ \eta_2(I, j) = \eta_{(i-1, j)} + \eta_{(i, j)} \end{cases}$$

で与えられる $\eta_1(i, J)$ 及び $\eta_2(I, j)$ を考える。

x 方向に作用する剪断応力 $\tau_{yx(I, J)}$ の計算に用いる粘性は

$$\eta_{yx(I, J)} \equiv \frac{\eta_1(i-1, J)dx_{(i-1)} + \eta_1(i, J)dx_{(i)}}{2\delta x(I)}$$

y 方向に作用する剪断応力 $\tau_{xy(I, J)}$ の計算に用いる粘性は

$$\eta_{xy(I, J)} \equiv \frac{\eta_2(I, j-1)dy_{(j-1)} + \eta_2(I, j)dy_{(j)}}{2\delta y(J)}$$

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率
- > 参考文献

- > 基礎方程式系
- > 格子分割と変数配置
- > 格子分割と座標系の設定
- > 球座標系での基礎方程式
- > SIMPLE 系解法
- > ベキ乗法
- > 1次元定常移流-拡散方程式の解
- > 各種「上流化」法
- > Gershgorin の定理
- > 行列演算からみた CFL 条件
- > Gershgorin の定理による CFL
- > 格子界面での熱伝導率
- > 格子界面での剪断粘性率

> 参考文献

- ❑ M. Kameyama, A. Kageyama, and T. Sato. Multigrid iterative algorithm using pseudo-compressibility for three-dimensional mantle convection with strongly variable viscosity. *J. Comput. Phys.*, 206, 162-181, 2005.
- ❑ M. Kameyama. ACuTEMan: A multigrid-based mantle convection simulation code and its optimization to the Earth Simulator. *J. Earth Simulator*, 4, 2-10, 2005.
- ❑ M. Ogawa, G. Schubert, and A. Zebib. Numerical simulations of three-dimensional thermal convection in a fluid with strongly temperature-dependent viscosity. *J. Fluid Mech.*, 233, 299-328, 1991.
- ❑ S. V. Patankar. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere, Washington DC, 197 pp., 1980.
(邦訳「コンピュータによる熱移動と流れの数値解析」森北出版)