

# 3D 無限領域スペクトル法による Navier-Stokes 方程式の計算と可視化

京都大学気象学研究室M1  
松嶋 俊樹

GFDセミナー2012分科会 8/21

# 目次

- 基礎方程式と問題設定
- 無限領域のスペクトル法の適用
- 計算例

# 目的

- 3D無限領域モデルに対する計算チェックを行うこと。

# 基礎方程式と問題設定

- 非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}$$

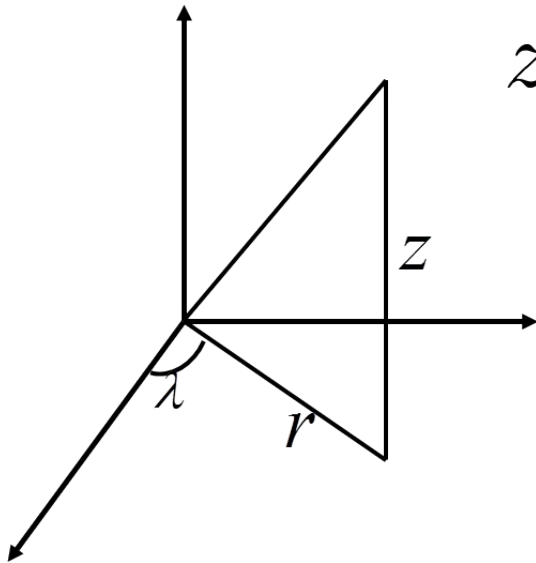
- ジオメトリ 円柱座標:  $(r, \lambda, z)$

1. 水平無限領域+鉛直周期境界

$$z \in [0, 2\pi]$$

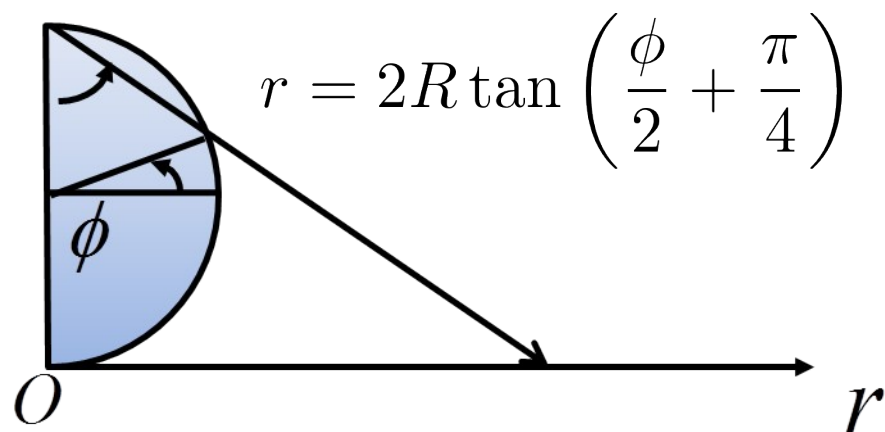
2. 水平無限領域+鉛直無限領域

$$z \in [-\infty, \infty]$$



# 無限領域のスペクトル法

水平無限領域(1,2 共通)



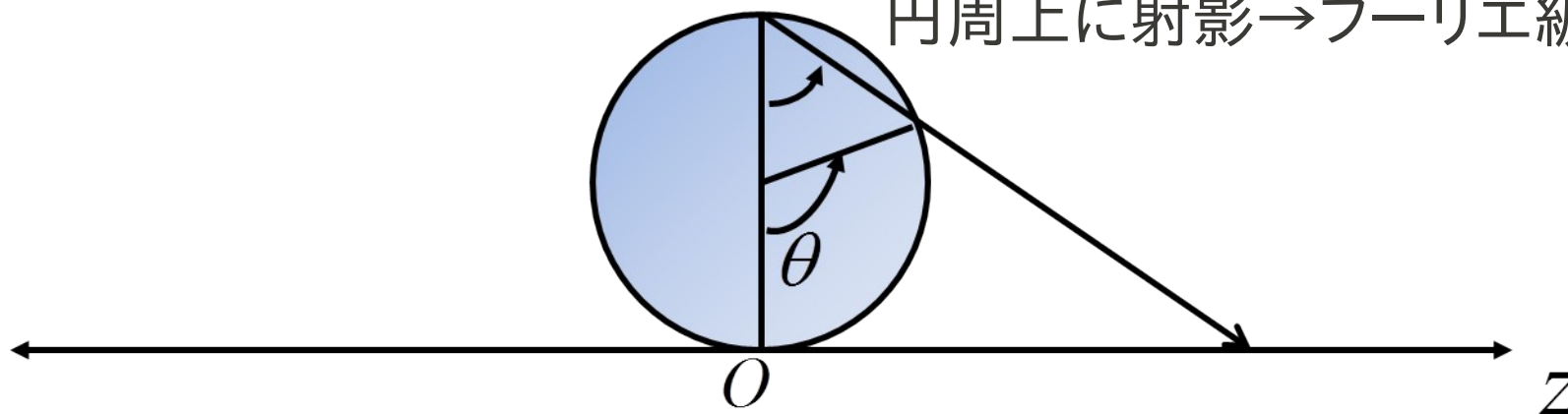
球面上に射影→球面調和関数展開

この写像は特に平面上のラプラシアンと球面上のラプラシアンの間に簡単な関係があり便利

$$\Delta_h = \frac{(1 - \mu)^2}{4R^2} \nabla_s^2 \quad \mu \text{ はサイン緯度}$$

鉛直無限領域(2)

$$z = 2H \tan \left( \frac{\theta}{2} \right)$$



円周上に射影→フーリエ級数展開

## 無限領域のスペクトル法の適用

- 非圧縮条件より速度場はソレノイダルベクトル場なので、トロイダル・ポロイダル分解をする。

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z) + \nabla \times \nabla \times (\chi \mathbf{e}_z)$$

- $\zeta = \Delta \chi$  と定義し、水平方向には次の様に展開する。

$$\psi(r, \lambda, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{m=-n}^n \tilde{\psi}_n^m(z, t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$$

$$\chi(r, \lambda, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{m=-n}^n \tilde{\chi}_n^m(z, t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$$

$$\zeta(r, \lambda, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{m=-n}^n \tilde{\zeta}_n^m(z, t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$$

# 無限領域のスペクトル法の適用

- 鉛直方向にはそれぞれの場合について次の様に展開する。

鉛直周期境界

$$\tilde{\psi}_n^m(z, t) = (\hat{\psi}_n^m)_0 + 2 \sum_{l=1}^L \left\{ (\hat{\psi}_n^m)_l^C \cos(lz) - (\hat{\psi}_n^m)_l^S \sin(lz) \right\}$$

$$\tilde{\chi}_n^m(z, t) = (\hat{\chi}_n^m)_0 + 2 \sum_{l=1}^L \left\{ (\hat{\chi}_n^m)_l^C \cos(lz) - (\hat{\chi}_n^m)_l^S \sin(lz) \right\}$$

$$\tilde{\zeta}_n^m(z, t) = (\hat{\zeta}_n^m)_0 + 2 \sum_{l=1}^L \left\{ (\hat{\zeta}_n^m)_l^C \cos(lz) - (\hat{\zeta}_n^m)_l^S \sin(lz) \right\}$$

鉛直無限領域

$$\tilde{\psi}_n^m(z, t) = \sum_{l=0}^L (\psi_n^m)_l^C \cos(l\theta) + \sum_{l=1}^L (\psi_n^m)_l^S \sin(l\theta)$$

$$\tilde{\chi}_n^m(z, t) = \sum_{l=0}^L (\chi_n^m)_l^C \cos(l\theta) + \sum_{l=1}^L (\chi_n^m)_l^S \sin(l\theta)$$

$$\tilde{\zeta}_n^m(z, t) = \sum_{l=0}^L (\zeta_n^m)_l^C \cos(l\theta) + \sum_{l=1}^L (\zeta_n^m)_l^S \sin(l\theta)$$

## 無限領域のスペクトル法の適用

- トロイダル・ポロイダル分解より、Navier-Stokes方程式は形式的に次の様に書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Delta_h \psi \\ \Delta_h \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\psi, \chi, \zeta)$$
$$\Delta \chi = \zeta$$

- 残差と展開関数の実空間上での内積が0となることを課すと、展開係数に対する常微分方程式が得られる。

## 無限領域のスペクトル法の適用

- 水平方向に球面調和関数展開を用いることで、原点で $C^\infty$ 級を満たし遠方で調和関数的に振る舞う物理場であれば正しく表現される。
- 鉛直無限領域にする場合には、展開する物理量が遠方で0に収束していなければならない。

→これらの条件を保証するため、擬高階粘性を導入する。これは原点付近では通常の高階粘性として、遠方では自然なスポンジ層として振る舞う。

水平	鉛直
$\nu(-1)^{p+1} \left( \frac{\nabla_s^2}{R^2} \right)^p$	$\nu(-1)^{p+1} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^p$
	通常の高階粘性
	$\nu(-1)^{p+1} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^p$



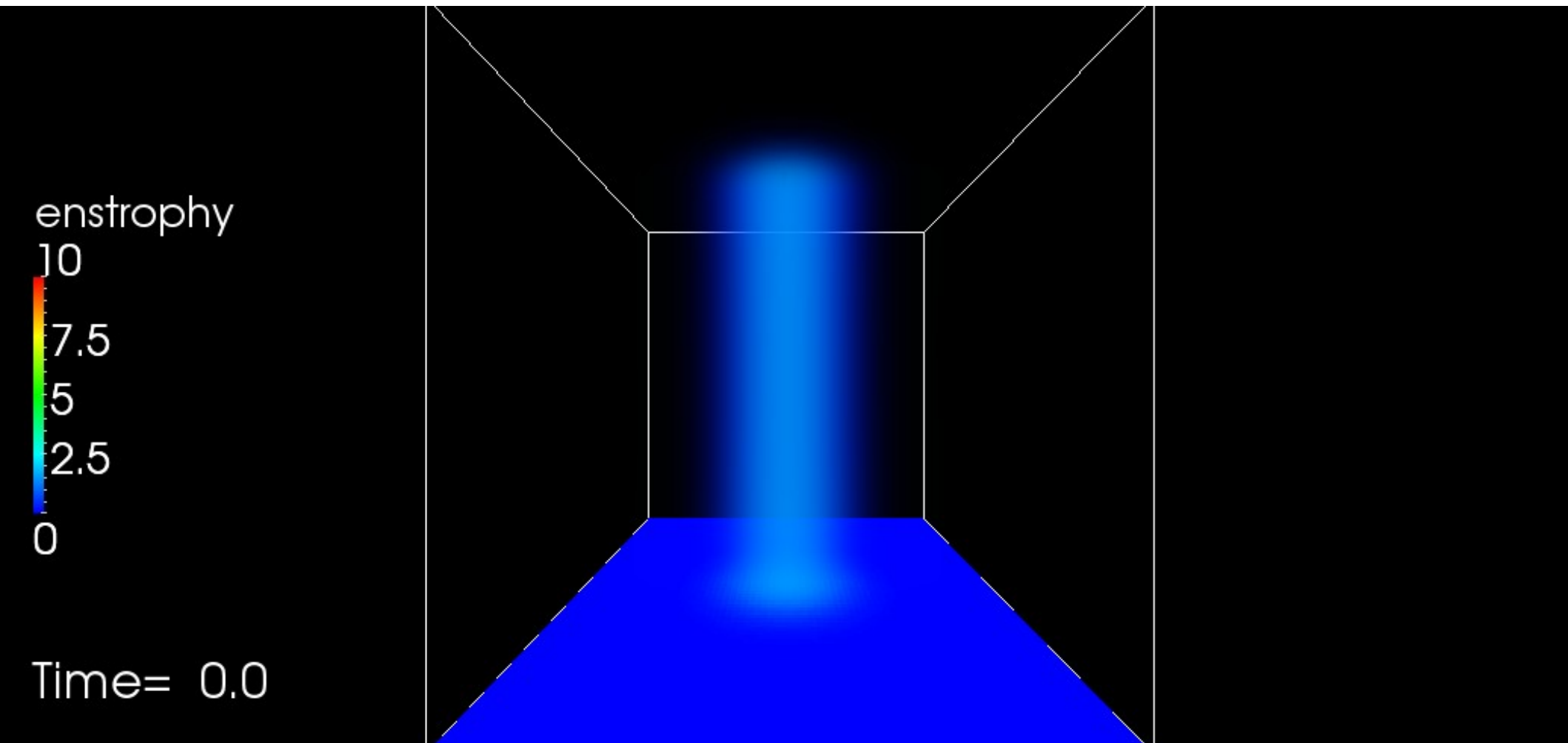
# 計算例1: Batchelor渦

## Batchelor渦

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r) &= (0, q(1 - e^{-r^2}), he^{-\beta r^2}) \\ \mathbf{\Omega}(r) &= (0, 2\beta h r e^{-\beta r^2}, 2q e^{-r^2}) \end{aligned}$$

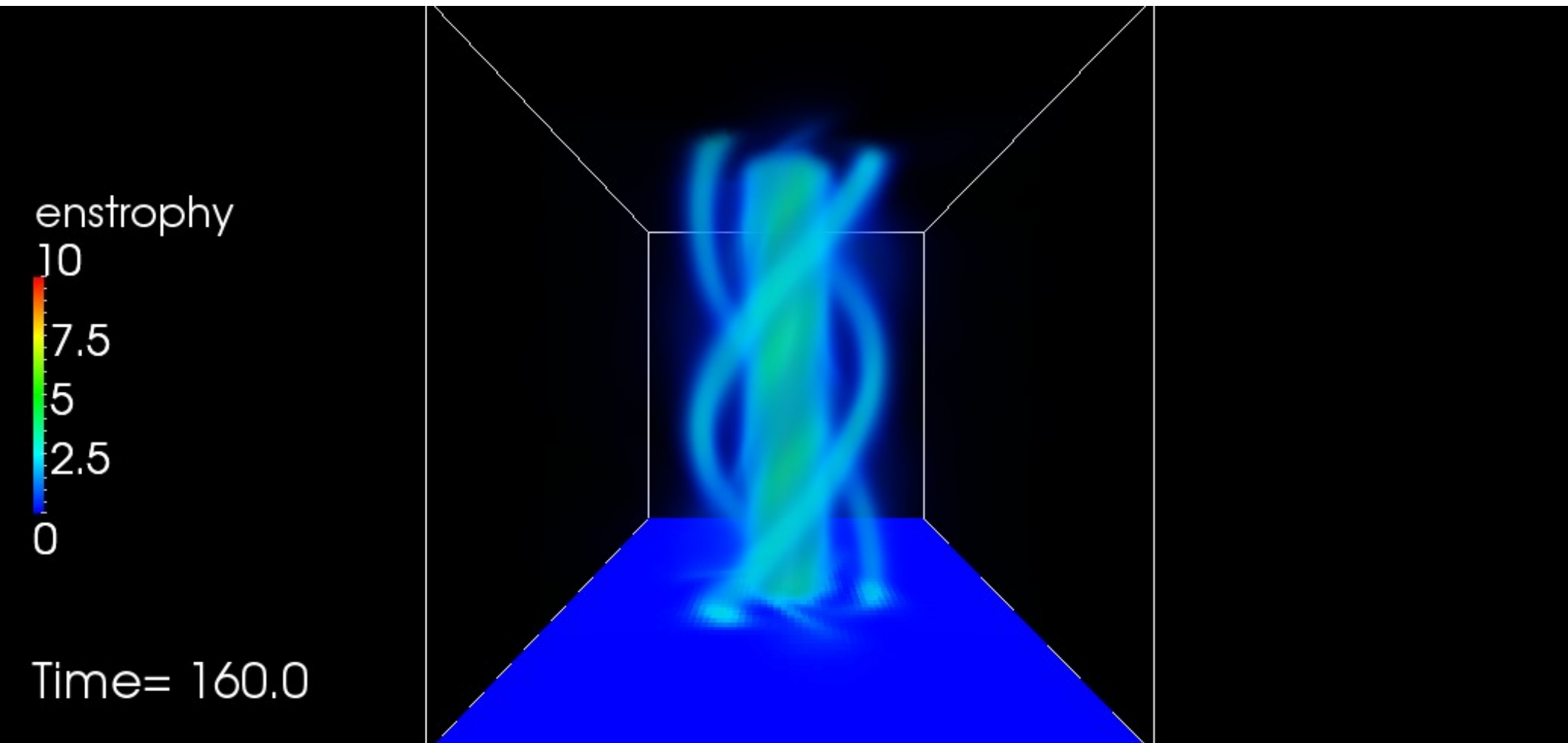
- モデルセットアップ
  - 3D水平無限-鉛直周期境界, 非線形モデル
  - 解像度 IM=128 JM=256 KM=128
  - 切断波数 T=84, L=41
  - マッピングパラメータ R=1.0
  - 時間積分: 4次ルンゲクッタ法, dt=0.1
  - プロファイルのパラメータ q=1, h=1,  $\beta=1$

# 計算例1: Batchelor渦



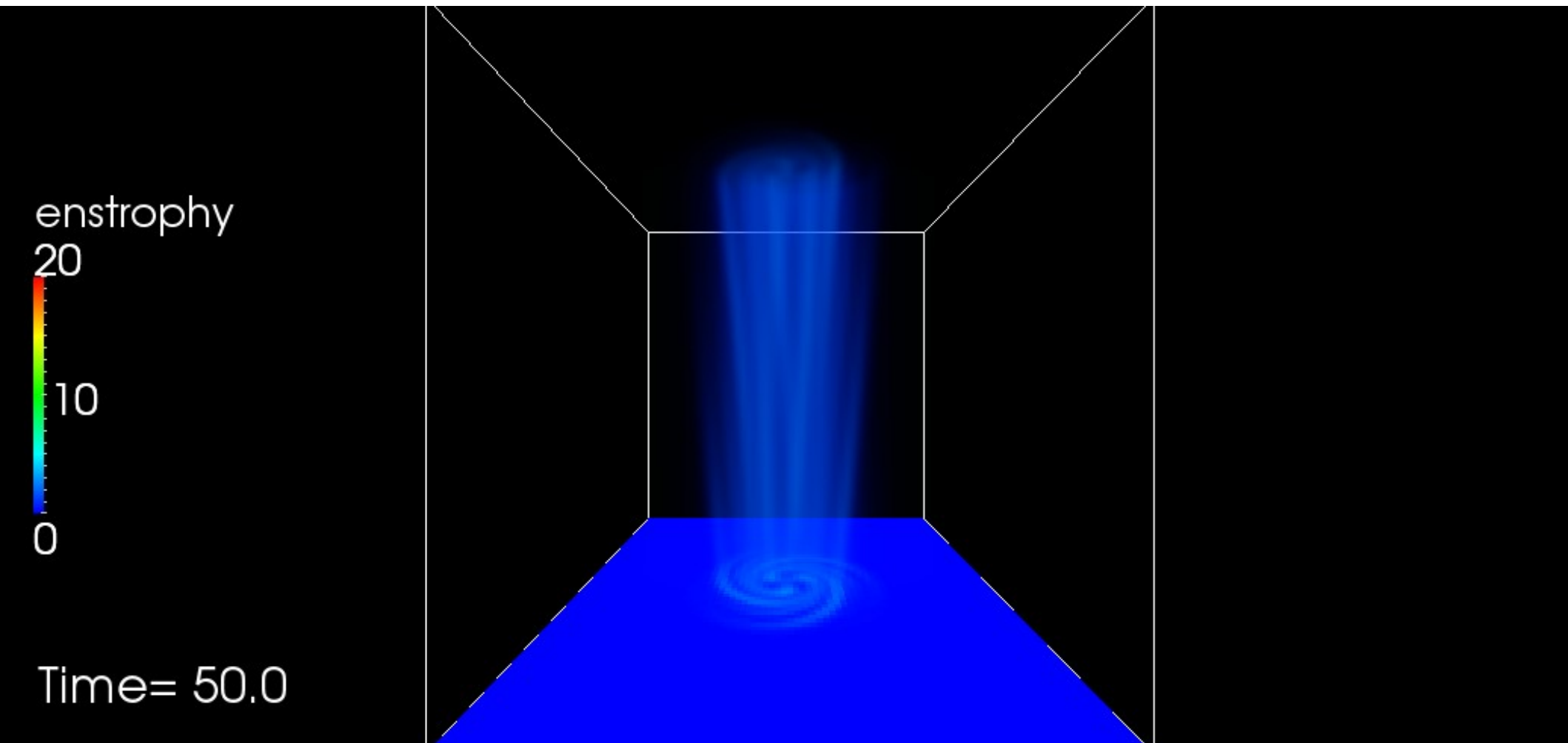
初期の基本場のエンストロフィー密度の分布をボリュームレンダリングによって表したもの。0(青)の不透明度が0で、10(赤)まで線形的に増加する。

# 計算例1: Batchelor渦



初期擾乱として $m=3, l=2$ を与えて時間発展させたもの。図は非線形飽和した後のある時刻のスナップショット。

# 計算例1: Batchelor渦

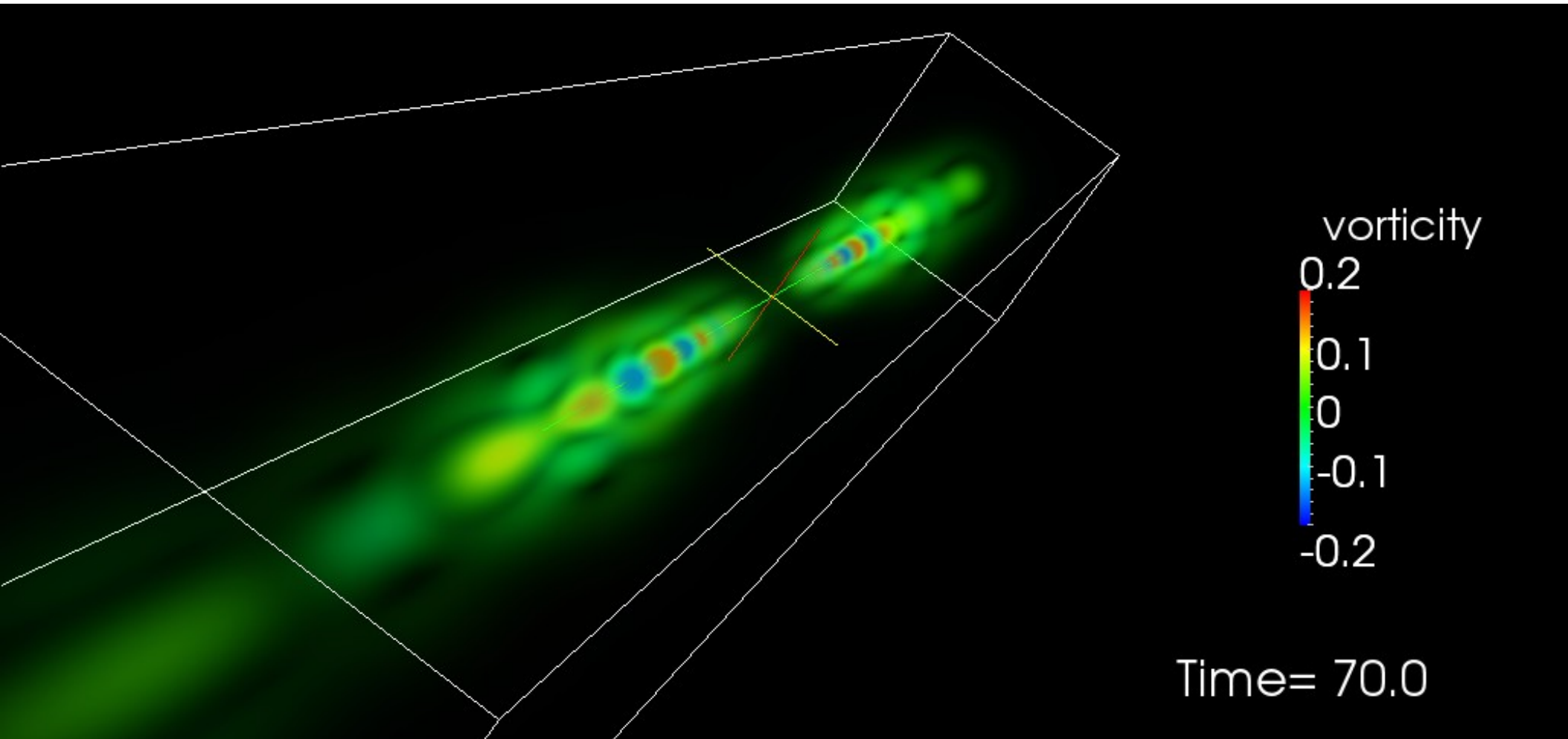


初期擾乱として $m=3, l=1$ を与えて時間発展させたもの。図は非線形飽和した後のある時刻のスナップショット。この後( $l=2$ とは異なり)二次不安定が起こる。

## 計算例2: Gaussian型渦管

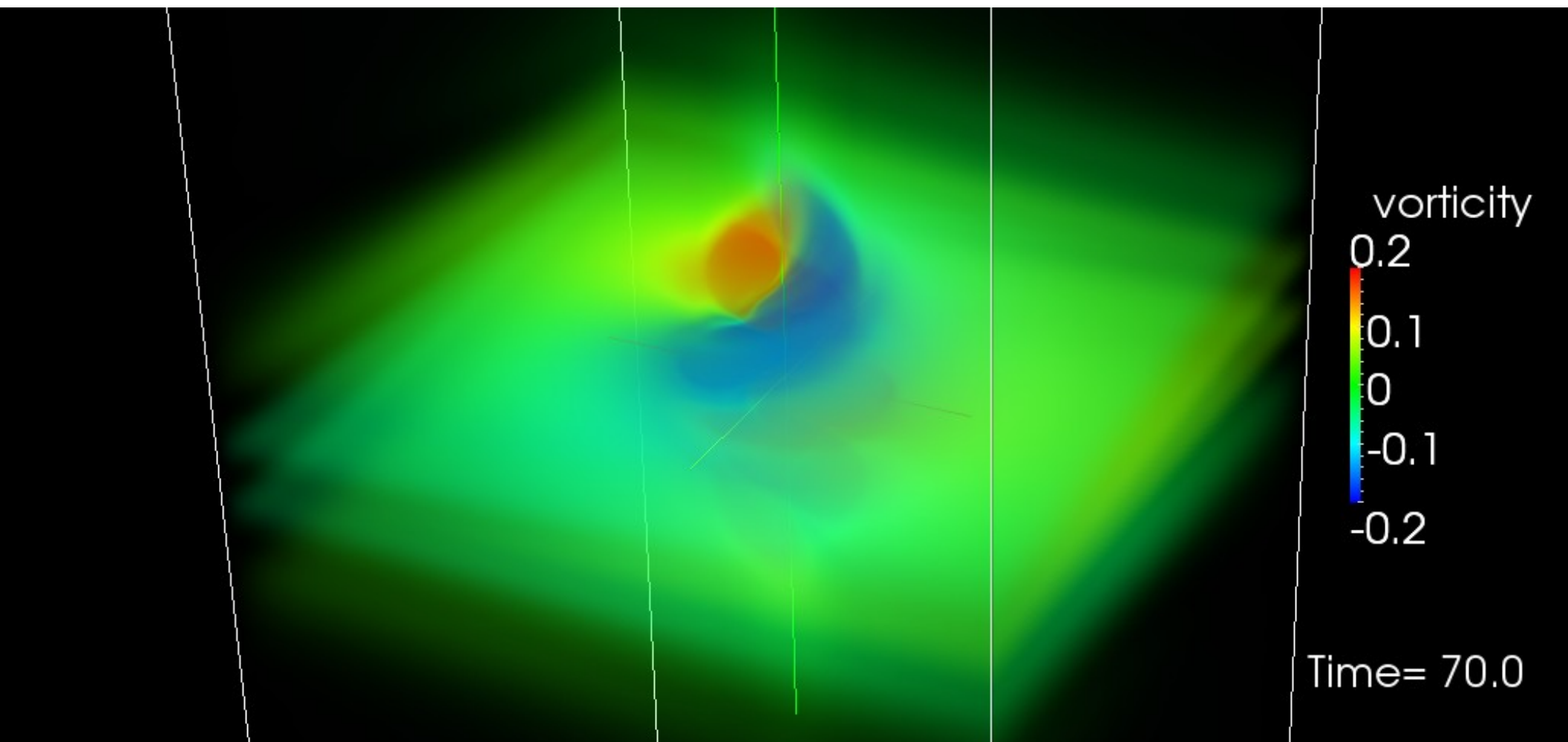
- モデルセットアップ
  - 2D水平無限-鉛直無限領域,線形モデル
  - 解像度 JM=128 KM=512
  - 切断波数 T=84, L=170
  - マッピングパラメータ R=1.0,H=8.0
  - 時間積分: 4次ルンゲクッタ法, dt=0.5
  - プロファイルのパラメータ  $q=1, h=\beta=0$

## 計算例2: Gaussian型渦管



原点付近に擾乱を与えて時間発展させた図。図に示しているのは鉛直渦度で、ケルビン波の軸対称モード( $m=0$ )のパターンがよく見えている。

## 計算例2: Gaussian型渦管



ケルビン波のヘリカルモード( $m=1$ )

## 参考文献

無限領域のスペクトル法について

K. Ishioka. A spectral method for unbounded domains and its application to wave equations in geophysical fluid dynamics. In *IUTAM Symposium on Computational Physics and New Perspectives in Turbulence*, pp. 291–296. Springer, 2008.

T. Matsushima and PS Marcus. A spectral method for unbounded domains. *Journal of Computational Physics*, Vol. 137, No. 2, pp. 321–345, 1997.

計算例で紹介したものに近い設定の論文

S. Arendt, D.C. Fritts, and O. Andreassen. The initial value problem for kelvin vortex waves. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 344, pp. 181–212, 1997.

I. Delbende and M. Rossi. Nonlinear evolution of a swirling jet instability. *Physics of Fluids*, Vol. 17, p. 044103, 2005.

D. Fabre, D. Sipp, and L. Jacquin. Kelvin waves and the singular modes of the lamb-oseen vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 551, pp. 235–274, 2006.