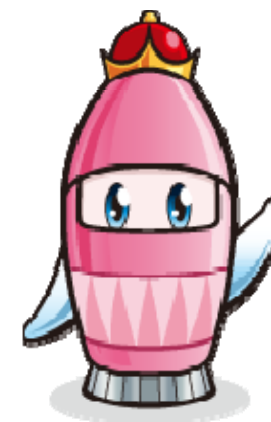
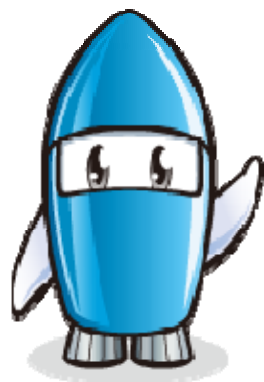


GFDセミナー  
2016年8月25日～28日 支笏湖休暇村



# 原始惑星系円盤の流体力学

武藤恭之  
(工学院大学)



# 自己紹介

- 研究テーマ
  - 惑星形成過程・円盤の力学・原始惑星系円盤観測
  - 観測屋と認識されている気がします
- 2005-2010: 大学院生
  - 京都大学大学院理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻
  - 修論:「惑星系形成理論における原始惑星落下問題に対する磁場の影響」
  - D論:「Diversity of Disk-Planet Interaction」
- 2011-2012: PD
  - 東京工業大学 地球惑星科学科
  - 観測プロジェクトとの共同研究も始めました
    - やけにそちらが忙しくなりました
- 2012-現在
  - 工学院大学 基礎・教養教育部門



# 目次

## 1. イントロダクション

- ✓ 原始惑星系円盤の基本構造
- ✓ 原始惑星系円盤の最新観測

## 2. 原始惑星系円盤における流体方程式

- ✓ 局所近似した流体方程式系
- ✓ 線型方程式の定式化

## 3. 原始惑星系円盤における波の伝搬と不安定性

- ✓ 軸対称モード
- ✓ 非軸対称モード(構造のない場合): 密度波理論
- ✓ 非軸対称モード(構造のある場合): ロスビー波不安定

# 目次

## 1. イントロダクション

- ✓ 原始惑星系円盤の基本構造
- ✓ 原始惑星系円盤の最新観測

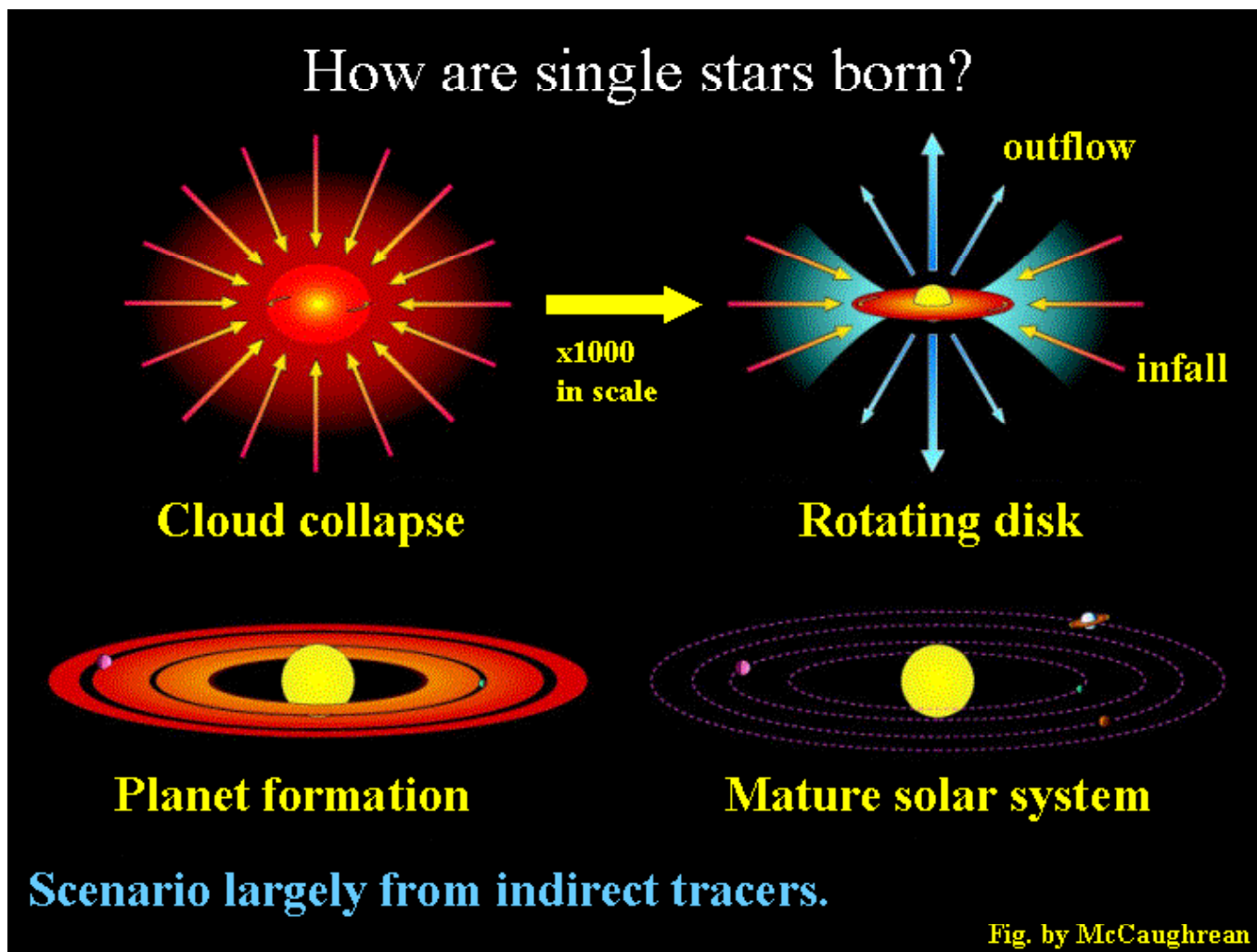
## 2. 原始惑星系円盤における流体方程式

- ✓ 局所近似した流体方程式系
- ✓ 線型方程式の定式化

## 3. 原始惑星系円盤における波の伝搬と不安定性

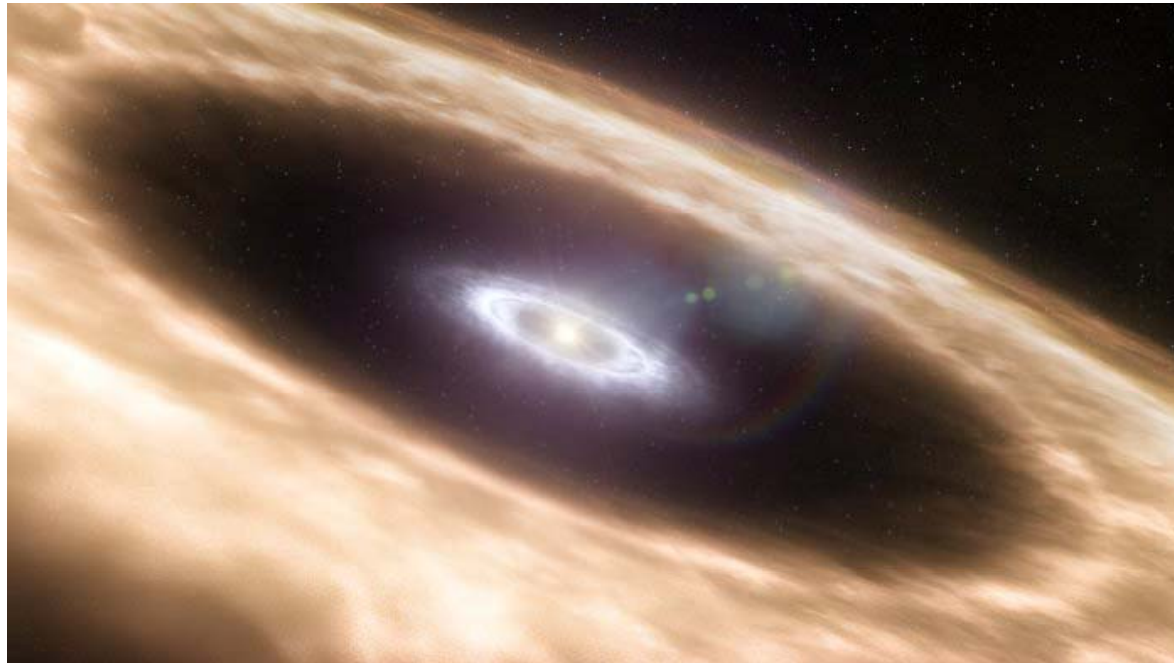
- ✓ 軸対称モード
- ✓ 非軸対称モード(構造のない場合): 密度波理論
- ✓ 非軸対称モード(構造のある場合): ロスビー波不安定

# 星·惑星形成

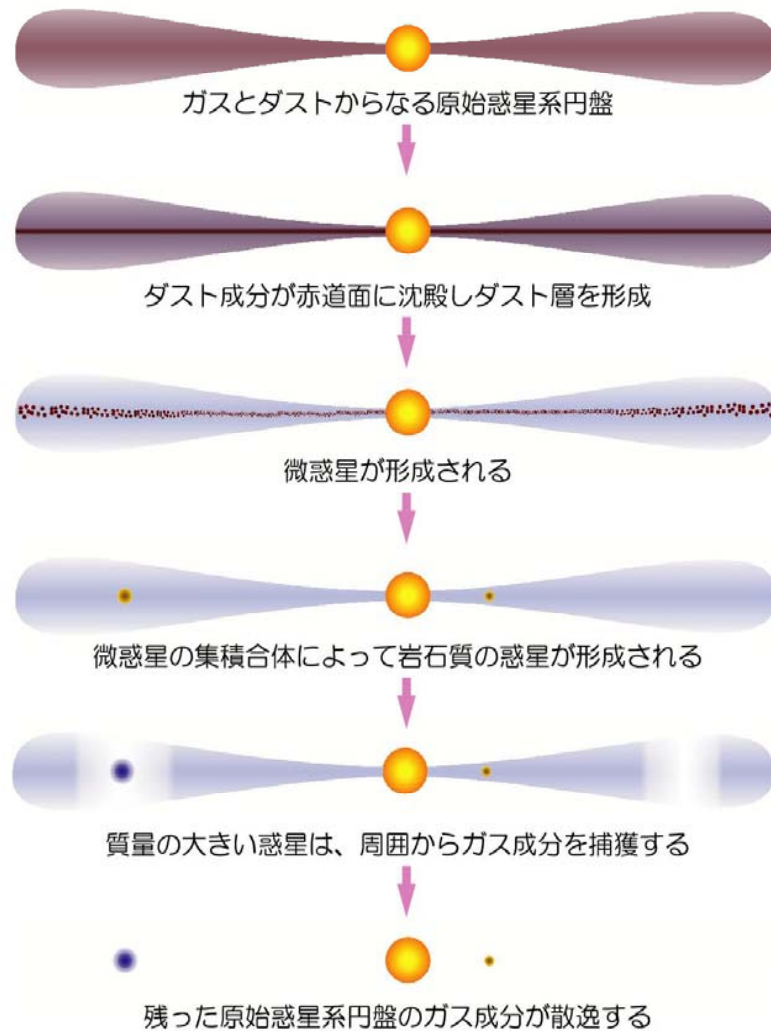


# 惑星形成の現場

- 原始惑星系円盤
  - ガスとダスト(石ころ・ほこり)から成っている、星の周りを回転している薄い円盤
  - 星が出来てから100万年～1000万年は存在



# 惑星形成過程の概略



Copyrighted by T.Imaeda,1999

# 惑星形成の理解のためには

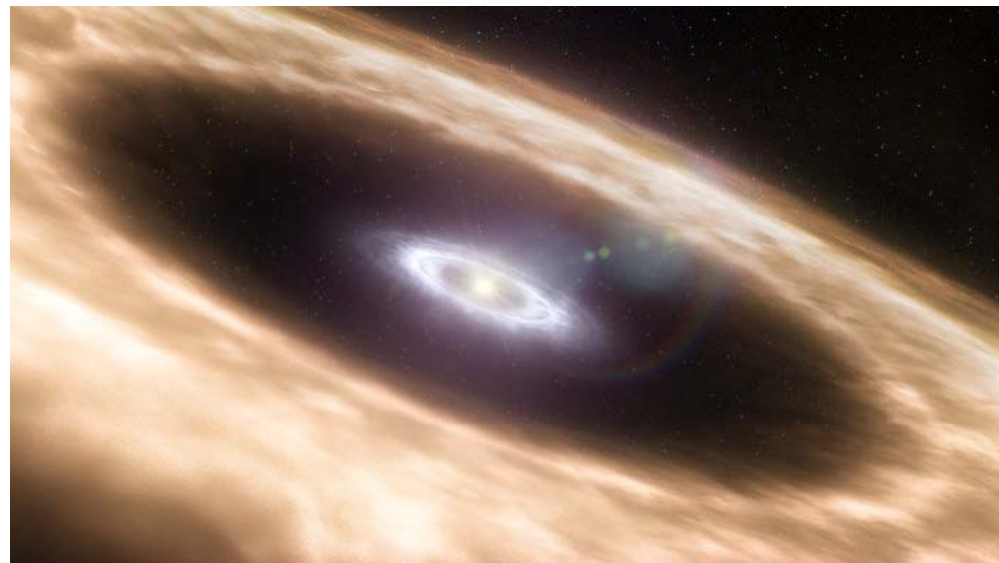
- 原始惑星系円盤の進化
  - ガス円盤の構造はどのように進化するか？
    - 原始惑星系円盤の力学
    - 輻射の取り扱い
  - 円盤中の物質はどのように進化するか？
    - ダスト成長
    - ガスの化学進化

惑星形成の基礎過程としての  
原始惑星系円盤の力学の理解が必要



# 原始惑星系円盤：基礎の基礎

- 中心に強い重力源がある系
  - 系の重力は、中心星が支配
  - 系の回転も、中心星が支配する超音速流
  - この点が、地球(惑星)流体とは異なる点？

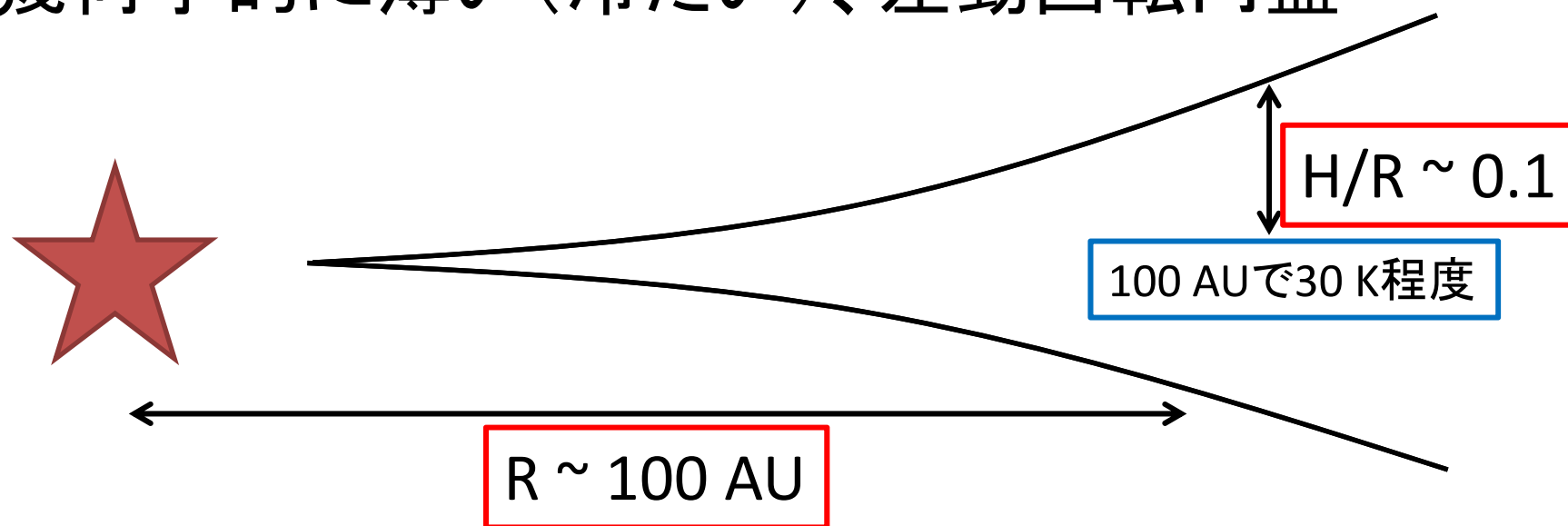


# 原始惑星系円盤の基本的構造

- 第ゼロ近似: 中心星重力と遠心力のつり合い  
– 円盤はほぼKepler回転

$$\frac{GM}{R^2} = \Omega^2 R \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

- 幾何学的に薄い(冷たい)、差動回転円盤



# 原始惑星系円盤の厚み

円盤の厚み方向： 中心星重力と圧力勾配のつり合い

中心星重力： $\frac{GM}{R^2} \frac{H}{R} \sim \Omega^2 H$

圧力勾配力： $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \sim \frac{1}{\rho} \frac{p}{H} \sim \frac{c^2}{H}$

$$H \sim \frac{c}{\Omega}$$

c: 音速

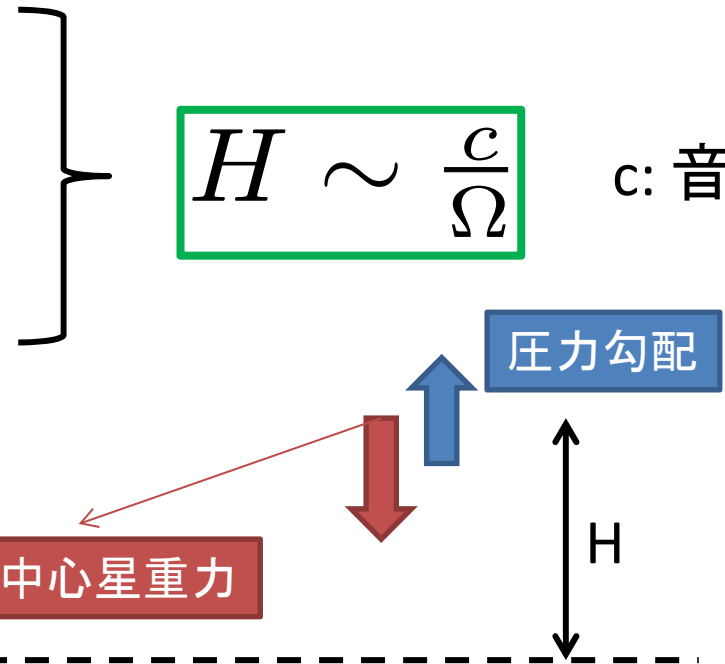


$R$

中心星重力

圧力勾配

$H$



# 薄い円盤＝超音速流

- 円盤の厚みと半径の比＝マッハ数

$$\frac{H}{r} = \frac{c}{r\Omega} = \frac{c}{v_K}$$

- Kepler速度

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 30 \text{ km/s} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{1 \text{ AU}}\right)^{-1/2}$$

- 音速

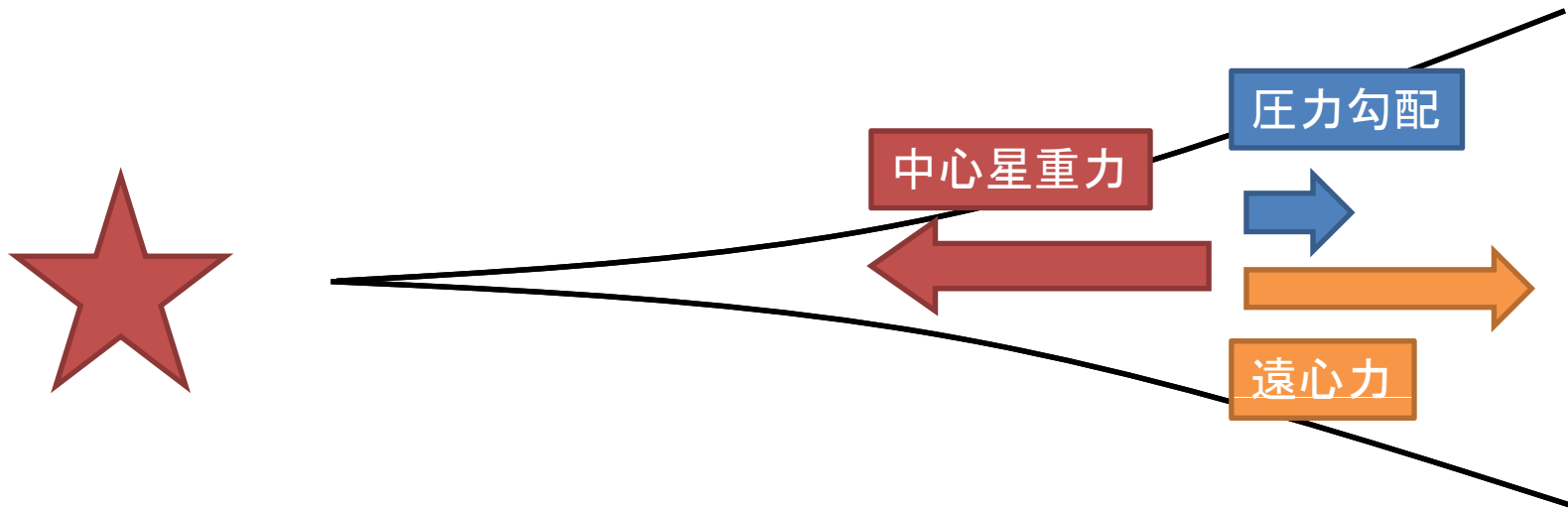
$$c = 1 \text{ km/s} \left(\frac{T}{300 \text{ K}}\right)^{1/2}$$

# 回転速度のKeplerからのずれ

- 動径方向の圧力勾配力の影響

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} + c^2 \frac{r}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}$$

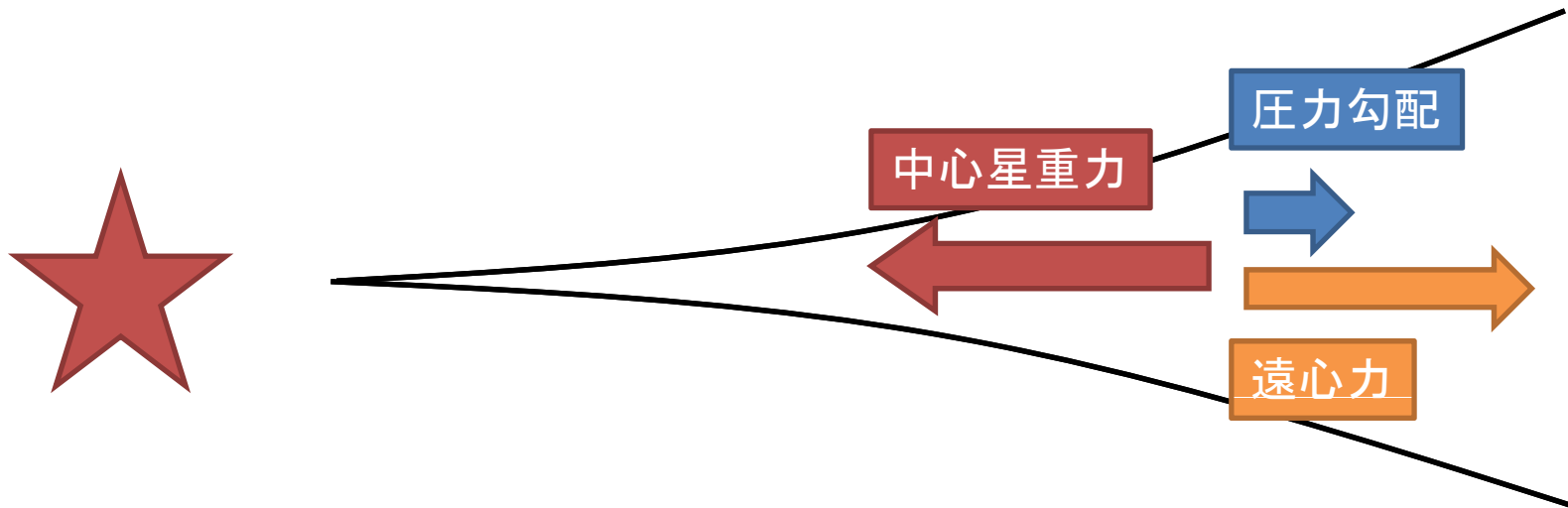


# 回転速度のKeplerからのずれ

- 動径方向の圧力勾配力の影響

$$v = v_K \left( 1 + \frac{c^2}{v_K^2} \frac{\partial \log \rho}{\partial \log r} \right)^{1/2} \sim v_K \left( 1 + \left( \frac{H}{r} \right)^2 \frac{\partial \log \rho}{\partial \log r} \right)$$

円盤の大きさ( $r$ )のスケールで、ゆっくりとした密度変化がある場合、Kepler速度からのずれは $(H/r)^2$ 程度



# 力学的に重要な長さスケール

- 「円盤の厚み」(スケールハイト)とは
  - (音速) × (ケプラー時間)

$$H \sim \frac{c}{\Omega} \sim ct_K$$

- 厚みを決めているだけでなく、そもそも力学的に重要そうなスケールになっている

# 目次

## 1. イントロダクション

- ✓ 原始惑星系円盤の基本構造
- ✓ 原始惑星系円盤の最新観測

## 2. 原始惑星系円盤における流体方程式

- ✓ 局所近似した流体方程式系
- ✓ 線型方程式の定式化

## 3. 原始惑星系円盤における波の伝搬と不安定性

- ✓ 軸対称モード
- ✓ 非軸対称モード(構造のない場合): 密度波理論
- ✓ 非軸対称モード(構造のある場合): ロスビー波不安定



# 原始惑星系円盤の観測

- 円盤構造を見るために必要な解像度
  - 円盤のスケールハイト程度の構造が空間分解出来れば、色々面白そう

$$H \sim 10 \text{ AU} \left( \frac{H/R}{0.1} \right) \left( \frac{R}{100 \text{ AU}} \right)$$
$$\sim 0.1 \text{ asec} \left( \frac{H/R}{0.1} \right) \left( \frac{R}{100 \text{ AU}} \right) \left( \frac{d}{100 \text{ pc}} \right)^{-1}$$

近赤外線(波長1 $\mu\text{m}$ ) → 口径2m程度 → 大型望遠鏡  
サブミリ波(波長1mm) → 口径2km程度 → 干渉計

# 円盤の直接撮像観測



近赤外線：  
すばる  
Gemini  
Keck

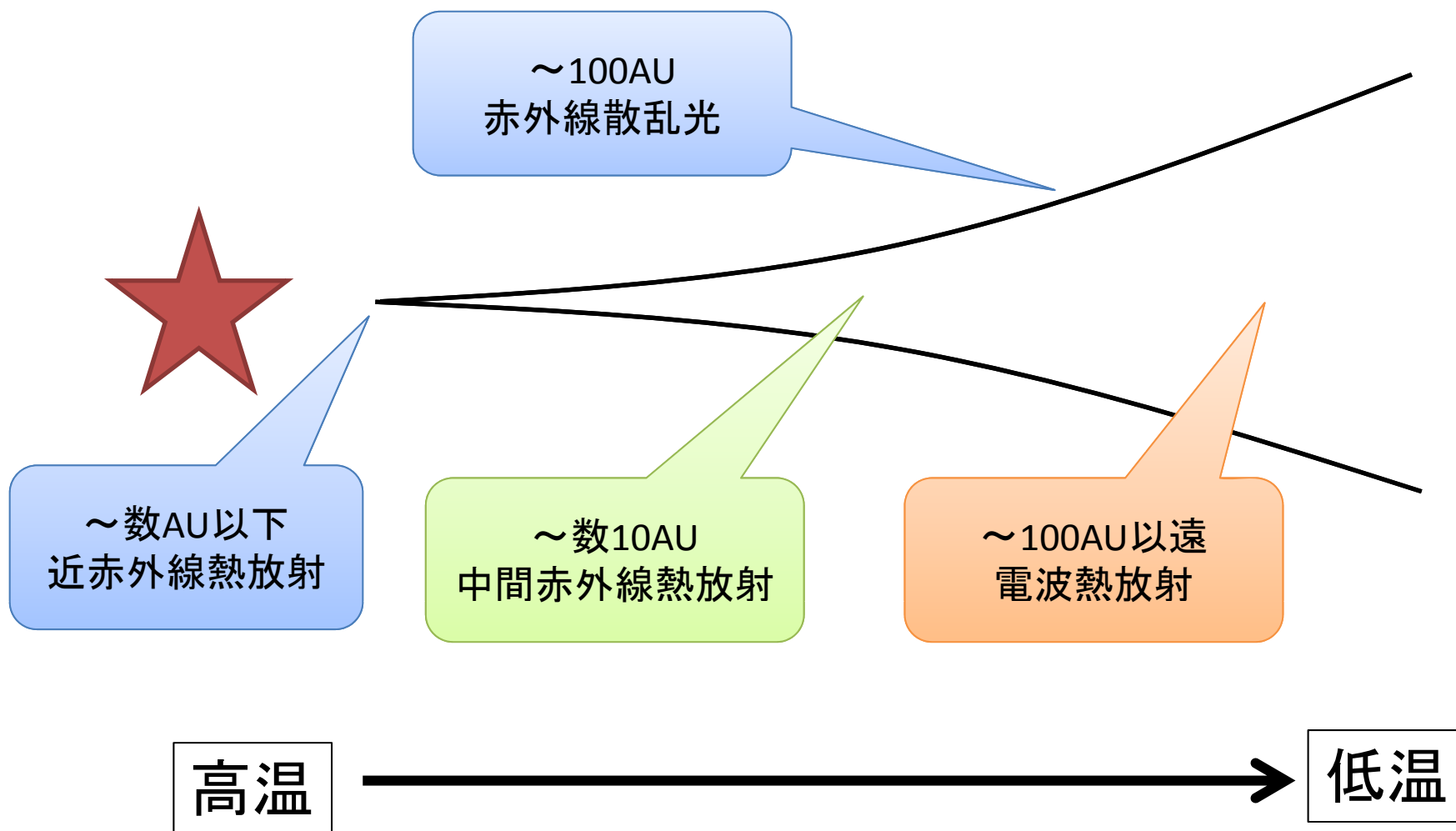


電波：  
ALMA望遠鏡(チリ)

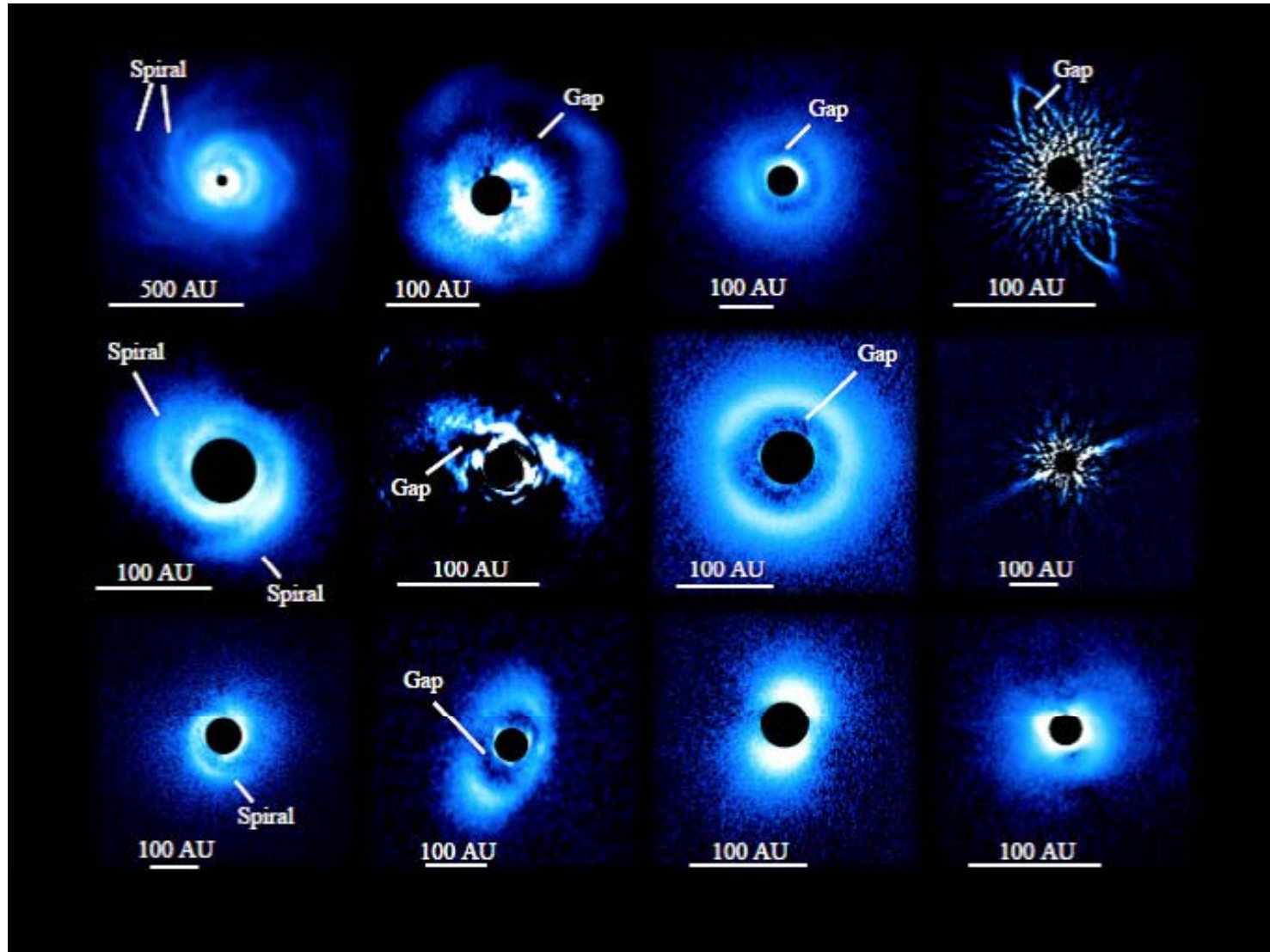
[http://www.naoj.org/Gallery/j\\_tele\\_dome.html](http://www.naoj.org/Gallery/j_tele_dome.html)

<http://alma.mtk.nao.ac.jp/j/multimedia/picture/antenna/>

# 円盤観測で見えるもの

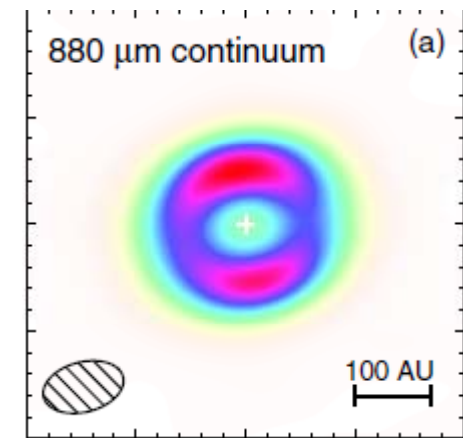
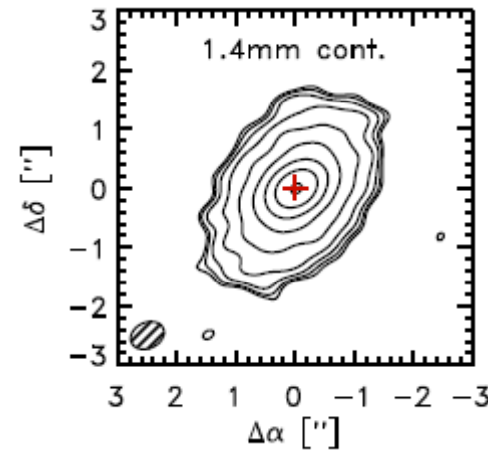
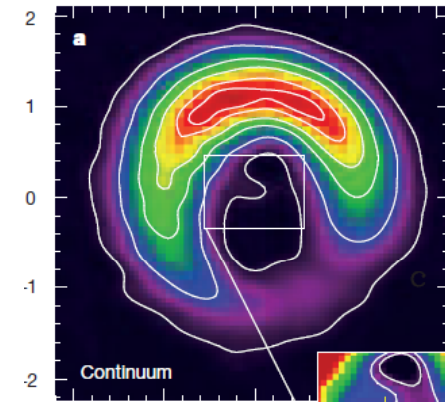
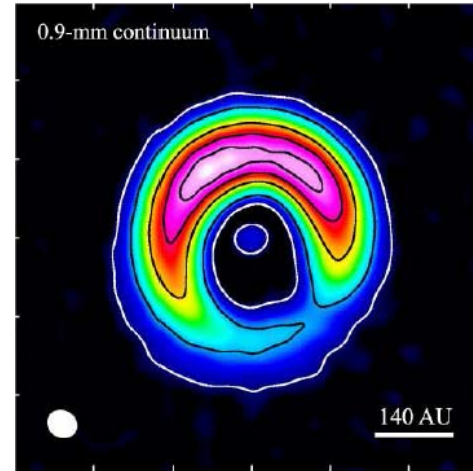
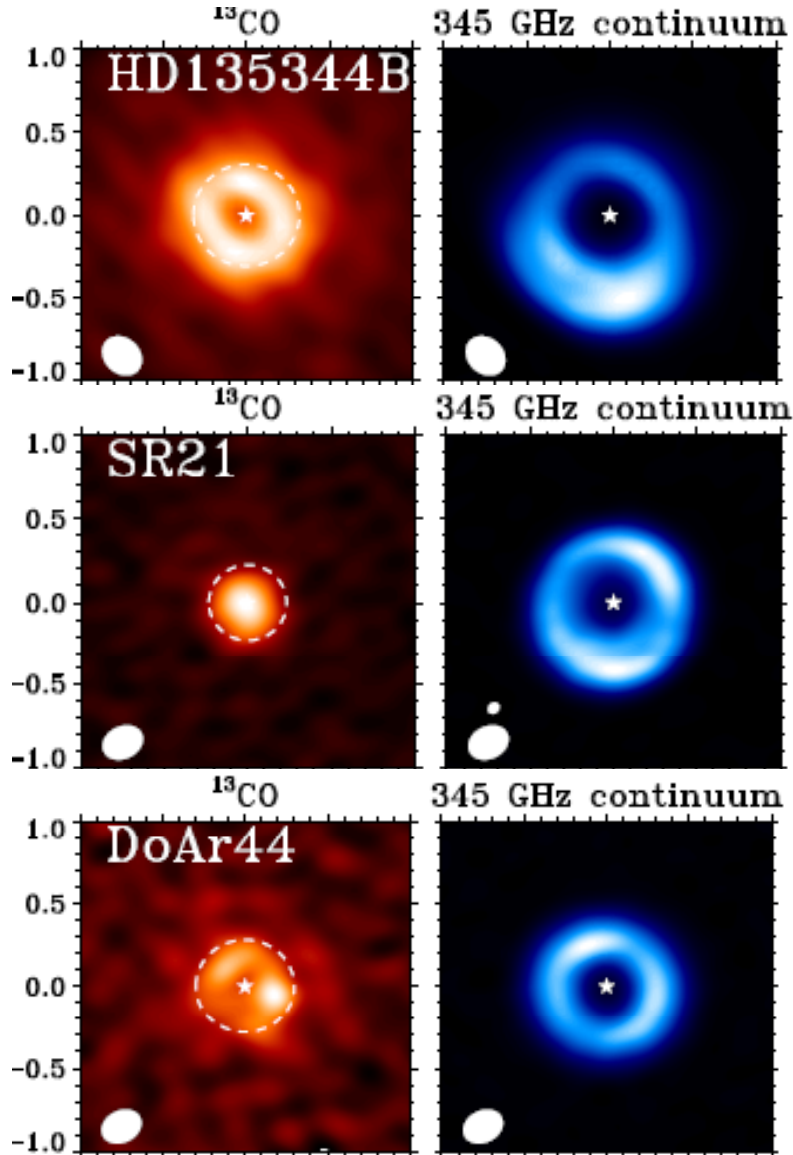


# すばる望遠鏡ギャラリー



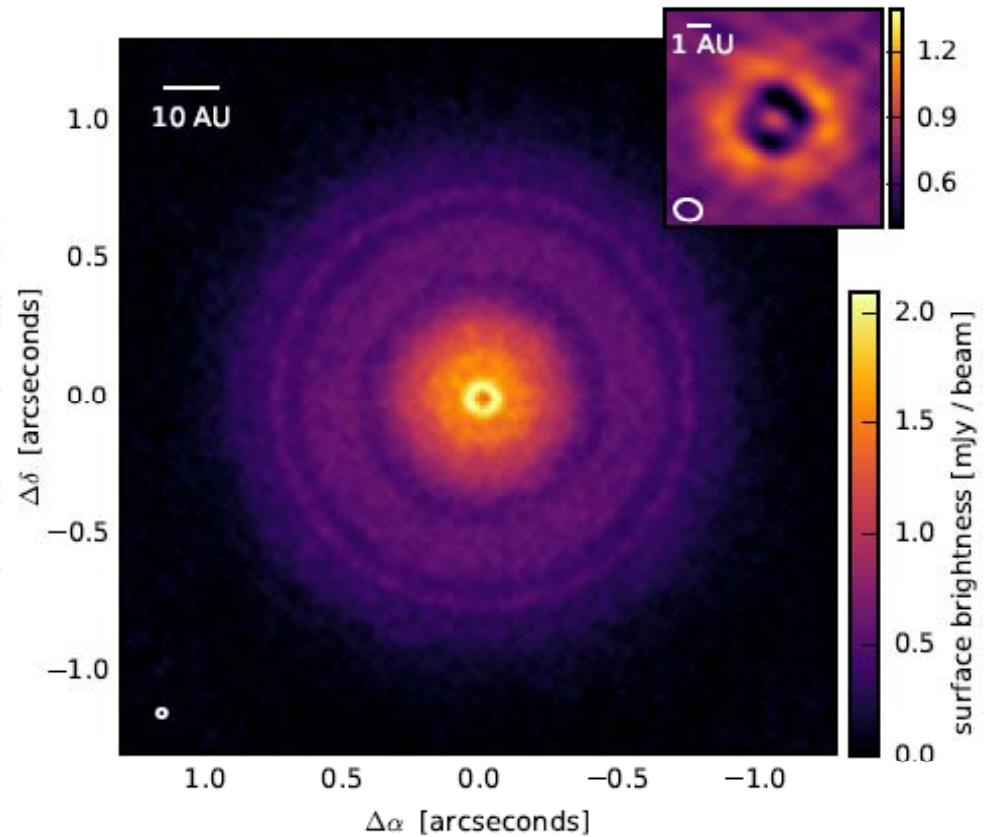
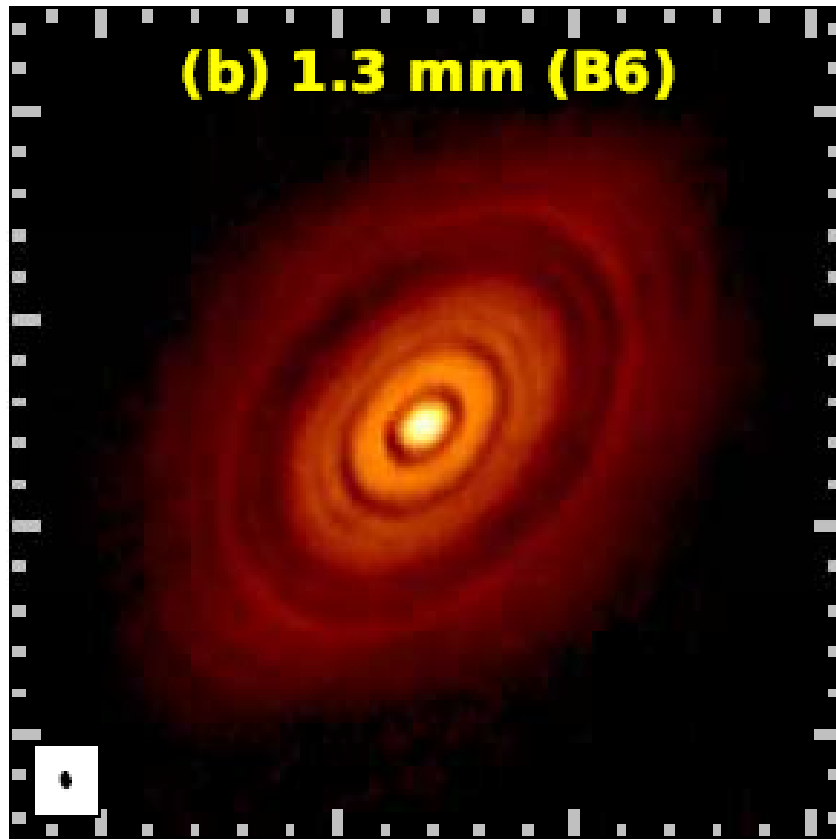
国立天文台プレスリリースより

# 原始惑星系円盤のALMA観測

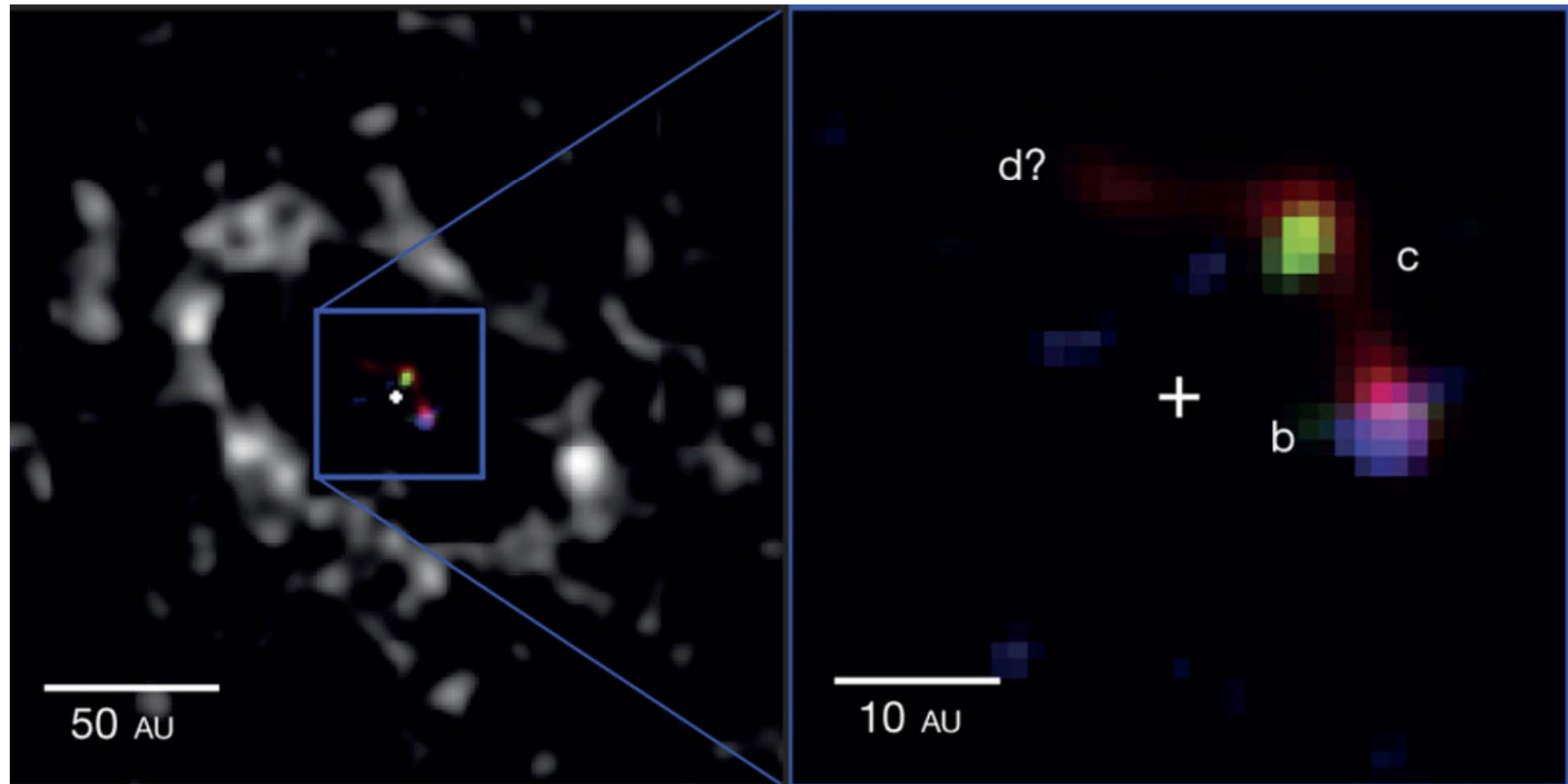


Van der Marel+15, Zhang+14, Oberg+15,  
Casassus+13, Fukagawa+ 13

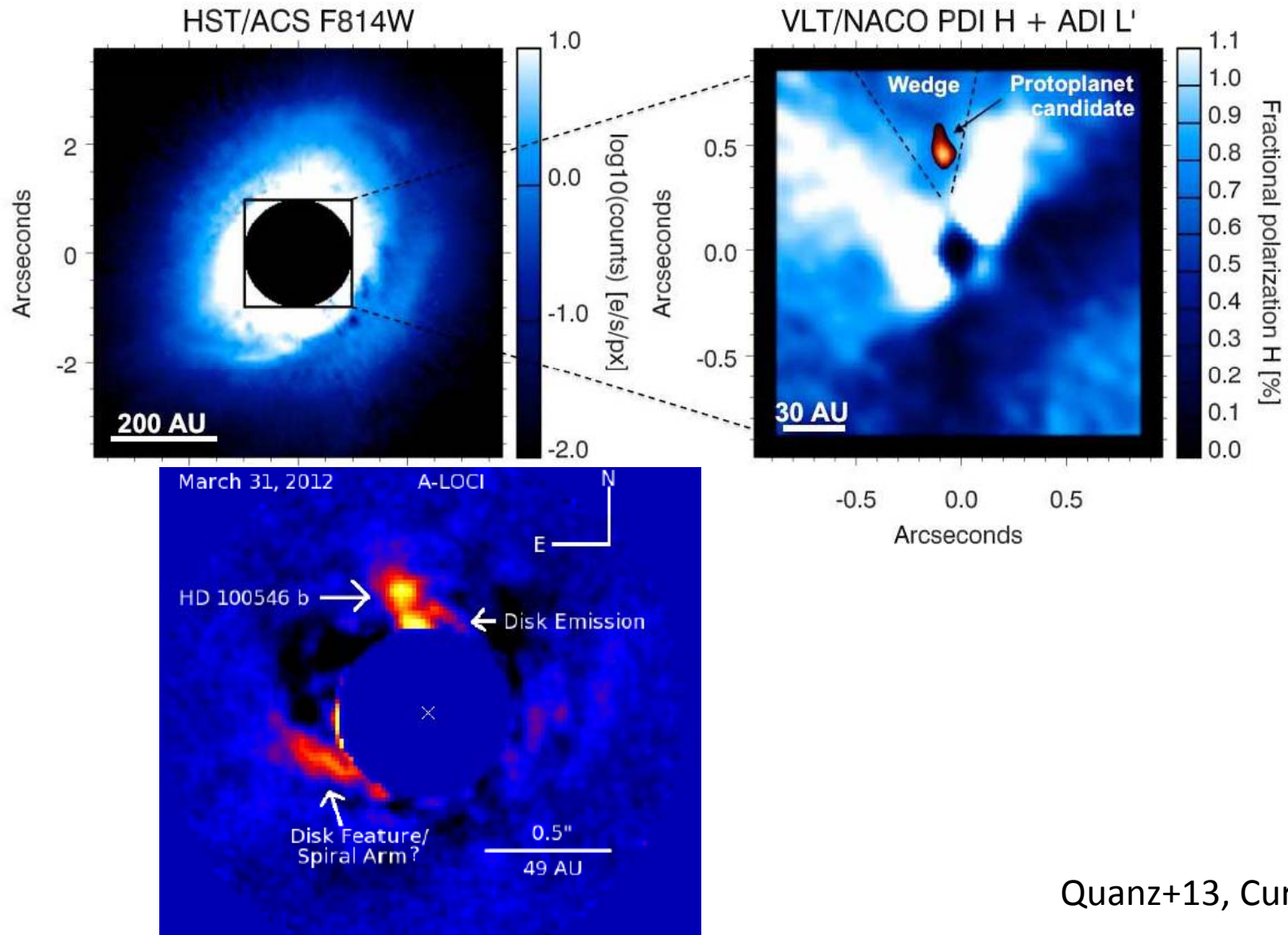
# ALMA高解像度観測



# 円盤 + 惑星？



# 円盤 + 惑星？



Quanz+13, Currie+14



# 観測の現状

- 0.1秒角程度の分解能が、近赤外線とサブミリ波で達成されている
- 円盤の細かい構造が見えてきている
  - 円盤の力学過程に関係がある？
- 「円盤＋惑星」の系は、なんとなくそれらしいものがちらほらと

# 観測された円盤構造の理解

- 惑星でも置いてみる
- 力学的不安定性を考える
- 物質進化に結び付ける

- 観測を理解するために必要なこと:
  - 円盤の何を見ているかを理解する
  - 円盤における物理的素過程を理解する

# 目次

## 1. イントロダクション

- ✓ 原始惑星系円盤の基本構造
- ✓ 原始惑星系円盤の最新観測

## 2. 原始惑星系円盤における流体方程式

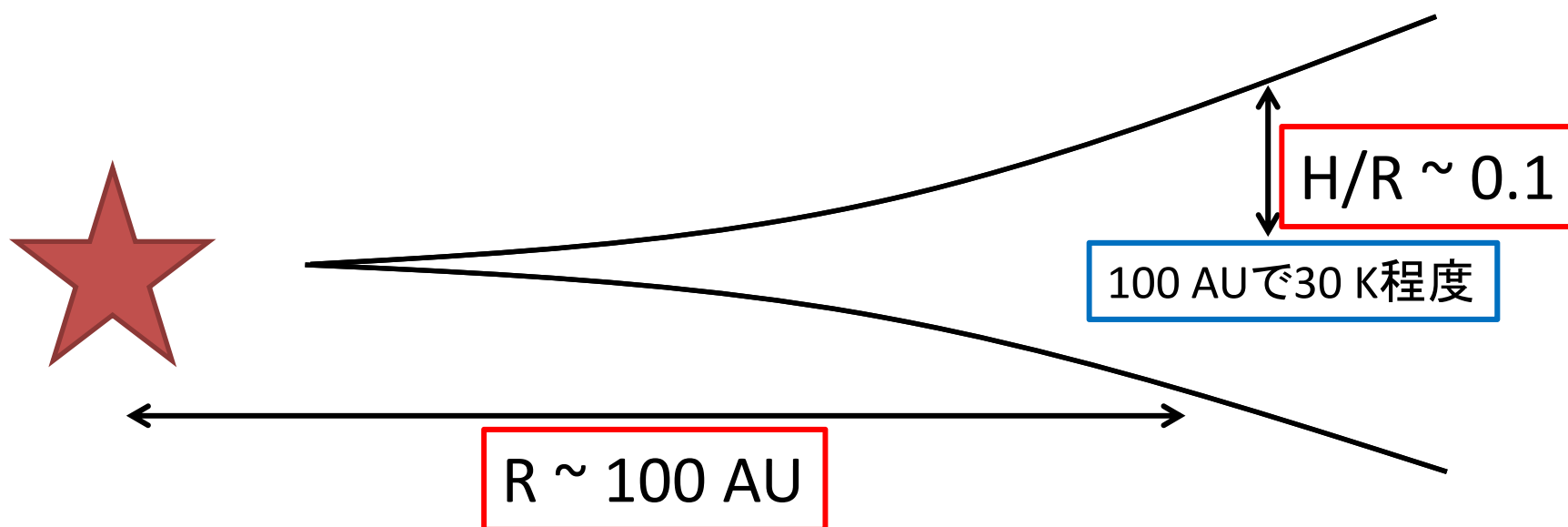
- ✓ 局所近似した流体方程式系
- ✓ 線型方程式の定式化

## 3. 原始惑星系円盤における波の伝搬と不安定性

- ✓ 軸対称モード
- ✓ 非軸対称モード(構造のない場合): 密度波理論
- ✓ 非軸対称モード(構造のある場合): ロスビー波不安定

# 原始惑星系円盤の構造（復習）

- 幾何学的に薄い円盤
  - 厚み方向に積分して、2次元の板としてモデル化

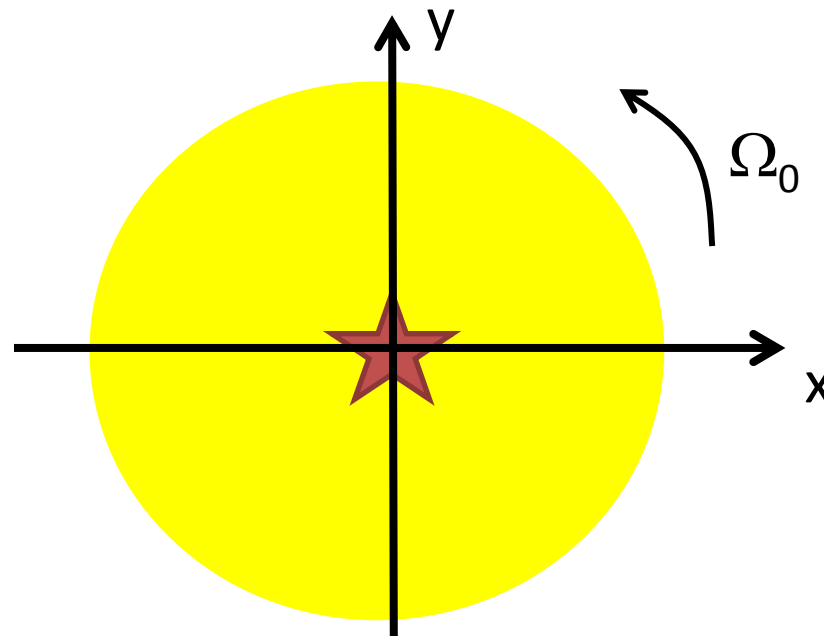


# 二次元の流体方程式

基本変数： 面密度と速度  $\Sigma, \mathbf{v}$

中心星を原点に取り、角速度 $\Omega_0$ で回転する座標系

※基本的に、全て  
カーテシアン座標で  
やります



# 基礎方程式

流体粒子が受ける力:

中心星重力・遠心力・コリオリ力

連続の式

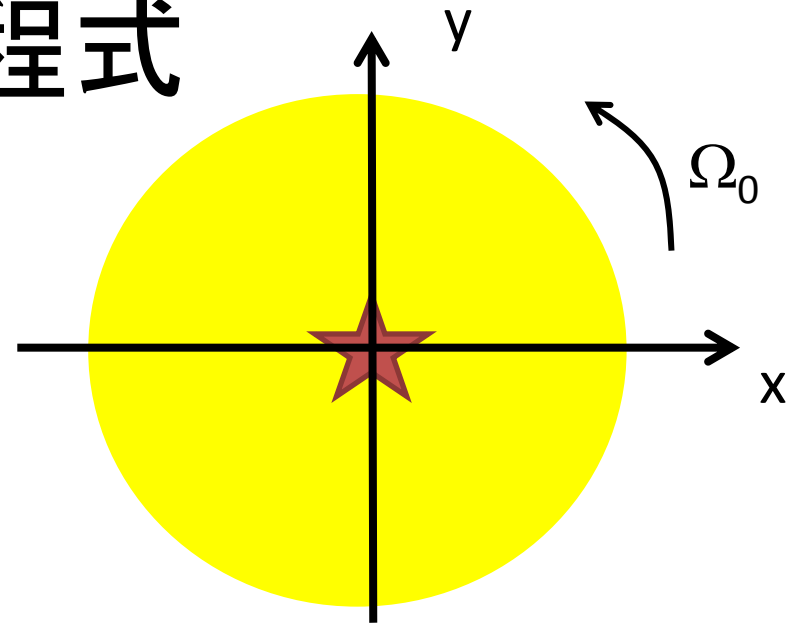
$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0$$

運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\Omega_0 (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{\Sigma} \nabla P + r\Omega_0^2 \mathbf{e}_r - \nabla \Phi$$

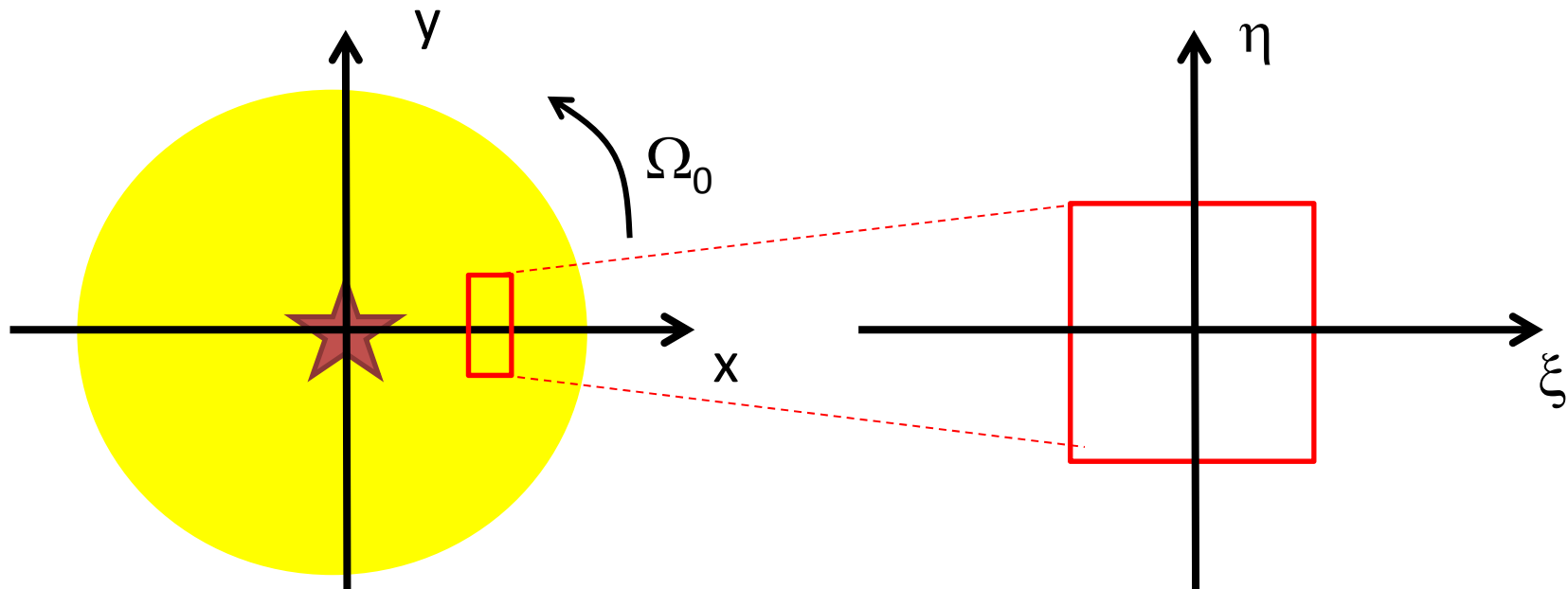
$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{中心星重力(ポテンシャル)}$$

(簡単のため)等温を仮定  $P = c^2 \Sigma$



# 局所近似

- 円盤全体を見るのではなくて、円盤のある場所に注目し、クローズアップして見る
- 注目する点を原点に、直交座標系
- 計算が少し楽になる



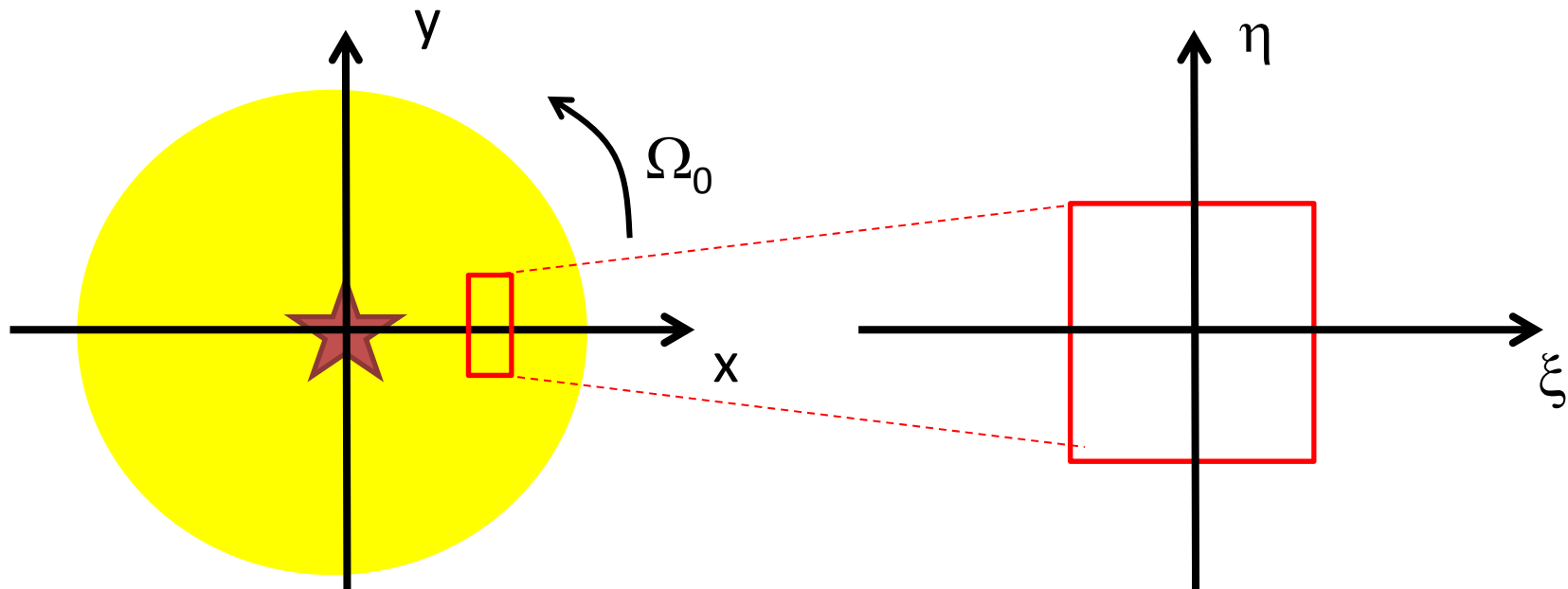
# 局所近似の定式化

半径 $r$ の位置に注目し、注目する点のまわりで展開:

$$x = r + \xi \quad y = \eta \quad r \gg \xi, \eta$$

座標系の回転角速度を、 $r$ の位置でのKepler角速度に取る

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \text{const}$$



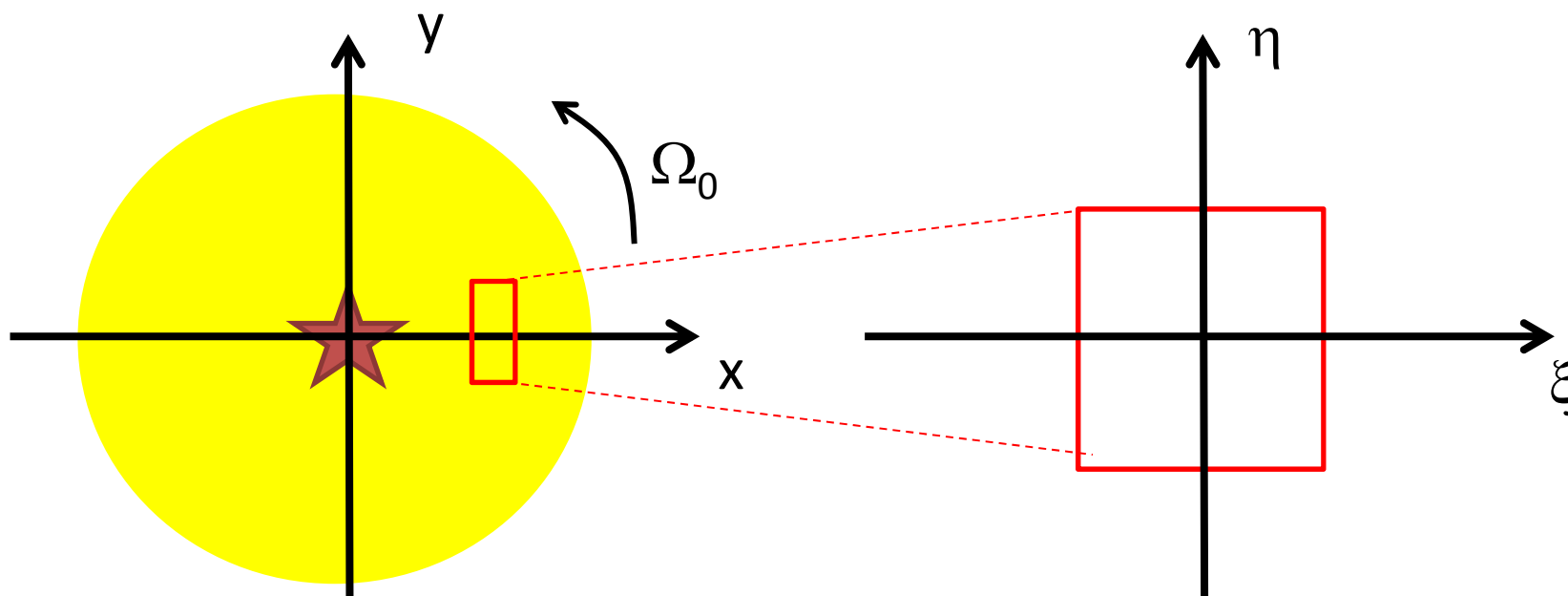


# 連続の式

- 局所近似をしても変化なし

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0$$

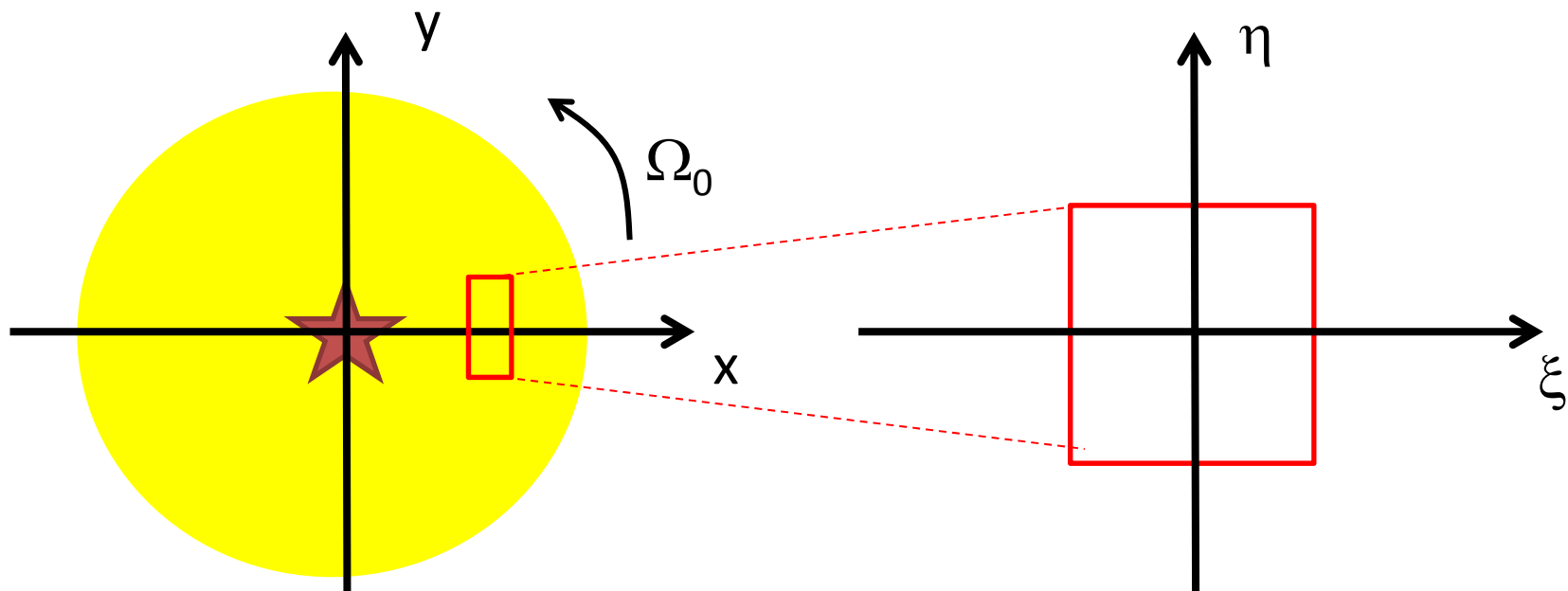
$$\longrightarrow \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Sigma v_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\Sigma v_{\eta}) = 0$$



# 運動方程式(x方向)

- 遠心力と中心星重力の差を計算 → 潮汐力

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_y - 2\Omega_0 v_y \\ = -\frac{c^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + \Omega_0^2 x - \frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}} x \end{aligned}$$



# 運動方程式(x方向)

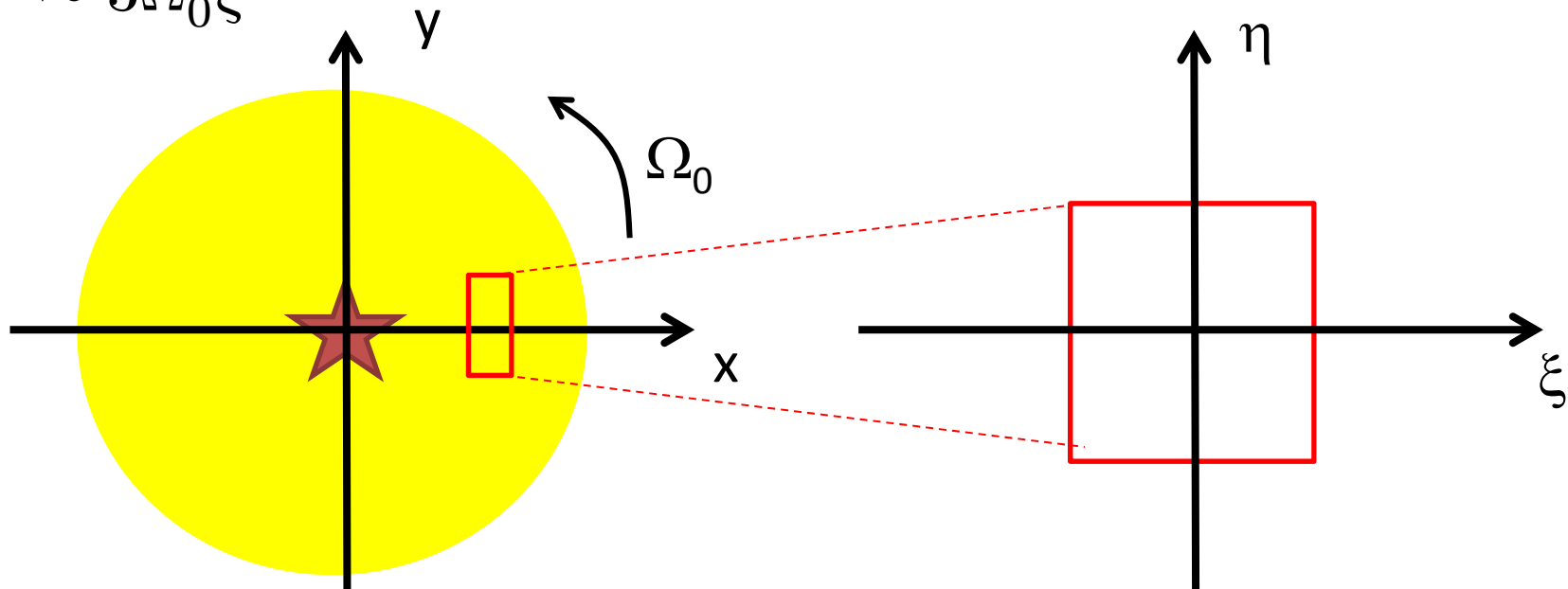
- 潮汐力項の計算

$$\Omega_0^2 (r + \xi) - \frac{GM(r + \xi)}{((r + \xi)^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

$$\sim \Omega_0^2 r \left(1 + \frac{\xi}{r}\right) - \frac{GM}{r^3} r \left(1 + \frac{\xi}{r}\right) \left(1 - 3\frac{\xi}{r}\right)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{GM}{r^3}$$

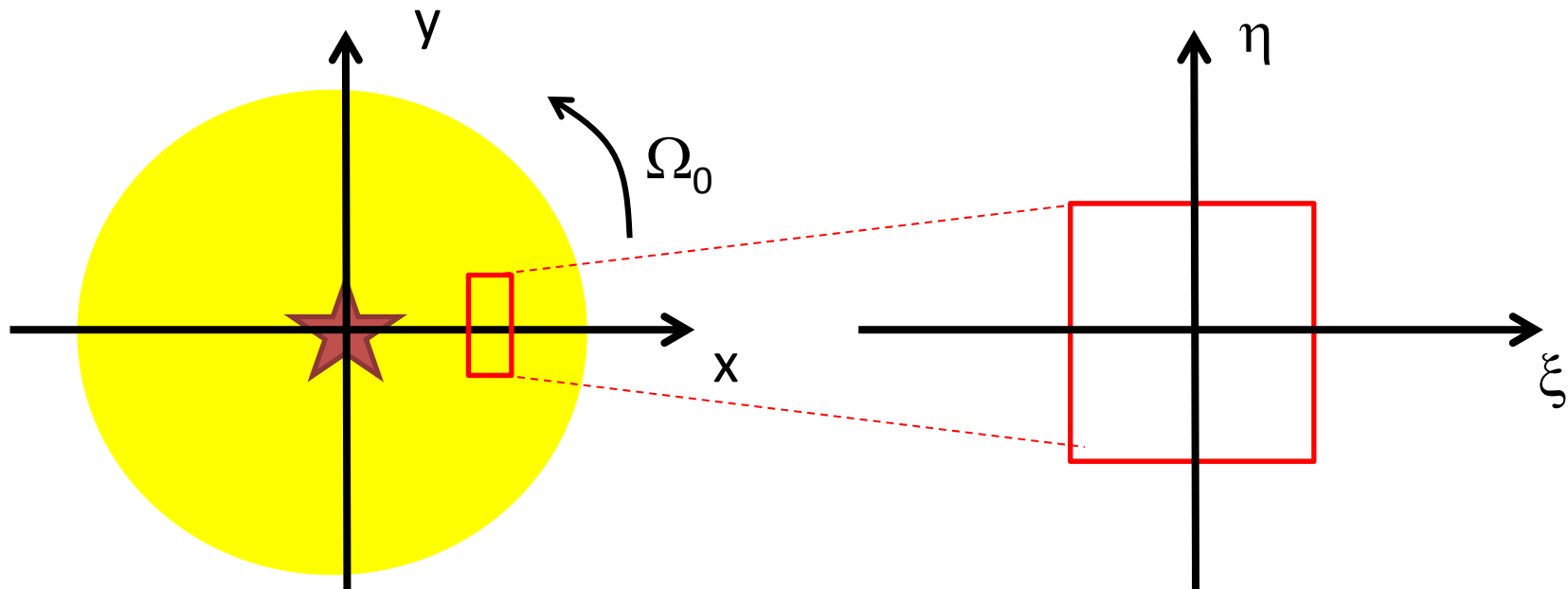
$$\sim 3\Omega_0^2 \xi$$



# 運動方程式(x方向)

- 局所近似における、x方向の運動方程式

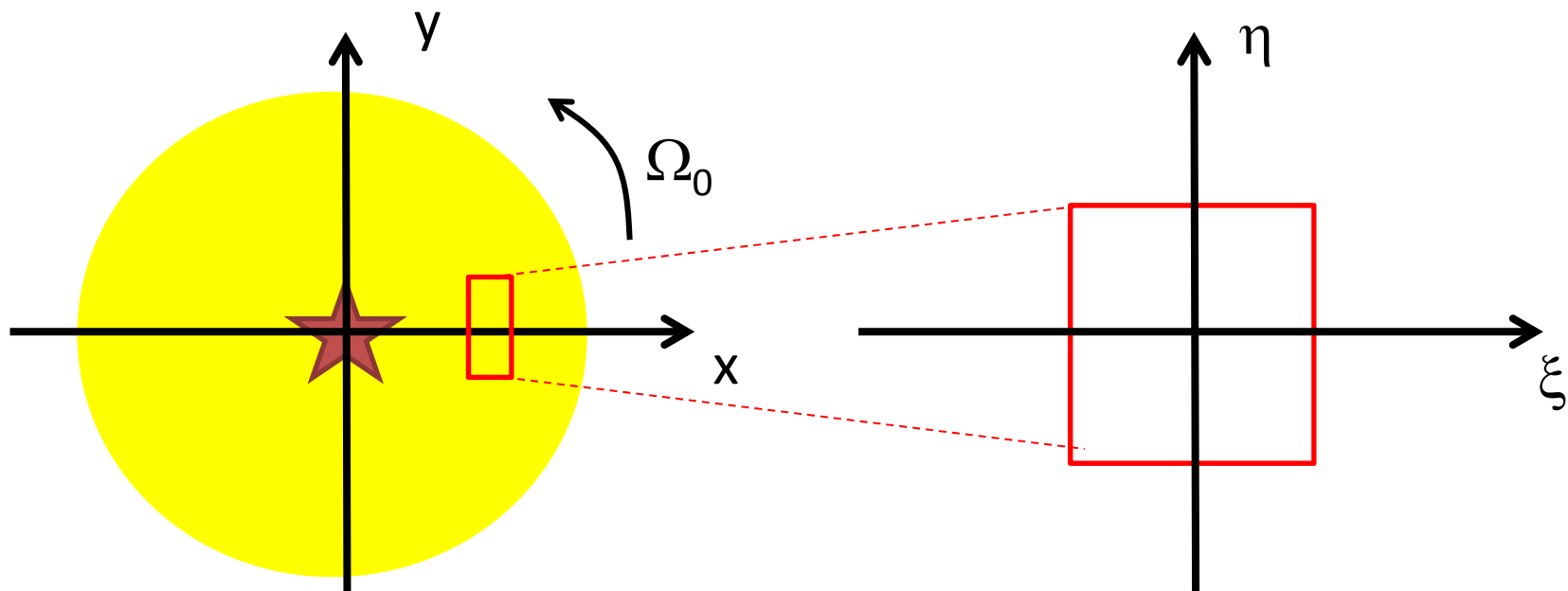
$$\frac{\partial v_\xi}{\partial t} + v_\xi \partial_\xi v_\xi + v_\eta \partial_\eta v_\xi - 2\Omega_0 v_\eta = -\frac{c^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} + 3\Omega_0^2 \xi$$



# 運動方程式 (y方向)

- x方向と同様の近似

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \partial_x v_y + v_y \partial_y v_y + 2\Omega_0 v_x \\ = -\frac{c^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial y} + \boxed{\Omega_0^2 y - \frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}} y} \end{aligned}$$



# 運動方程式 (y方向)

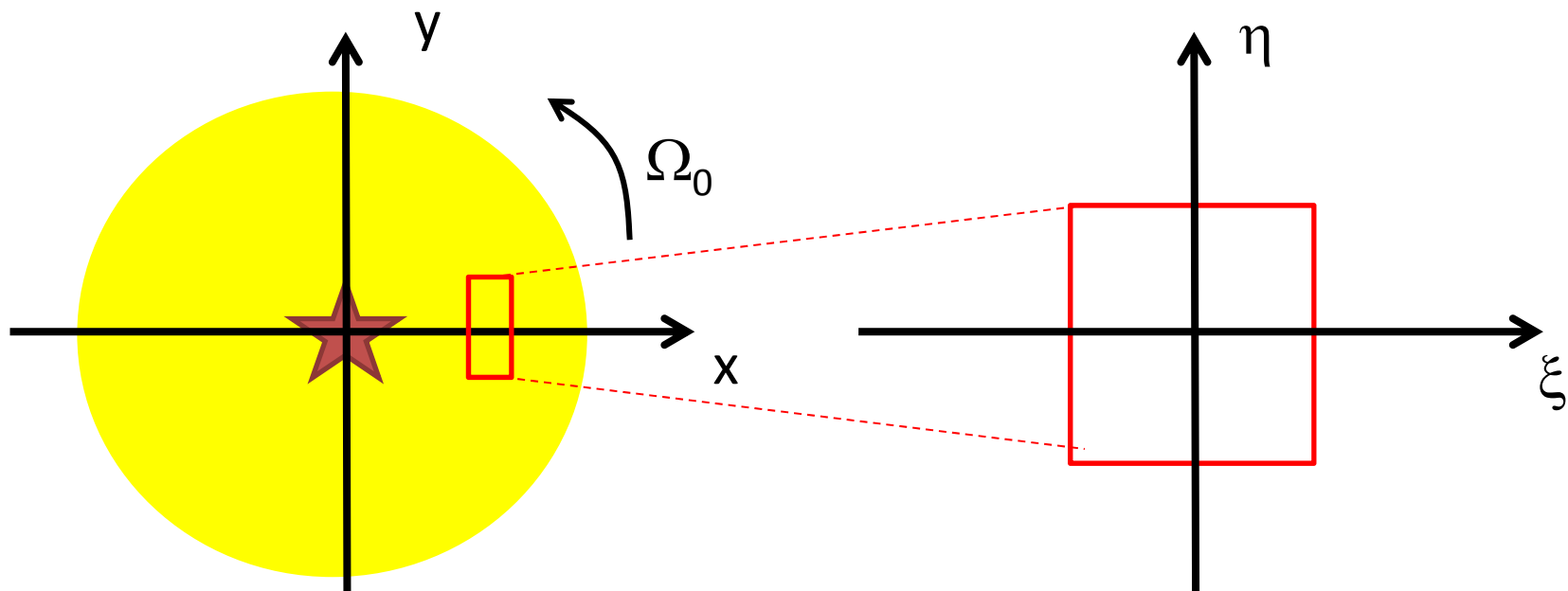
- 遠心力と重力の差の計算

$$\Omega_0^2 \eta - \frac{GM}{((r+\xi)^2 + \eta^2)^{3/2}} \eta$$

$$\sim \Omega_0^2 \eta - \frac{GM}{r^3} \eta \left(1 - 3\frac{\xi}{r}\right)$$

$$\sim \mathcal{O}(\eta\xi)$$

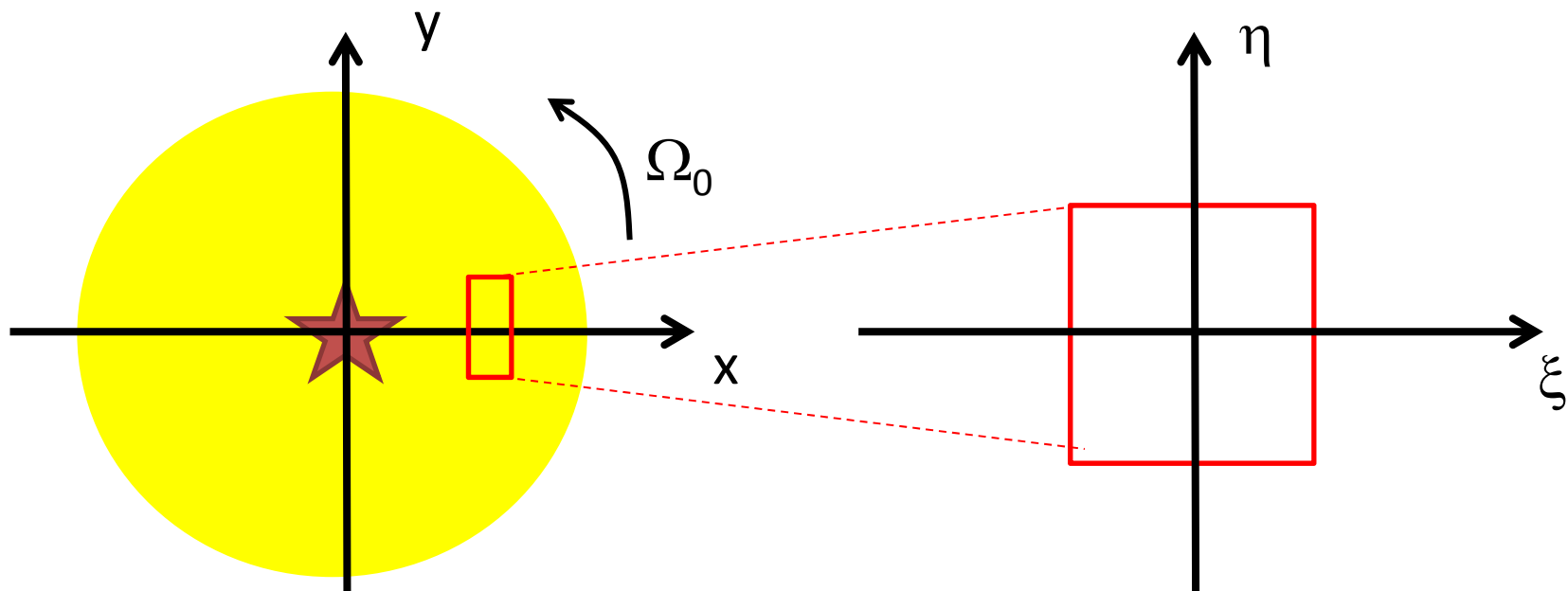
$$\Omega_0^2 = \frac{GM}{r^3}$$



# 運動方程式 (y方向)

- 局所近似における、y方向の運動方程式

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial t} + v_\xi \partial_\xi v_\eta + v_\eta \partial_\eta v_\eta + 2\Omega_0 v_\xi = -\frac{c^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta}$$



# 基礎方程式まとめ

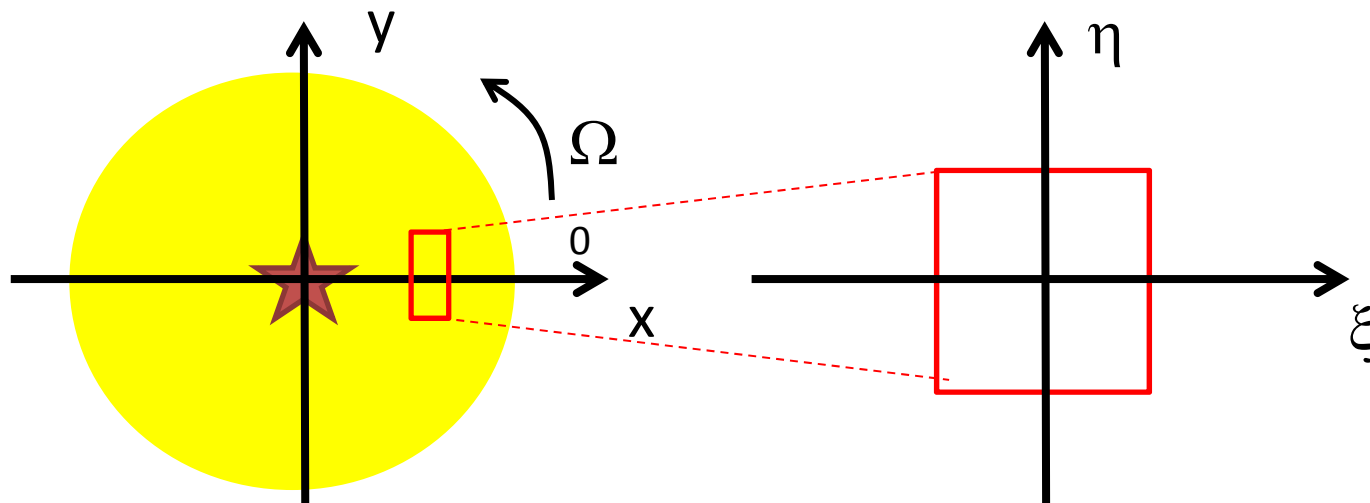
連続の式:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Sigma v_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\Sigma v_\eta) = 0$$

運動方程式:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial t} + v_\xi \partial_\xi v_\xi + v_\eta \partial_\eta v_\xi - 2\Omega_0 v_\eta = -\frac{c^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} + 3\Omega_0^2 \xi$$

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial t} + v_\xi \partial_\xi v_\eta + v_\eta \partial_\eta v_\eta + 2\Omega_0 v_\xi = -\frac{c^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \eta}$$





# 渦位保存則

- 運動方程式の回転を計算

$$\partial_\xi \left[ \frac{\partial v_\eta}{\partial t} + v_\xi \partial_\xi v_\eta + v_\eta \partial_\eta v_\eta + 2\Omega_0 v_\xi \right] - \partial_\eta \left[ \frac{\partial v_\xi}{\partial t} + v_\xi \partial_\xi v_\xi + v_\eta \partial_\eta v_\xi - 2\Omega_0 v_\eta \right] = 0$$

連続の方程式を用いて、変形していくと:

$$\left[ \partial_t + v_\xi \partial_\xi + v_\eta \partial_\eta \right] \frac{\partial_\xi v_\eta - \partial_\eta v_\xi + 2\Omega_0}{\Sigma} = 0$$

$\frac{(\nabla \times \mathbf{v})_z + 2\Omega_0}{\Sigma}$  が、流体粒子に沿って保存

# 目次

## 1. イントロダクション

- ✓ 原始惑星系円盤の基本構造
- ✓ 原始惑星系円盤の最新観測

## 2. 原始惑星系円盤における流体方程式

- ✓ 局所近似した流体方程式系
- ✓ 線型方程式の定式化

## 3. 原始惑星系円盤における波の伝搬と不安定性

- ✓ 軸対称モード
- ✓ 非軸対称モード(構造のない場合): 密度波理論
- ✓ 非軸対称モード(構造のある場合): ロスビー波不安定

# 軸対称定常流

- 動径方向に、潮汐力・圧力勾配・コリオリ力が釣り合った状態

動径方向の流れはなし:  $v_\xi = 0$

適当な面密度(圧力)分布:  $\Sigma_0(\xi)$

$$\cancel{\frac{\partial v_\xi}{\partial t}} + \cancel{v_\xi \partial_\xi v_\xi} + \cancel{v_\eta \partial_\eta v_\xi} - 2\Omega_0 v_\eta = -\frac{c^2}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} + 3\Omega_0^2 \xi$$

方位角方向の流れは:

$$v_\eta(\xi) \equiv v_0(\xi) = -\frac{3}{2}\Omega_0 \xi + \frac{c^2}{2\Omega_0 \Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{d\xi}$$

# 背景流の性質

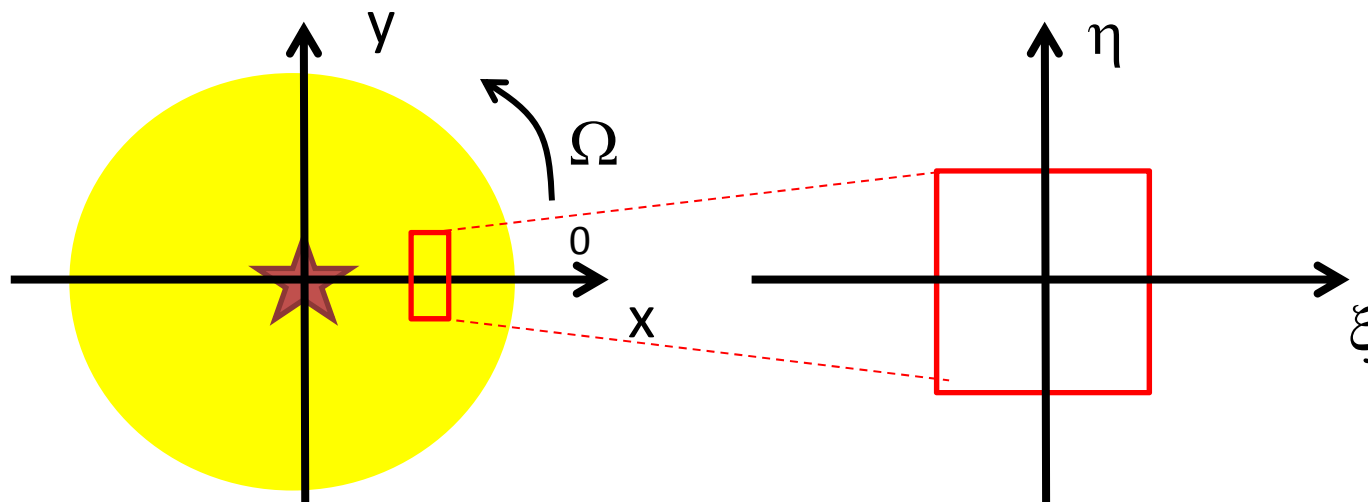
$$v_\eta(\xi) \equiv v_0(\xi) = \underbrace{-\frac{3}{2}\Omega_0^2\xi}_{\text{Kepler回転}} + \underbrace{\frac{c^2}{2\Omega_0\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{d\xi}}_{\text{圧力勾配による補正}}$$

Kepler回転

圧力勾配  
による補正

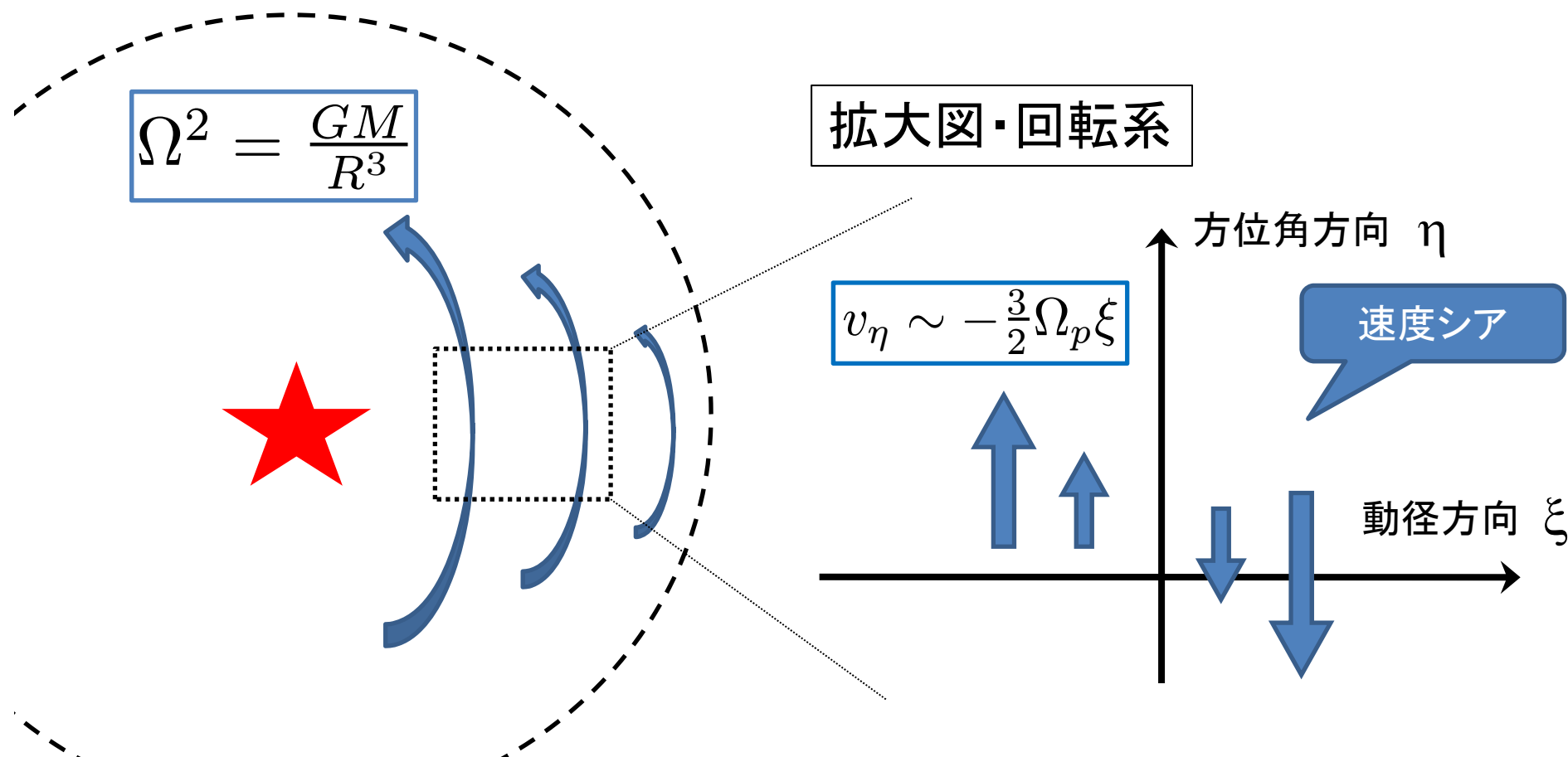
$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{GM}{r+\xi}} - \Omega_0 \left( (r+\xi)^2 + \eta^2 \right)^{1/2} \\ & \sim \sqrt{\frac{GM}{r}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\xi}{r} \right) - \Omega_0^2 r \left( 1 + \frac{\xi}{r} \right) \\ & \sim -\frac{3}{2}\Omega_0^2\xi \end{aligned}$$

内側が圧力高い  
→ Keplerより遅い



# シア流体としての原始惑星系円盤

- 中心星重力と遠心力のつり合いによる  
差動回転
- シアレートは、勝手に決めにくい



# 背景流の渦位

$$\frac{v'_0 + 2\Omega_0}{\Sigma_0} = \frac{\Omega_0/2 + c^2 (\log \Sigma_0)'' / 2\Omega_0}{\Sigma_0} \equiv \Gamma_0$$

速度摂動 → 圧力勾配の一階微分  
渦位摂動 → 圧力勾配の二階微分

# 「弱い」密度構造の影響

面密度が、動径方向に $\sim H$ くらいのスケールで変化していたとすると

Kepler回転からのずれの速度:

$$\frac{c^2}{2\Omega_0} (\log \Sigma_0)' \sim \frac{c^2}{2\Omega_0 H} \sim c \times \mathcal{O}(1) \ll v_K$$

渦位に対する影響:

$$\frac{v_0' + 2\Omega_0}{\Sigma_0} = \frac{\Omega_0/2 + c^2 (\log \Sigma_0)'' / 2\Omega_0}{\Sigma_0}$$

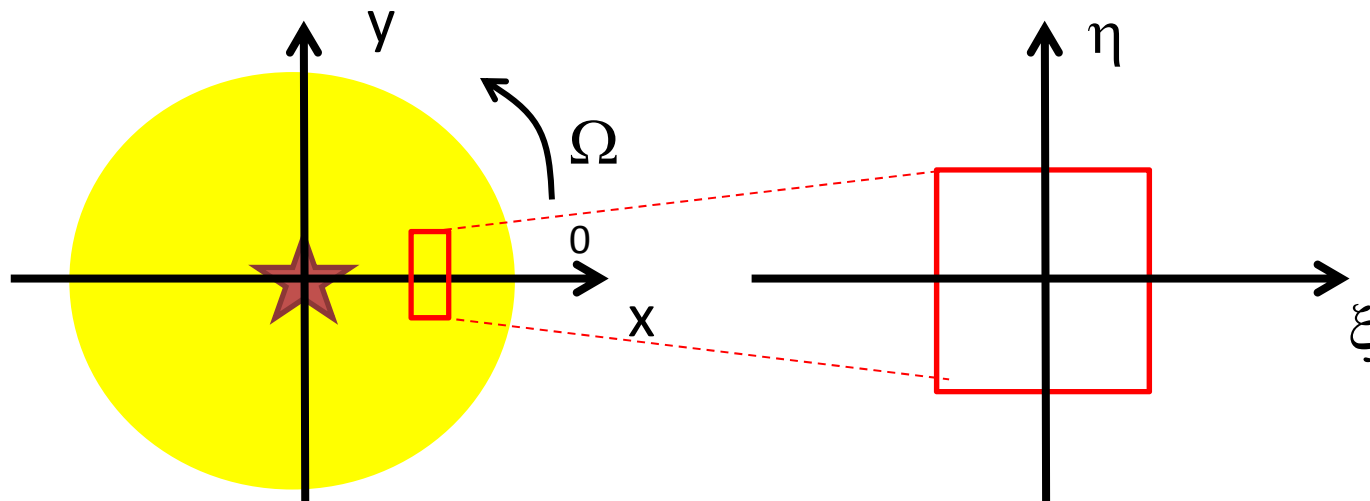
$$\text{渦位のずれ} \quad \frac{c^2 (\log \Sigma_0)''}{2\Omega_0} \sim \frac{c^2}{\Omega_0 H^2} \sim \mathcal{O}(\Omega)$$

速度はほとんどKepler速度だが  
渦位が大きく変化している可能性がある

# 線型摂動

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma(\xi, \eta) = \Sigma_0(\xi) + \delta\Sigma(\xi, \eta) \\ v_\xi(\xi, \eta) = \delta v_\xi(\xi, \eta) \\ v_\eta(\xi, \eta) = v_0(\xi) + \delta v_\eta(\xi, \eta) \end{array} \right.$$

として、線型摂動





# 摂動方程式

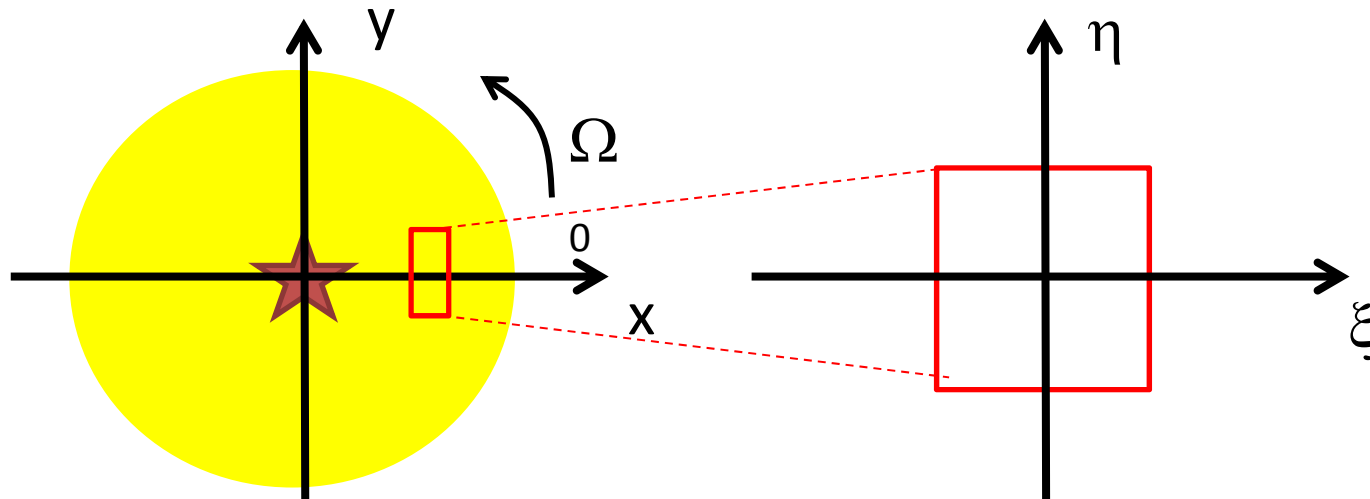
連続の式

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{d\xi} \delta v_\xi + \partial_\xi \delta v_\xi + \partial_\eta \delta v_\eta = 0$$

運動方程式

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \delta v_\xi - 2\Omega_0 \delta v_\eta = -c^2 \partial_\xi \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0}$$

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \delta v_\eta + \left( \frac{dv_0}{dx} + 2\Omega_0 \right) \delta v_\xi = -c^2 \partial_\eta \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0}$$



# 渦位の摂動方程式

$$\text{背景流の渦位: } \frac{v'_0 + 2\Omega_0}{\Sigma_0} = \frac{\Omega_0/2 + c^2 (\log \Sigma_0)'' / 2\Omega_0}{\Sigma_0} = \Gamma_0$$

渦位保存の式:

$$(\partial_t + v_\xi \partial_\xi + v_\eta \partial_\eta) \frac{\partial_\xi (v_0 + \delta v_\eta) - \partial_\eta \delta v_\xi + 2\Omega_0}{\Sigma_0 + \delta \Sigma} = 0$$

線型摂動を計算して:

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \frac{1}{\Sigma_0} \left[ \partial_\xi \delta v_\eta - \partial_\eta \delta v_\xi - (v'_0 + 2\Omega_0) \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0} \right] + \Gamma'_0 \delta v_\xi = 0$$

背景流による摂動渦位の移流

摂動流による背景渦位の移流

# 摂動方程式のまとめ

連続の式:

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0} + \frac{\Sigma'_0}{\Sigma_0} \delta v_\xi + \partial_\xi \delta v_\xi + \partial_\eta \delta v_\eta = 0$$

運動方程式:

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \delta v_\xi - 2\Omega_0 \delta v_\eta = -c^2 \partial_\xi \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0}$$

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \delta v_\eta + (v'_0 + 2\Omega_0) \delta v_\xi = -c^2 \partial_\eta \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0}$$

渦位保存(独立では無い):

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \frac{1}{\Sigma_0} \left[ \partial_\xi \delta v_\eta - \partial_\eta \delta v_\xi - (v'_0 + 2\Omega_0) \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0} \right] + \Gamma'_0 \delta v_\xi = 0$$

※背景流に関する関係式  $v'_0 + 2\Omega_0 = \frac{\Omega_0}{2} + \frac{c^2}{\Omega_0} \left( \frac{\Sigma'_0}{\Sigma_0} \right)' = \Sigma_0 \Gamma_0$

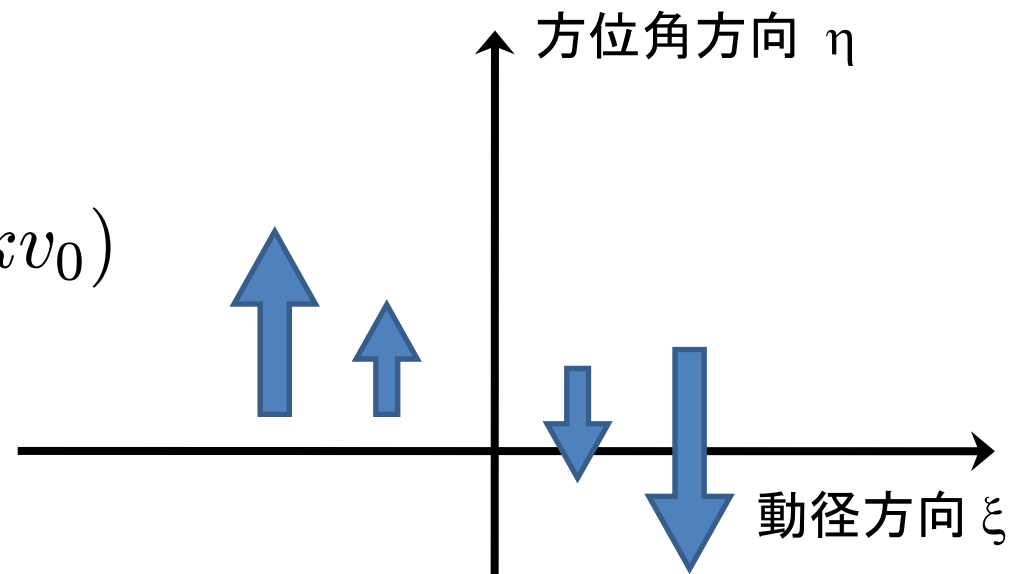
# フーリエ変換

- 背景流は軸対称・定常
  - 時間方向と、方位角(回転)方向にフーリエ変換

$$\delta f(t, \xi, \eta) = \delta f(\xi) e^{-i(\omega t - k\eta)}$$

$$\partial_t \rightarrow -i\omega \quad \partial_\eta \rightarrow ik$$

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \rightarrow -i(\omega - kv_0)$$



# パターン速度と共回転半径

$$\delta f(t, \xi, \eta) = \delta f(\xi) \exp \left[ -ik \left( \frac{\omega}{k} t - \eta \right) \right]$$

$\eta = \frac{\omega}{k} t$  で位相が一定

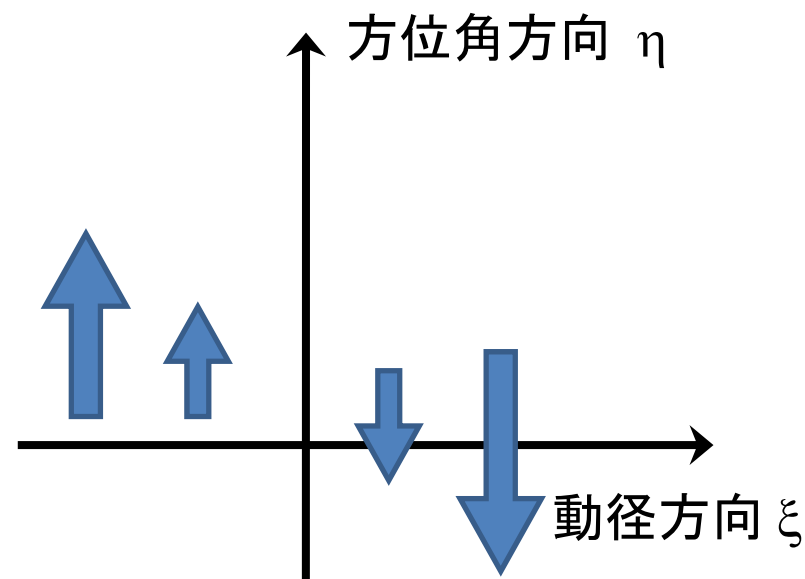
摂動の形が、速度  $\omega/k$  で方位角方向に移動

➡ パターン速度

共回転半径:

- パターン速度と背景流の速度が一致する半径

$$v_0(r_c) = \frac{\omega}{k}$$



# フーリエ変換された方程式系

連続の式:

$$-i(\omega - kv_0) \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0} + \frac{\Sigma'_0}{\Sigma_0} \delta v_\xi + \frac{d}{d\xi} \delta v_\xi + ik\delta v_\eta = 0$$

運動方程式:

$$-i(\omega - kv_0) \delta v_\xi - 2\Omega_0 \delta v_\eta = -c^2 \frac{d}{d\xi} \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0}$$

$$-i(\omega - kv_0) \delta v_\eta + (v'_0 + 2\Omega_0) \delta v_\xi = -c^2 ik \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0}$$

渦位保存:

$$-i(\omega - kv_0) \frac{1}{\Sigma_0} \left[ \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta - ik\delta v_\xi - (v'_0 + 2\Omega_0) \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0} \right] + \Gamma_0 \delta v_\xi = 0$$

これらをうまく組み合わせ、一変数の方程式を導く

# 方位角方向の速度でまとめた方程式

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\mathcal{D}}{\Sigma_0} \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta \right) \\ & - \frac{\mathcal{D}}{c^2 k \Sigma_0} \left[ -k(\omega - kv_0)^2 + 2v_0''(\omega - kv_0) \right. \\ & \quad + 2\Omega_0 k(v_0' + 2\Omega_0) + c^2 k^2 \left( k - \frac{\Sigma_0 \Gamma_0'}{\omega - kv_0} \right) \\ & \quad \left. - \frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}} (\omega - kv_0)(v_0' + 2\Omega_0) \right] \delta v_\eta = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = c^2 k \left( k - \frac{\Sigma_0 \Gamma_0'}{\omega - kv_0} \right) + (v_0' + 2\Omega_0)^2$$

※たぶん、もう少し綺麗になります

# 動径方向の速度でまとめた方程式

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\Sigma_0((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \frac{d\Psi}{d\xi} \right] \\ & + \left[ \frac{k}{2\Omega_0(\omega - kv_0)} \left( \frac{2\Omega_0\Gamma_0}{((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \right)' \right. \\ & \left. + \frac{(\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2 - 2\Omega_0\Sigma_0\Gamma_0}{c^2\Sigma_0((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \right] \Psi = 0 \end{aligned}$$

$$\Psi = \Sigma_0 \delta v_x$$



# 線型摂動の定式化：まとめ

- 背景流
  - コリオリ力・圧力勾配力・潮汐力(中心星重力と遠心力)の釣り合った、軸対称・定常の背景
  - インPUTは、背景の面密度分布
    - これで、背景流の速度分布や渦位分布が決まる
  - 基本的には、Kepler回転が圧力勾配の効果で少し歪んでいると思えば良いが、小さな面密度の変化でも、渦位分布には大きな影響がありうる
- 線型摂動
  - 基本的には、教科書通りの線型摂動
  - 時間方向・方位角方向にフーリエ変換し、動径方向の常微分方程式に落とす

# 目次

## 1. イントロダクション

- ✓ 原始惑星系円盤の基本構造
- ✓ 原始惑星系円盤の最新観測

## 2. 原始惑星系円盤における流体方程式

- ✓ 局所近似した流体方程式系
- ✓ 線型方程式の定式化

## 3. 原始惑星系円盤における波の伝搬と不安定性

- ✓ 軸対称モード
- ✓ 非軸対称モード(構造のない場合): 密度波理論
- ✓ 非軸対称モード(構造のある場合): ロスビー波不安定

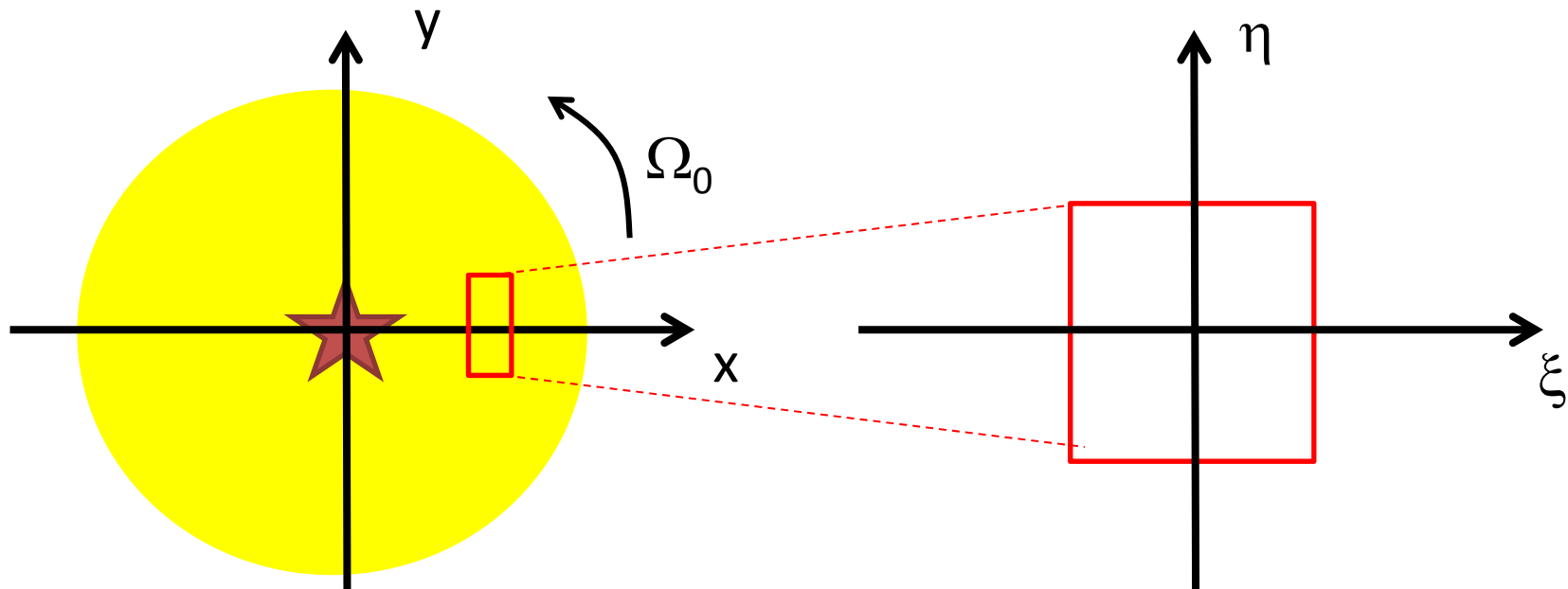
# 局所近似の復習

半径 $r$ の位置に注目し、注目する点のまわりで展開:

$$x = r + \xi \quad y = \eta \quad r \gg \xi, \eta$$

座標系の回転角速度を、 $r$ の位置でのKepler角速度に取る

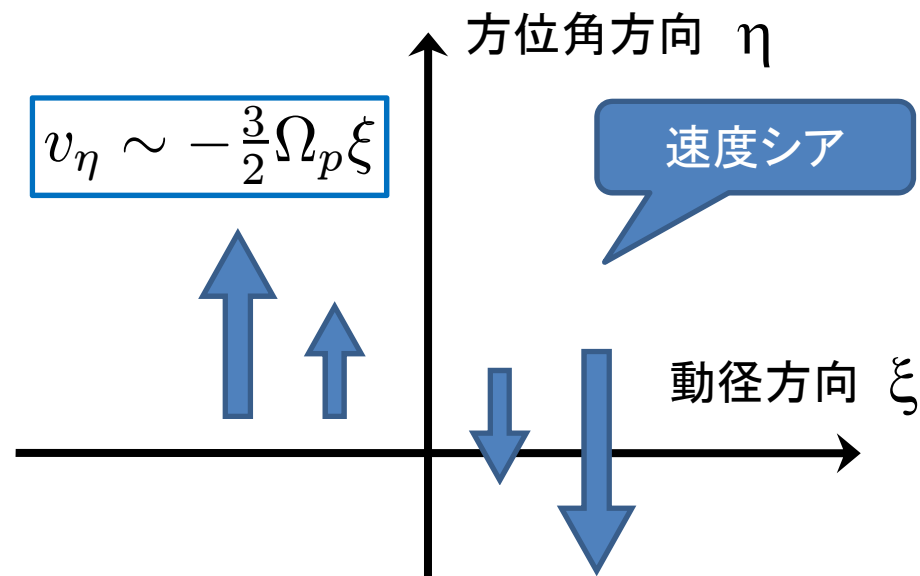
$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \text{const}$$



# 背景流の復習

$$\text{速度分布: } v_\eta(\xi) \equiv v_0(\xi) = -\frac{3}{2}\Omega_0^2\xi + \frac{c^2}{2\Omega_0\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{d\xi}$$

$$\text{渦位分布: } \frac{v'_0 + 2\Omega_0}{\Sigma_0} = \frac{\Omega_0/2 + c^2(\log \Sigma_0)''/2\Omega_0}{\Sigma_0} \equiv \Gamma_0$$



# 線型摂動(フーリエ変換後)の復習

連続の式:

$$-i(\omega - kv_0) \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0} + \frac{\Sigma'_0}{\Sigma_0} \delta v_\xi + \frac{d}{d\xi} \delta v_\xi + ik\delta v_\eta = 0$$

運動方程式:

$$-i(\omega - kv_0) \delta v_\xi - 2\Omega_0 \delta v_\eta = -c^2 \frac{d}{d\xi} \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0}$$

$$-i(\omega - kv_0) \delta v_\eta + (v'_0 + 2\Omega_0) \delta v_\xi = -c^2 ik \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0}$$

渦位保存:

$$-i(\omega - kv_0) \frac{1}{\Sigma_0} \left[ \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta - ik\delta v_\xi - (v'_0 + 2\Omega_0) \frac{\delta\Sigma}{\Sigma_0} \right] + \Gamma_0 \delta v_\xi = 0$$

これらをうまく組み合わせ、一変数の方程式を導く

# 動径方向の速度でまとめた 摂動方程式

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\Sigma_0((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \left[ \frac{k}{2\Omega_0(\omega - kv_0)} \left( \frac{2\Omega_0\Gamma_0}{((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \right)' + \frac{(\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2 - 2\Omega_0\Sigma_0\Gamma_0}{c^2\Sigma_0((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \right] \Psi = 0$$

$$\Psi = \Sigma_0 \delta v_x$$

# 軸対称モードの解析

- 軸対称モード:  $k=0$ のモード
  - かなり式が簡単になる
  - 非軸対称モードについても、なんとなくの示唆が得られる (WKB近似に近い)

# 軸対称モードの摂動方程式

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\Sigma_0((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \left[ \frac{k}{2\Omega_0(\omega - kv_0)} \left( \frac{2\Omega_0\Gamma_0}{((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \right)' + \frac{(\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2 - 2\Omega_0\Sigma_0\Gamma_0}{c^2\Sigma_0((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \right] \Psi = 0$$

k=0とおけば

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \frac{\omega^2 - \kappa^2}{c^2 \Sigma_0} \Psi = 0$$

ただし

$$\kappa^2 = 2\Omega_0(v_0' + 2\Omega_0) = 2\Omega_0 \left[ \frac{1}{2}\Omega_0 + \frac{c^2}{2\Omega_0} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{d\xi} \right) \right]$$

(エピサイクリック振動数)

適当な境界条件のもと、固有値 $\omega$ を求める問題



# 不安定性の起こるための必要条件

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \frac{\omega^2 - \kappa^2}{c^2 \Sigma_0} \Psi = 0 \quad \text{に、}\Psi^* \text{をかけて積分する}$$

$$\int d\xi \left\{ \Psi^* \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \frac{\omega^2 - \kappa^2}{c^2 \Sigma_0} \Psi^* \Psi \right\} = 0$$

表面項がゼロになっているとすれば(境界条件)

$$\omega^2 \int d\xi \frac{1}{c^2 \Sigma_0} |\Psi|^2 = \int d\xi \left[ \frac{1}{\Sigma_0} \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|^2 + \frac{\kappa^2}{c^2 \Sigma_0} |\Psi|^2 \right]$$

- ・ $\omega^2$ が実数
- ・不安定 ( $\omega^2 < 0$ ) のためには、 $\kappa^2$ が負になる点が必要  
(Rayleigh条件)

# Rayleigh条件

$$\kappa^2 = 2\Omega_0 \left[ \frac{1}{2}\Omega_0 + \frac{c^2}{2\Omega_0} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{d\xi} \right) \right] = \Omega_0^2 + c^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \log \Sigma_0$$

- ・面密度分布が、動径方向に上に凸（バンプ構造）であり
- ・面密度変化のスケールが  $c/\Omega_0 \sim H$  程度より短いこと

円盤のスケールハイトと同程度の太さの  
リングは不安定になりやすそう

※全角運動量を保ったまま流体を入れ替えたとき、よりエネルギーが低い方に行く

# 背景面密度が一定の場合

- 背景の面密度が一定ならば、動径方向にもフーリエ変換が可能

$$\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + \frac{\omega^2 - \kappa^2}{c^2} \Psi = 0$$

$\Psi \propto e^{ik_\xi \xi}$  として、以下の分散関係式を得る

$$\omega^2 = \kappa^2 + c^2 k_\xi^2$$

エピサイクリック振動数は、回転角速度に等しい:

$$\kappa^2 = 2\Omega_0 \left[ \frac{1}{2} \Omega_0 + \frac{c^2}{2\Omega_0} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{d\xi} \right) \right] = \Omega_0^2$$

# エピサイクル振動

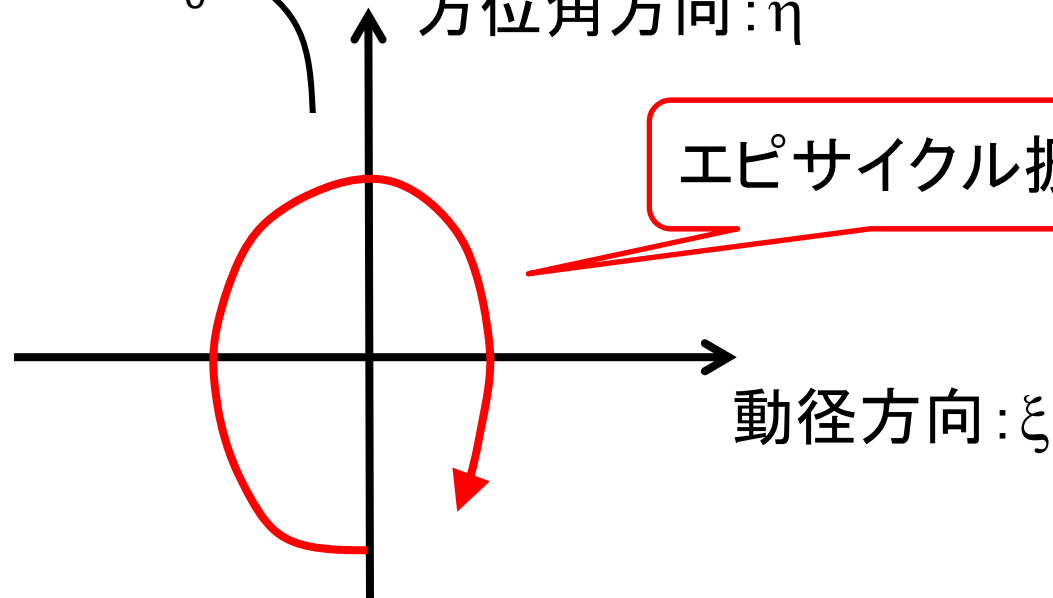
- 音速ゼロの場合(テスト粒子系)を考えると分かりやすい

$$\omega^2 = \kappa^2 + c^2 k_\xi^2 \rightarrow \kappa^2$$

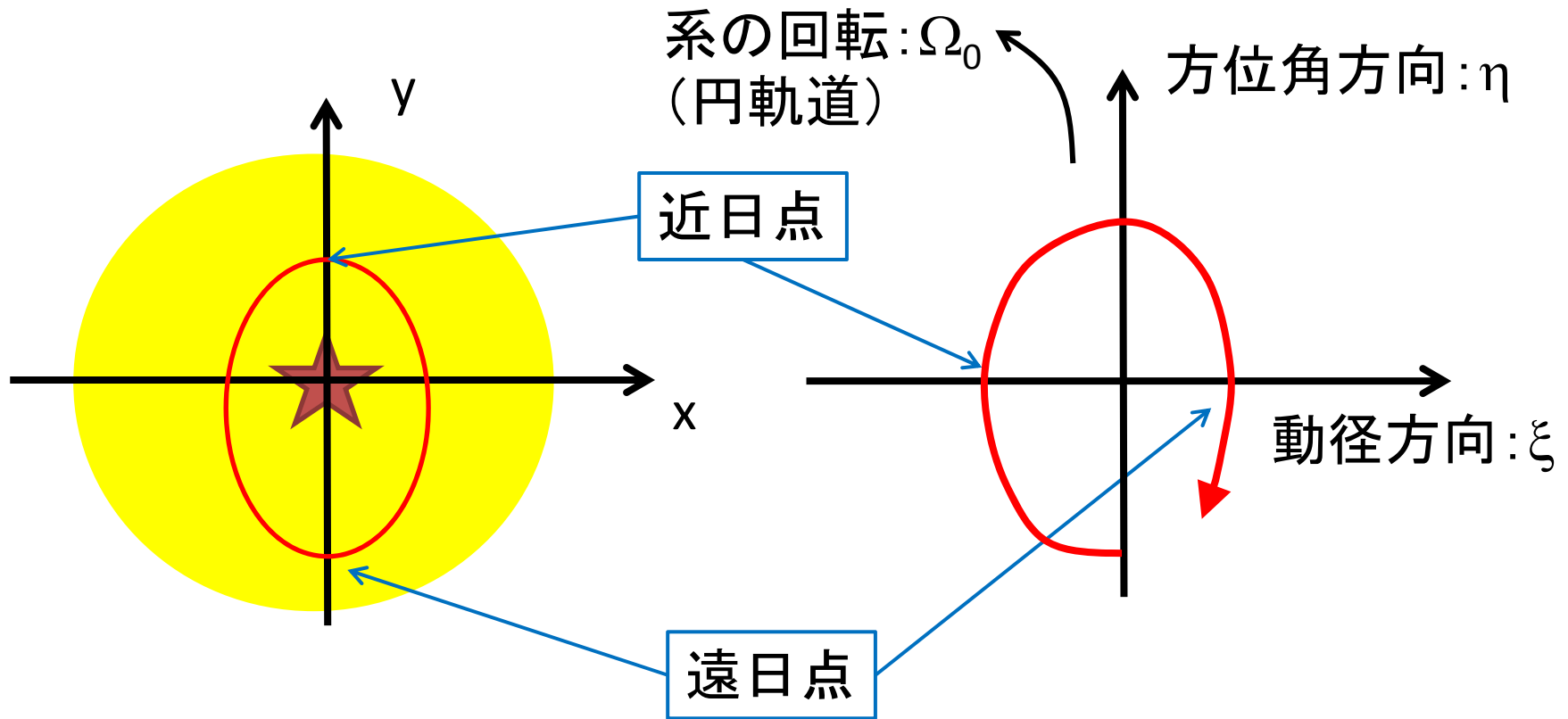
系の回転角速度: $\Omega_0$   
(円軌道)

方位角方向: $\eta$

エピサイクル振動



# エピサイクル振動＝楕円軌道



# 軸対称モードまとめ

- 背景面密度分布に構造がある場合
  - Rayleigh条件: 不安定の必要条件
  - 細いリングは、何かありそう
- 背景面密度分布に構造が無い場合
  - 波の分散関係式
  - 音波 + エピサイクル振動

# 目次

## 1. イントロダクション

- ✓ 原始惑星系円盤の基本構造
- ✓ 原始惑星系円盤の最新観測

## 2. 原始惑星系円盤における流体方程式

- ✓ 局所近似した流体方程式系
- ✓ 線型方程式の定式化

## 3. 原始惑星系円盤における波の伝搬と不安定性

- ✓ 軸対称モード
- ✓ 非軸対称モード(構造のない場合): 密度波理論
- ✓ 非軸対称モード(構造のある場合): ロスビー波不安定

# パターン速度と共回転半径（復習）

$$\delta f(t, \xi, \eta) = \delta f(\xi) \exp \left[ -ik \left( \frac{\omega}{k} t - \eta \right) \right]$$

$\eta = \frac{\omega}{k} t$  で位相が一定

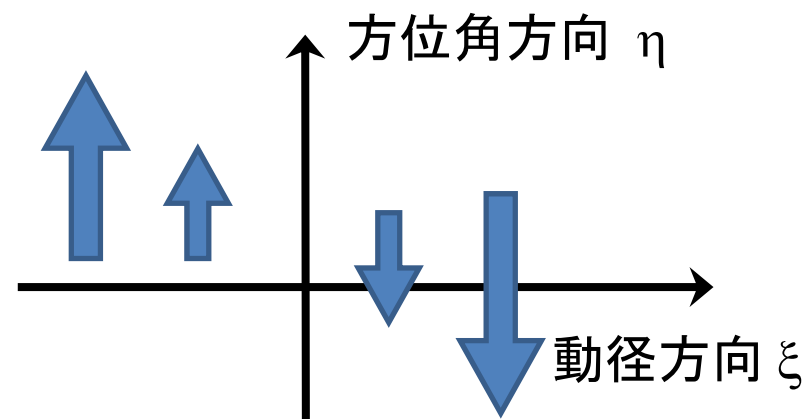
摂動の形が、速度  $\omega/k$  で方位角方向に移動

➡ パターン速度（正確には、慣性系での値）

共回転半径：

- パターン速度と背景流の速度が一致する半径

$$v_0(r_c) = \frac{\omega}{k}$$





# 方位角方向の速度でまとめた方程式

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\mathcal{D}}{\Sigma_0} \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta \right) \\ & - \frac{\mathcal{D}}{c^2 k \Sigma_0} \left[ -k(\omega - kv_0)^2 + 2v_0''(\omega - kv_0) \right. \\ & \quad + 2\Omega_0 k(v_0' + 2\Omega_0) + c^2 k^2 \left( k - \frac{\Sigma_0 \Gamma_0'}{\omega - kv_0} \right) \\ & \quad \left. - \frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}} (\omega - kv_0)(v_0' + 2\Omega_0) \right] \delta v_\eta = 0 \end{aligned}$$

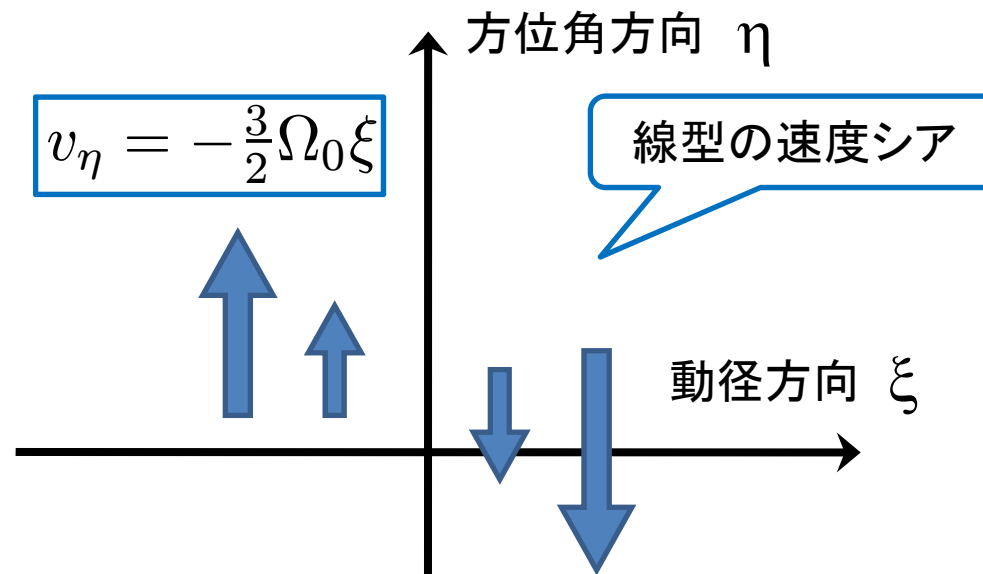
$$\mathcal{D} = c^2 k \left( k - \frac{\Sigma_0 \Gamma_0'}{\omega - kv_0} \right) + (v_0' + 2\Omega_0)^2$$

# 背景面密度が一定の場合

$$\Sigma_0 = \text{const}$$

$$v_0(\xi) = -\frac{3}{2}\Omega_0^2\xi + \frac{c^2}{2\Omega_0\Sigma_0}\frac{d\Sigma_0}{d\xi} = -\frac{3}{2}\Omega_0\xi$$

$$\Gamma_0 = \frac{v_0' + 2\Omega_0}{\Sigma_0} = \frac{\Omega_0}{2\Sigma_0} = \text{const}$$



# 背景面密度が一様の場合

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\mathcal{D}}{\Sigma_0} \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta \right) \\ & - \frac{\mathcal{D}}{c^2 k \Sigma_0} \left[ -k(\omega - kv_0)^2 + 2v_0''(\omega - kv_0) \right. \\ & \quad \left. + 2\Omega_0 k(v_0' + 2\Omega_0) + c^2 k^2 \left( k - \frac{\Sigma_0 \Gamma_0'}{\omega - kv_0} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}} (\omega - kv_0)(v_0' + 2\Omega_0) \right] \delta v_\eta = 0 \quad \Sigma_0 = \text{const} \text{ として} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta + \left[ \frac{(\omega + (3/2)\Omega_0 k\xi)^2}{c^2} - k^2 - \frac{\Omega_0^2}{c^2} \right] \delta v_\eta = 0$$

$$\text{軸対称の時との対応: } \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + \frac{\omega^2 - \kappa^2}{c^2} \Psi = 0$$

# 仮定

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta + \left[ \frac{(\omega + (3/2)\Omega_0 k \xi)^2}{c^2} - k^2 - \frac{\Omega_0^2}{c^2} \right] \delta v_\eta = 0$$

- 基本的には、境界条件に整合するような  $\omega$  の値を求める固有値問題
- 以下、しばらく  $\omega \sim 0$  となるような解を考える
  - 固有値の実部は、局所近似で注目する半径を変えることで、ゼロにすることができる
  - 共回転半径付近を考える、と言っても良い

# 量子力学との対応

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta + \left[ \frac{(\omega + (3/2)\Omega_0 k \xi)^2}{c^2} - \frac{\Omega_0^2}{c^2} - k^2 \right] \delta v_\eta = 0$$

$\omega \sim 0$  となるような解を考えると

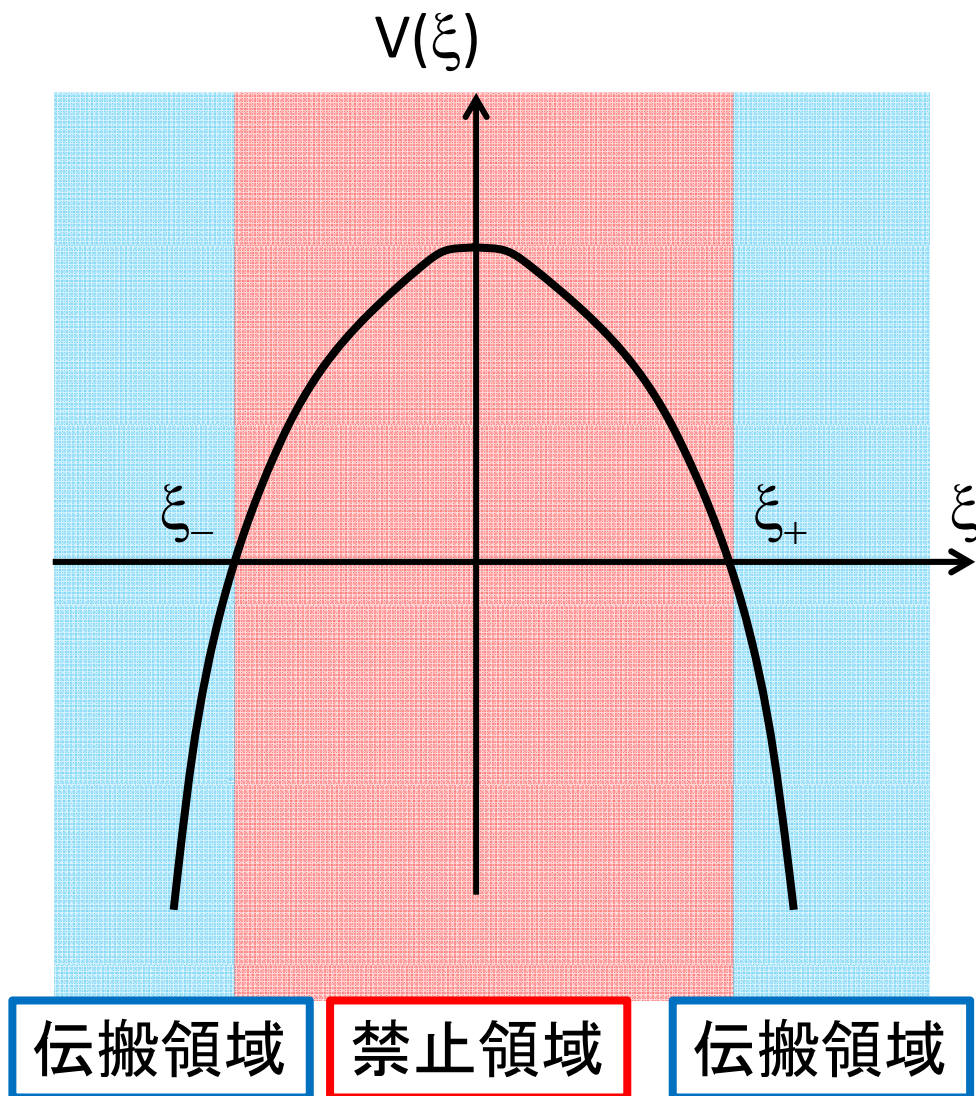
$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta - \left[ -\frac{9}{4} \frac{\Omega_0^2 k^2}{c^2} \xi^2 + \frac{\Omega_0^2 + c^2 k^2}{c^2} \right] \delta v_\eta = 0$$

1次元定常シュレーディンガー方程式  $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (E - V(x))\psi = 0$

と対応させられる

$$V(\xi) = -\frac{9}{4} \frac{\Omega_0^2 k^2}{c^2} \xi^2 + \frac{\Omega_0^2 + c^2 k^2}{c^2}$$

# 波の伝搬領域



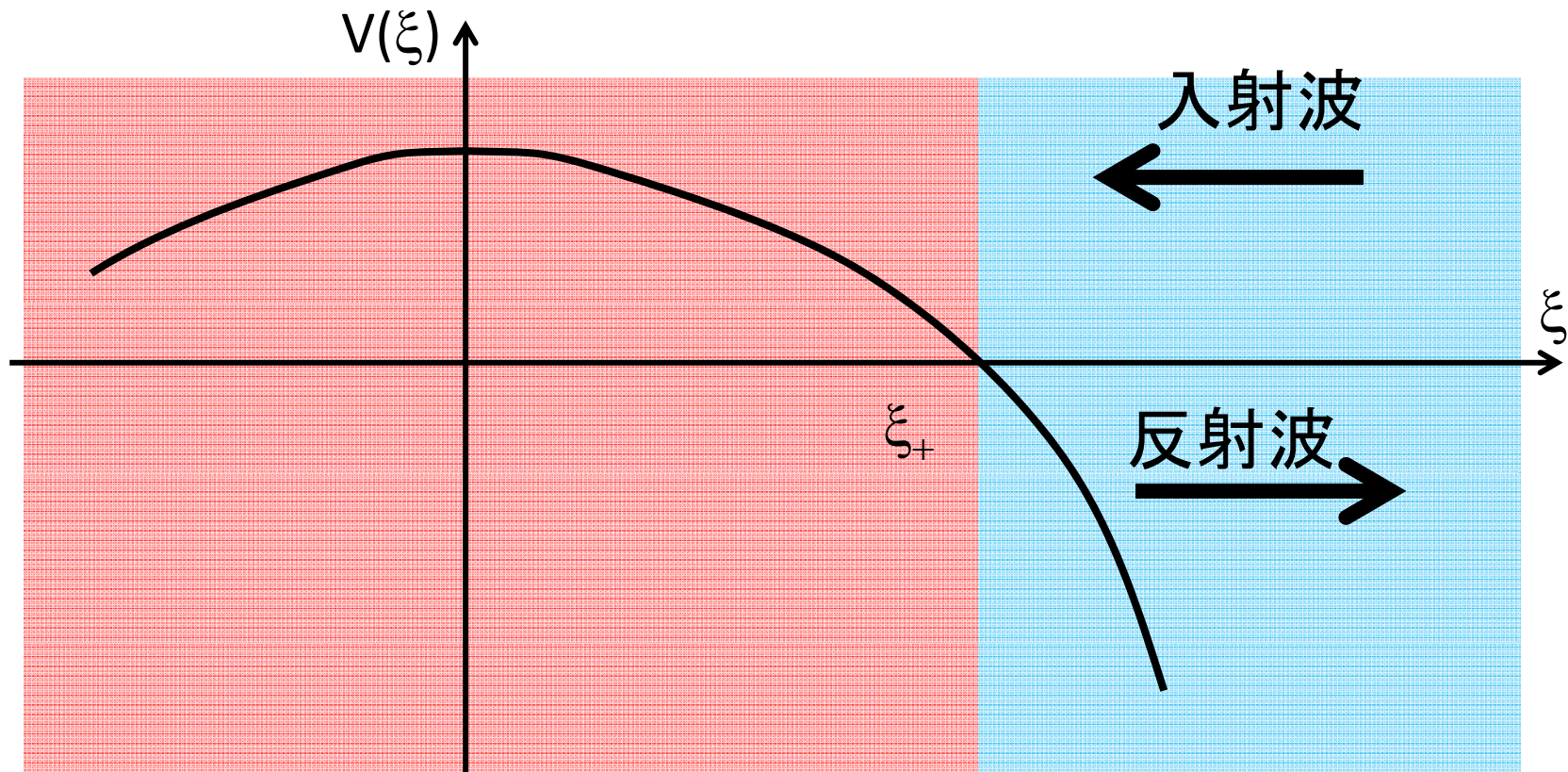
$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta - V(\xi) \delta v_\eta = 0$$

$$V(\xi) = -\frac{9}{4} \frac{\Omega_0^2 k^2}{c^2} \xi^2 + \frac{\Omega_0^2 + c^2 k^2}{c^2}$$

- 解の振る舞い:
- $V > 0$  ならば、指数関数的  
– 波の禁止領域
- $V < 0$  ならば、振動解  
– 波の伝搬領域
- 密度波と呼ばれる波

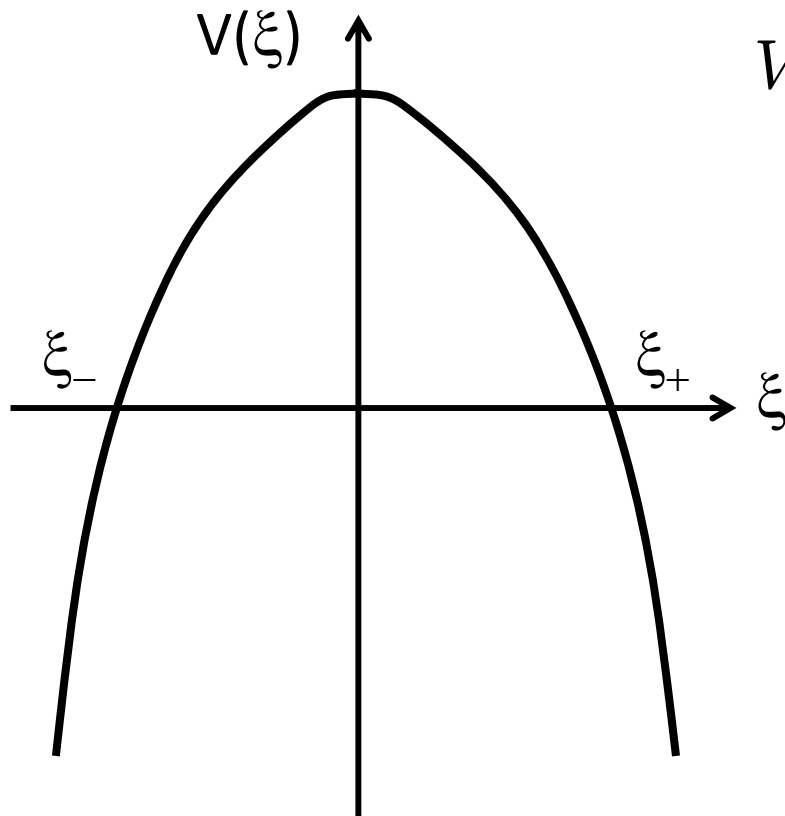
# 波の反射

- (ポテンシャルが十分に高ければ) 波は伝搬領域の端で反射される



# 実効Lindblad共鳴

- 波の伝搬領域と禁止領域の境界を、実効Lindblad共鳴と呼ぶ



$$V(\xi_{\pm}) = -\frac{9}{4} \frac{\Omega_0^2 k^2}{c^2} \xi_{\pm}^2 + \frac{\Omega_0^2 + c^2 k^2}{c^2} = 0$$

$$\xi_{\pm} = \pm \frac{2}{3} \frac{\sqrt{1 + k^2 H^2}}{k}$$

$k \rightarrow 0$  のとき

$\xi \rightarrow \infty$  (局所近似の限界)

$k \rightarrow \infty$  のとき

$\xi \rightarrow (2/3) H$



# 実効Lindblad共鳴の意味

- パターン速度とシア速度の差が音速程度

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta + \left[ \frac{(\omega + (3/2)\Omega_0 k \xi)^2}{c^2} - \frac{\Omega_0^2}{c^2} - k^2 \right] \delta v_\eta = 0$$



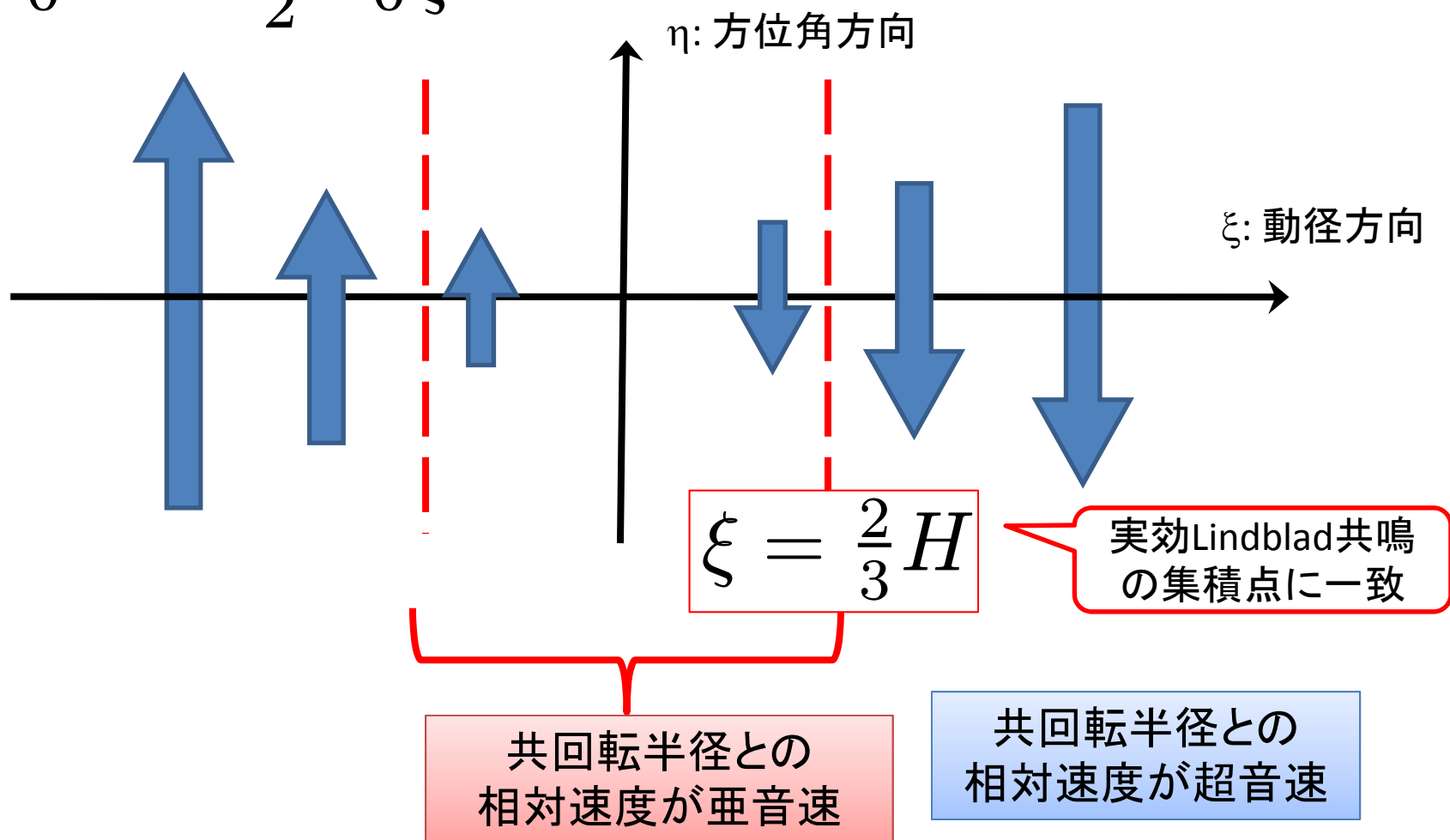
$$\left( \frac{\omega}{k} - v_0(\xi_\pm) \right)^2 = c^2 + \frac{\Omega_0^2}{k^2}$$

エピサイクル  
振動

波のような解は、波から見た背景流が、  
超音速であるような場所で生ずる

# 背景流と音速点

$$v_0 = -\frac{3}{2}\Omega_0\xi$$



# 波のWKB解

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta + \left[ \frac{(\omega + (3/2)\Omega_0 k \xi)^2}{c^2} - \frac{\Omega_0^2}{c^2} - k^2 \right] \delta v_\eta = 0$$

共回転半径から十分に遠方では、 $k\xi\Omega_0 \gg \omega$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta + \frac{9}{4} \frac{\Omega_0^2 k^2}{c^2} \xi^2 \delta v_\eta = 0$$

$\delta v_\eta = A(\xi)e^{i\phi(\xi)}$  として、振幅の変化はゆっくりだと近似する

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta = \left[ \cancel{A''} - A(\phi')^2 + i(2A'\phi' + A\phi'') \right] e^{i\phi}$$

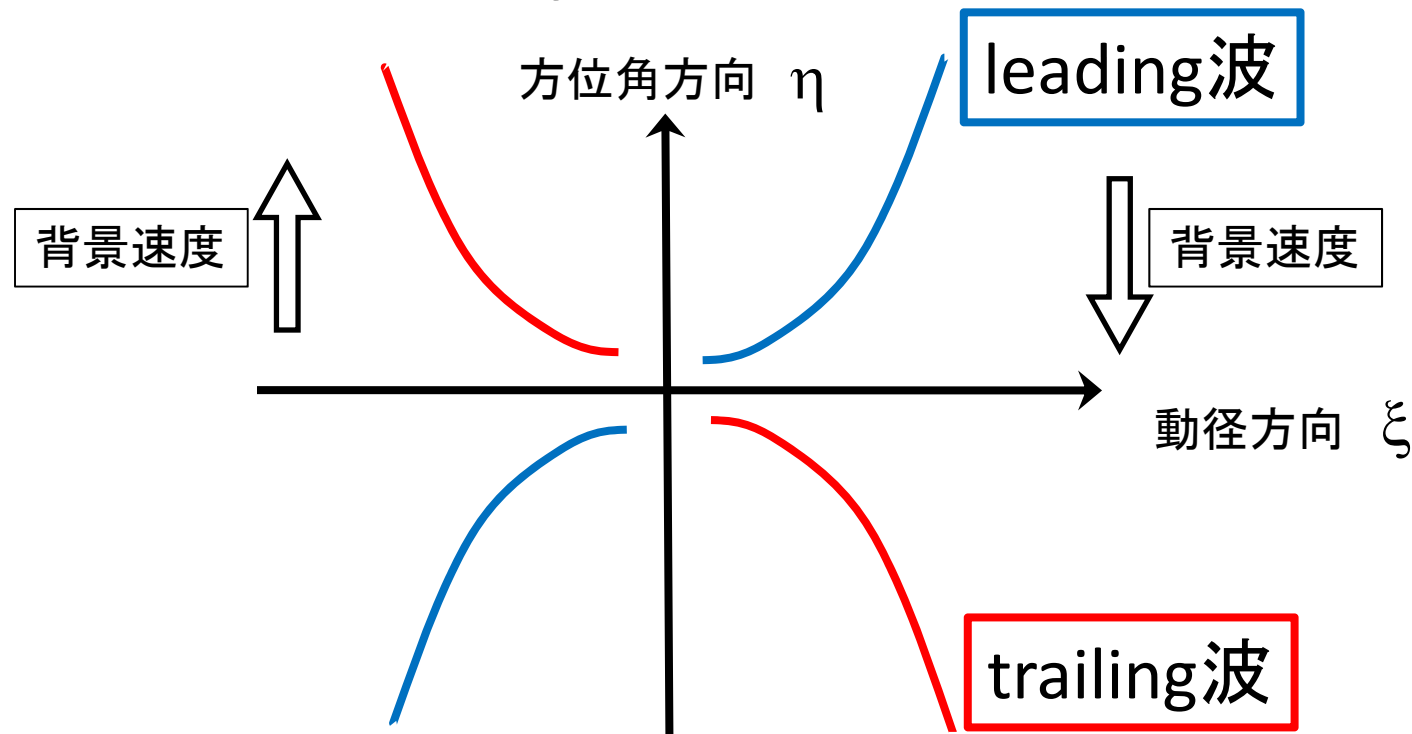
振幅と位相を求めると:  $\delta v_y \sim \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \exp \left[ \pm i \frac{3}{4} \frac{\Omega_0 k}{c} \xi^2 \right]$

# 波のWKB解

実空間の量に直すと:

$$\delta v_\eta(\xi, \eta) \sim \delta v_\eta(\xi) e^{ik\eta} \sim \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \exp \left[ ik \left( \eta \pm \frac{3}{4} \frac{\Omega_0}{c} \xi^2 \right) \right]$$

$\eta = \mp \frac{3}{4} \frac{\Omega_0}{c} \xi^2$  の上で位相が一定



# 超音速定常流としての解釈

- 密度波が背景流によって「流される」

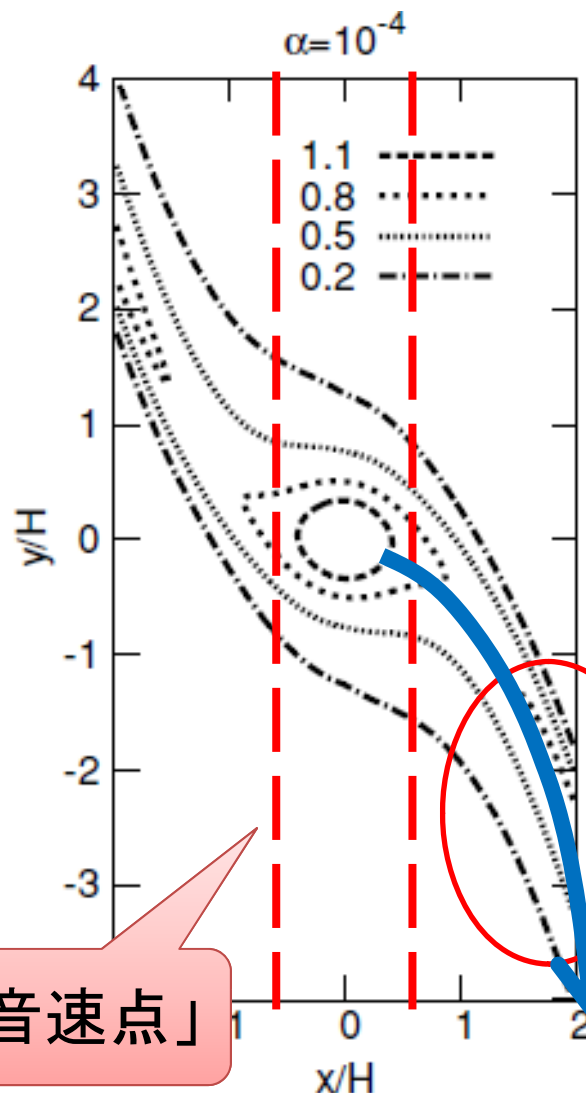
二次元超音速定常流の特性曲線:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{v_\xi v_\eta \pm c \sqrt{v^2 - c^2}}{v_\xi^2 - c^2}$$

Landau & Lishitz

$$v_\xi = 0, \quad v_\eta = -\frac{3}{2} \Omega_0 \xi$$

$$\eta = -\text{sgn}(x) \frac{3}{4} \frac{\Omega_0}{c} \xi^2$$



「音速点」

情報伝達

情報伝達を考えると、trailingがより「自然」な波

# 波のフラックス流入と不安定性

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta + \left[ \frac{(\omega + (3/2)\Omega_0 k \xi)^2}{c^2} - \frac{\Omega_0^2}{c^2} - k^2 \right] \delta v_\eta = 0$$

$\delta v_\eta^*$  を掛け、 $\xi$  方向に  $\xi_{\text{in}}$  から  $\xi_{\text{out}}$  まで積分し、虚部を取る

$$\delta v_\eta^* \frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta + \left[ \frac{(\omega + (3/2)\Omega_0 k \xi)^2}{c^2} - \frac{\Omega_0^2}{c^2} - k^2 \right] |\delta v_\eta|^2 = 0$$

$$\delta v_\eta^* \frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\eta = \frac{d}{d\xi} \left( \delta v_\eta \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta \right) - \left| \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta \right|^2 \quad \text{に注意し、}$$

$$\omega = \omega_r + i\gamma \quad \gamma: \text{不安定の成長率} \quad \text{として}$$

$$\Im \int_{\xi_{\text{in}}}^{\xi_{\text{out}}} d\xi \frac{d}{d\xi} \left( \delta v_\eta^* \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta \right) + \int_{\xi_{\text{in}}}^{\xi_{\text{out}}} d\xi \frac{2\gamma}{c^2} \left( \omega_r + \frac{3}{2} \Omega_0 k \xi \right) |\delta v_\eta|^2 = 0$$

# 波のフラックス流入と不安定性

ここから、成長率(がもしあれば)

$$\gamma = - \left[ \Im \left( \delta v_\eta \frac{d}{d\eta} \delta v_\eta \right)_{\xi_{\text{out}}} - \Im \left( \delta v_\eta \frac{d}{d\eta} \delta v_\eta \right)_{\xi_{\text{in}}} \right] \frac{c^2}{2 \int d\xi (\omega_r + (3/2)\Omega_0 k\xi) |\delta v_\eta|^2}$$

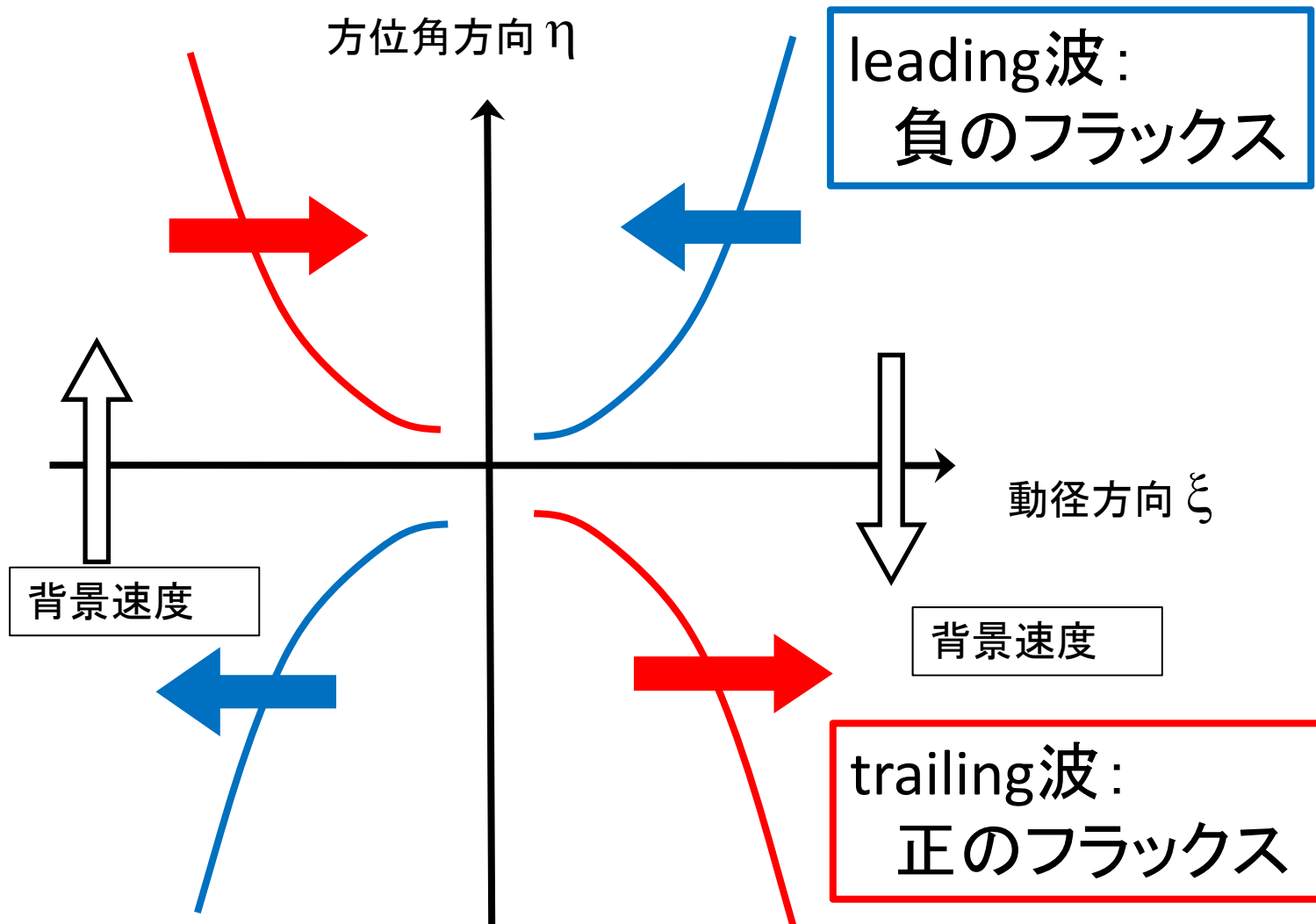
が正になっていなければならない

ここで:

$$\Im \left( \delta v_\eta \frac{d}{d\eta} \delta v_\eta \right)$$

はWKB領域で、波の角運動量フラックスに比例する量

# 波の持つフラックス

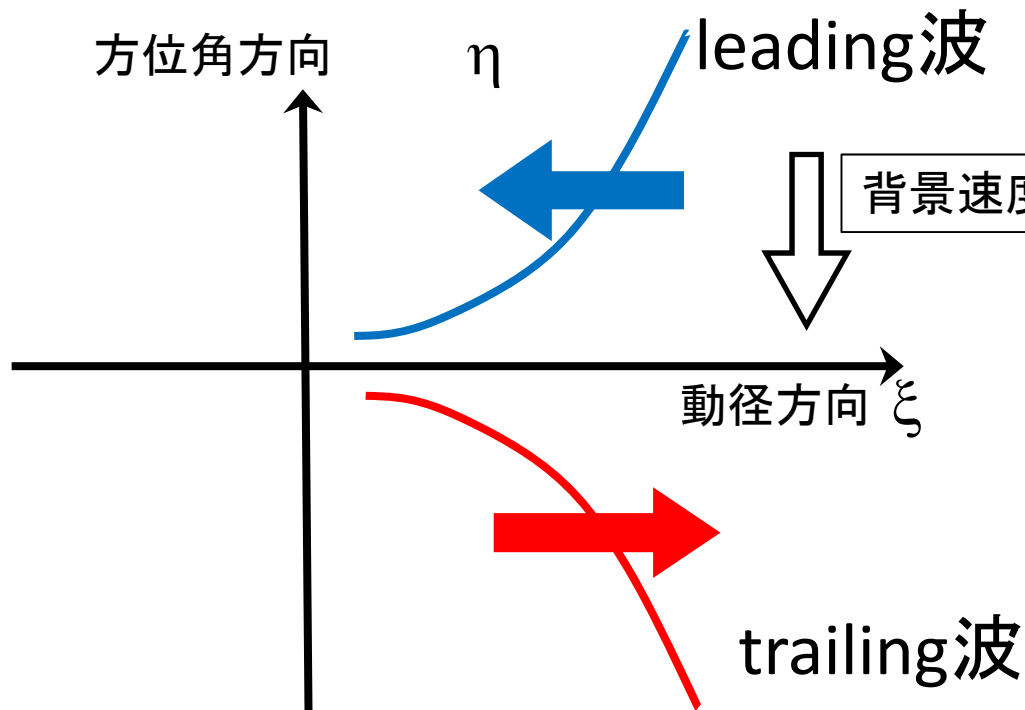




# 波の不安定性

不安定が起こるためには

$$- \left[ \Im \left( \delta v_\eta \frac{d}{d\eta} \delta v_\eta \right)_{\xi_{\text{out}}} - \Im \left( \delta v_\eta \frac{d}{d\eta} \delta v_\eta \right)_{\xi_{\text{in}}} \right] \frac{c^2}{2 \int d\xi (\omega_r + (3/2)\Omega_0 k\xi) |\delta v_\eta|^2} > 0$$



$\xi > 0$  の領域を考えると

$$\Im \left( \delta v_\eta \frac{d}{d\eta} \delta v_\eta \right)_{\xi_{\text{out}}} < 0$$

不安定になるには、  
leading波の注入が必要  
→ 通常は起こらない

# まとめ：背景面密度が一様な場合

- 非軸対称モードの基本的性質
  - 円盤に波の減衰領域と伝搬領域が現れる
  - 伝搬領域の波：密度波
  - WKB解から、波の形が求まる
    - leading 波とtrailing 波の存在
    - trailing波が、より「自然」な波
- 密度波の不安定性
  - leading波の注入が必要
  - 反射壁などが無いと、起こりにくそう

# 目次

## 1. イントロダクション

- ✓ 原始惑星系円盤の基本構造
- ✓ 原始惑星系円盤の最新観測

## 2. 原始惑星系円盤における流体方程式

- ✓ 局所近似した流体方程式系
- ✓ 線型方程式の定式化

## 3. 原始惑星系円盤における波の伝搬と不安定性

- ✓ 軸対称モード
- ✓ 非軸対称モード(構造のない場合): 密度波理論
- ✓ 非軸対称モード(構造のある場合): ロスビー波不安定

# 背景面密度が構造を持つ場合

- 全て一般的に計算をしていくことは大変
- 不安定の必要条件を(近似的に)求める
- 非圧縮の場合の不安定性を理解する
- 背景が一定の場合に得られた示唆
  - 密度波はかなり安定そう
  - 何か起こるとしたら、波の減衰領域だろう

# 動径方向の速度でまとめた 摂動方程式

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\Sigma_0((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \left[ \frac{k}{2\Omega_0(\omega - kv_0)} \left( \frac{2\Omega_0\Gamma_0}{((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \right)' + \frac{(\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2 - 2\Omega_0\Sigma_0\Gamma_0}{c^2\Sigma_0((\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2)} \right] \Psi = 0$$

$$\Psi = \Sigma_0 \delta v_x$$

振動数  $\omega$  に対する固有値問題

$$\omega = \omega_r + i\gamma$$

# 不安定性の必要条件

- 少なくとも、中立安定な状態が無ければ、不安定性は存在しないはず
  - 中立安定は  $\gamma=0$  に対応
- 波の減衰領域に注目する
  - 波の減衰領域 = 共回転付近

$$\omega - kv_0 = (\omega_r - kv_0) + i\gamma \sim 0$$

共回転付近でゼロ

中立安定状態ではゼロ

# 不安定性の必要条件

$(\omega - kv_0)^2 - c^2 k^2 \sim -c^2 k^2$  と近似すると

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Psi}{d\xi} \right] + \left[ \frac{k}{\omega - kv_0} \Gamma'_0 - \frac{c^2 k^2 + 2\Omega_0 \Sigma_0 \Gamma_0}{c^2 \Sigma_0} \right] \Psi = 0$$

$\Psi^*$  をかけて、 $\xi$  方向に積分する。**表面項を落とすと**

$$\int d\xi \frac{1}{\Sigma_0} \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|^2 + \int d\xi \frac{c^2 k^2 + 2\Omega_0 \Sigma_0 \Gamma_0}{c^2 \Sigma_0} |\Psi|^2 = \int d\xi \frac{k\Gamma'_0}{\omega - kv_0} |\Psi|^2$$

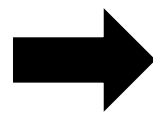
虚部を取って

$$\gamma \int d\xi \frac{k\Gamma'_0}{|\omega - kv_0|^2} |\Psi|^2 = 0$$

leading波の注入の話と  
違う部分

# 不安定性の必要条件

$$\gamma \int d\xi \frac{k\Gamma'_0}{|\omega - kv_0|^2} |\Psi|^2 = 0$$



$\gamma$  がゼロでないためには、背景渦位の微分  $\Gamma'_0$  が符号を変える必要がある

- このLovelace条件が、(なんとなく)不安定性の条件である(かのように)使われている
- 実際、それなりに良い目安にはなっている
- 共回転付近に注目した解析
  - 波の減衰領域に注目した解析



# 実際に不安定解を求められるか？

- 一般的にやるのはしんどそう
  - 小野君がやりました(しかも局所近似なし)
- 背景が構造を持つ場合、共回転付近に注目すると不安定性が何かありそう
  - 共回転付近は、波の減衰領域
  - 共回転付近は、「亜音速」領域
- 非圧縮近似で考える

# 基礎方程式

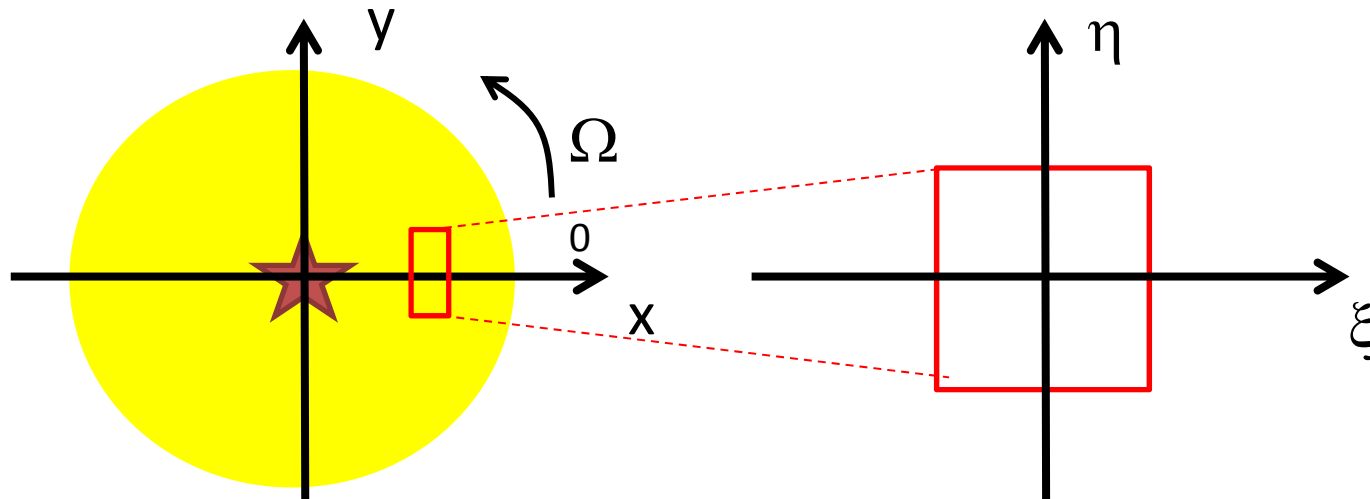
連続の式:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} = 0$$

運動方程式:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial t} + v_\xi \partial_\xi v_\xi + v_\eta \partial_\eta v_\xi - 2\Omega_0 v_\eta = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + 3\Omega_0^2 \xi$$

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial t} + v_\xi \partial_\xi v_\eta + v_\eta \partial_\eta v_\eta + 2\Omega_0 v_\xi = -\frac{\partial P}{\partial \eta}$$



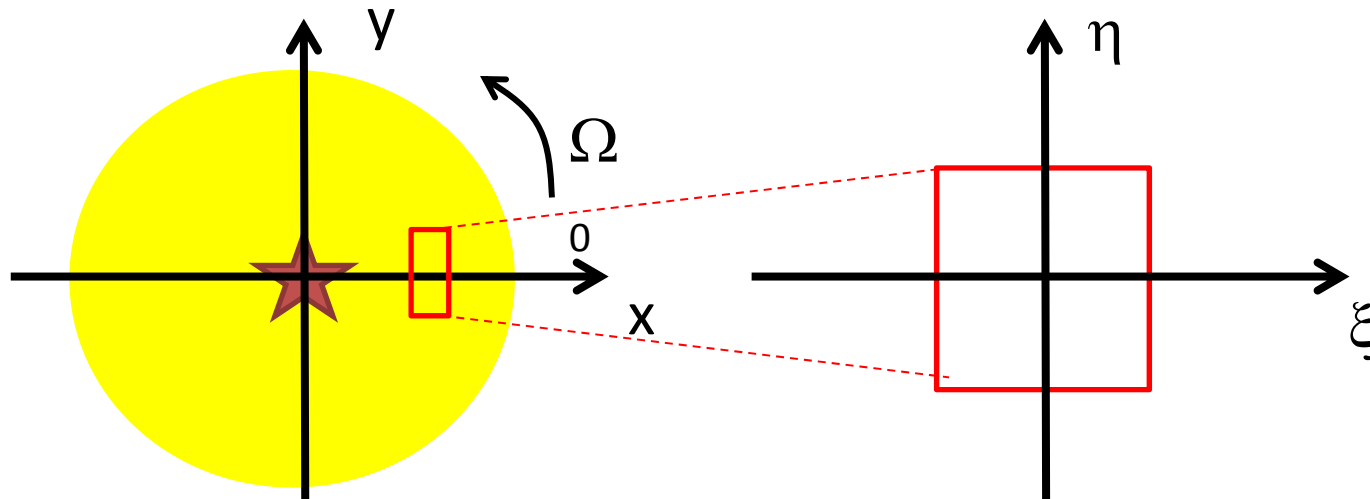
# 背景流

背景流の圧力が、動径方向の構造を持っているものとする

$$v_{\eta}(\xi) \equiv v_0(\xi) = \underbrace{-\frac{3}{2}\Omega_0^2\xi}_{\text{Kepler回転}} + \underbrace{\frac{1}{2\Omega_0\Sigma_0}\frac{dP_0}{d\xi}}_{\text{圧力勾配による補正}}$$

Kepler回転

圧力勾配  
による補正



# 摂動方程式

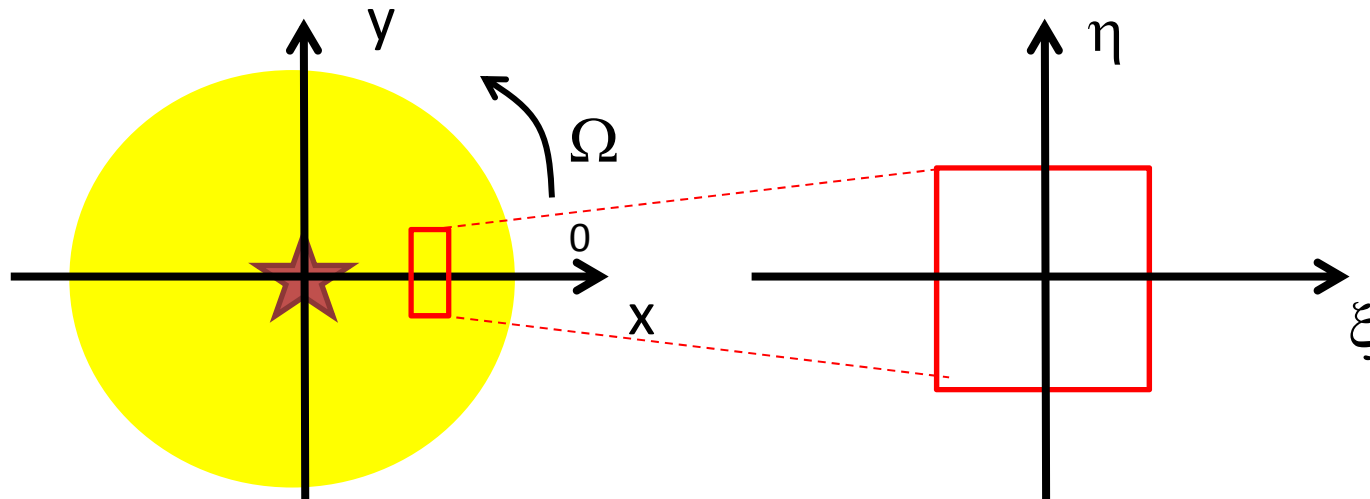
連続の式

$$\partial_{\xi} \delta v_{\xi} + \partial_{\eta} \delta v_{\eta} = 0$$

運動方程式

$$(\partial_t + v_0 \partial_{\eta}) \delta v_{\xi} - 2\Omega_0 \delta v_{\eta} = -\partial_{\xi} \frac{\delta P}{\Sigma_0}$$

$$(\partial_t + v_0 \partial_{\eta}) \delta v_{\eta} + \left( \frac{dv_0}{d\xi} + 2\Omega_0 \right) \delta v_{\xi} = -\partial_{\eta} \frac{\delta P}{\Sigma_0}$$



# 渦度方程式

運動方程式の回転を取る：

$$\begin{aligned} \partial_\xi [(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \delta v_\eta + (v_0' + 2\Omega_0) \delta v_\xi] \\ - \partial_\eta [(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \delta v_\xi - 2\Omega_0 \delta v_\eta] = 0 \end{aligned}$$

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) [\partial_\xi \delta v_\eta - \partial_\eta \delta v_\xi] + v_0'' \delta v_\xi = 0$$

これと、連続の式：

$$\partial_\xi \delta v_\xi + \partial_\eta \delta v_\eta = 0$$

で、方程式が閉じる

背景渦度の微分

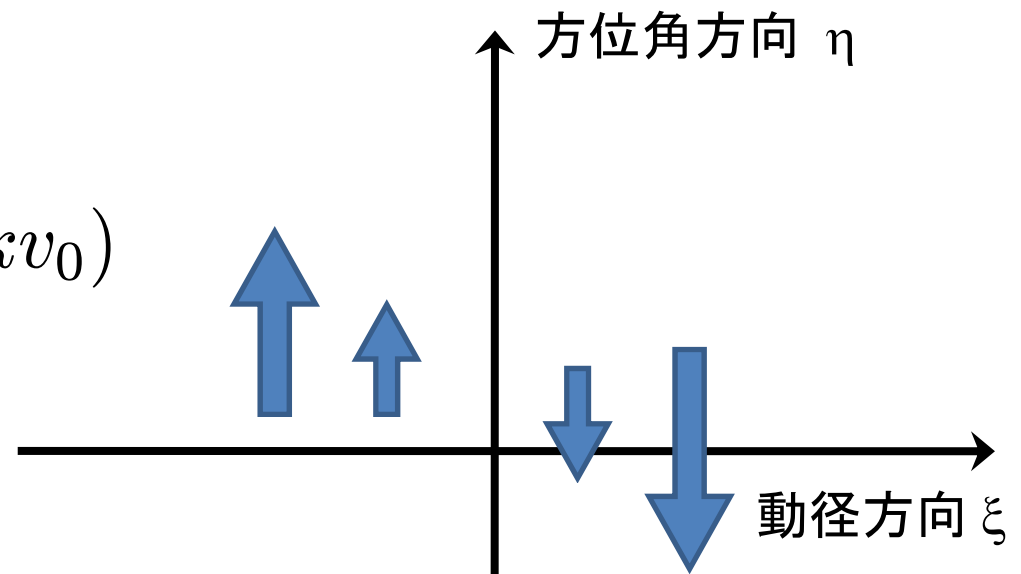
# フーリエ変換

- 背景流は軸対称・定常
  - 時間方向と、方位角(回転)方向にフーリエ変換

$$\delta f(t, \xi, \eta) = \delta f(\xi) e^{-i(\omega t - k\eta)}$$

$$\partial_t \rightarrow -i\omega \quad \partial_\eta \rightarrow ik$$

$$(\partial_t + v_0 \partial_\eta) \rightarrow -i(\omega - kv_0)$$

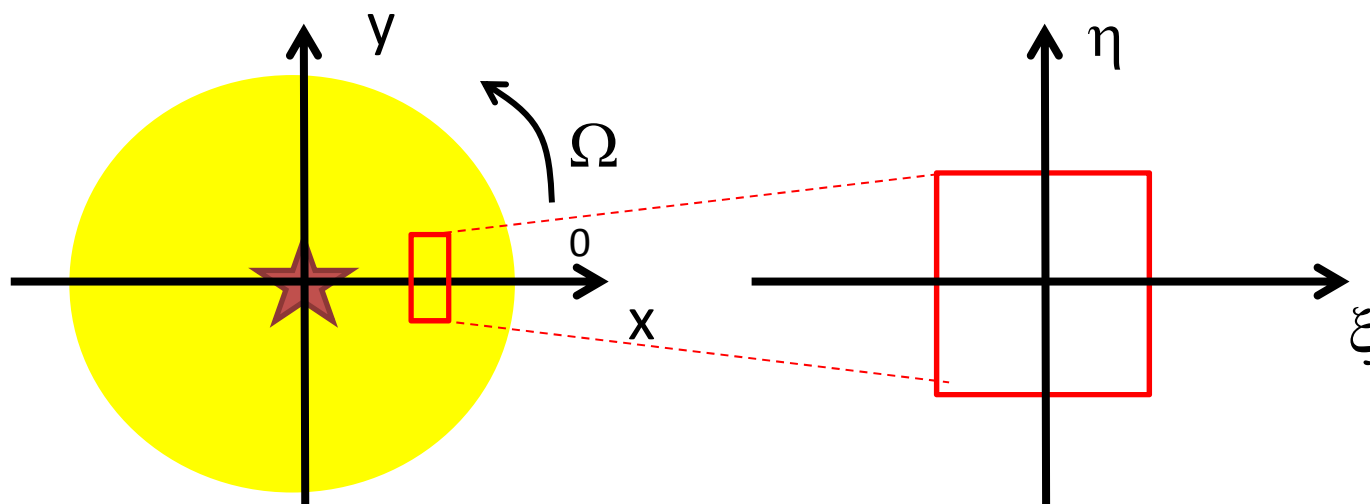


# 動径方向速度でまとめた方程式

連続の式:  $\frac{d}{d\xi} \delta v_\xi + ik \delta v_\eta = 0$

渦度方程式:  $-i(\omega - kv_0) \left[ \frac{d}{d\xi} \delta v_\eta - ik \delta v_\xi \right] + v_0'' \delta v_\xi = 0$

ここから  $\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\xi - \left[ k^2 - \frac{k}{\omega - kv_0} v_0'' \right] \delta v_\xi = 0$



# 波の伝搬の様子

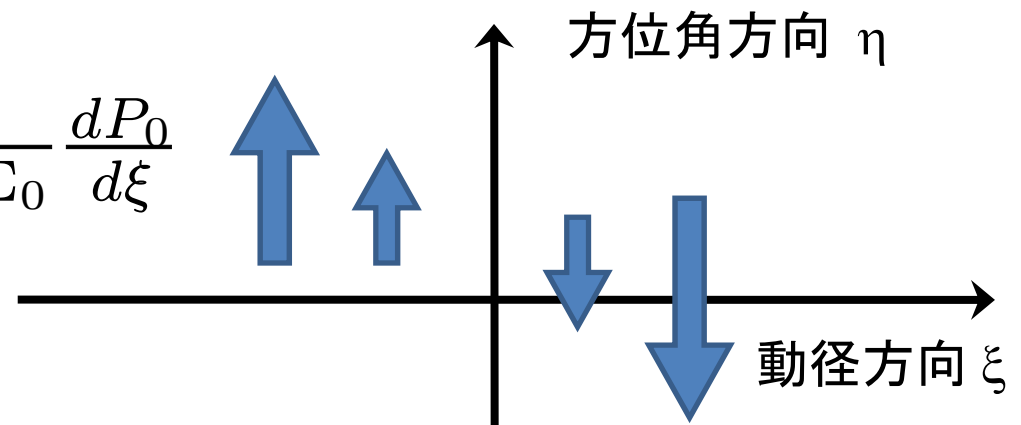
背景流が線型シア流なら  $v_0'' = 0$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\xi - k^2 \delta v_\xi = 0$$

解は指数関数的  $\rightarrow$  全領域で波の禁止領域

$v_0'' \neq 0$  の時に、どうなるか？

$$v_0(\xi) = -\frac{3}{2} \Omega_0^2 \xi + \frac{1}{2\Omega_0 \Sigma_0} \frac{dP_0}{d\xi}$$

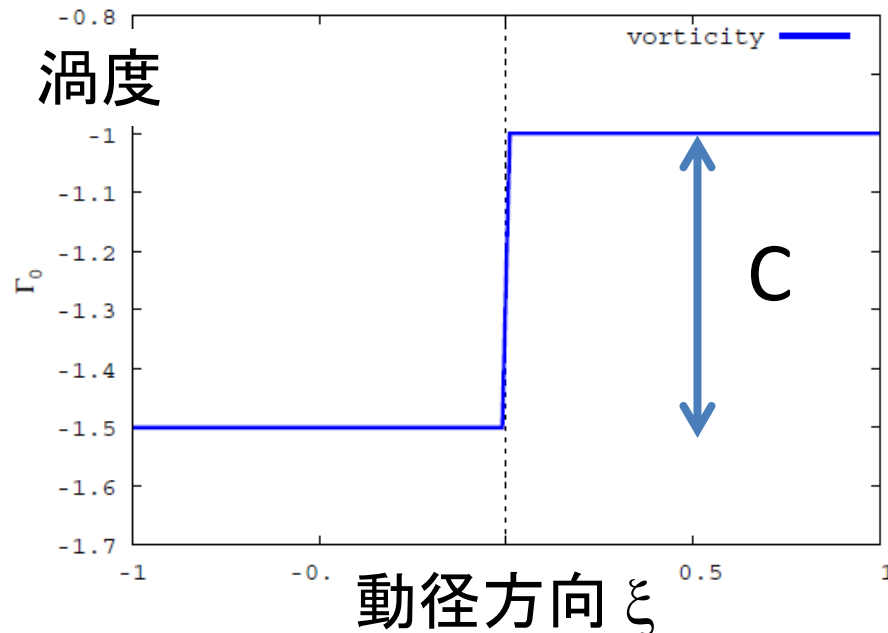




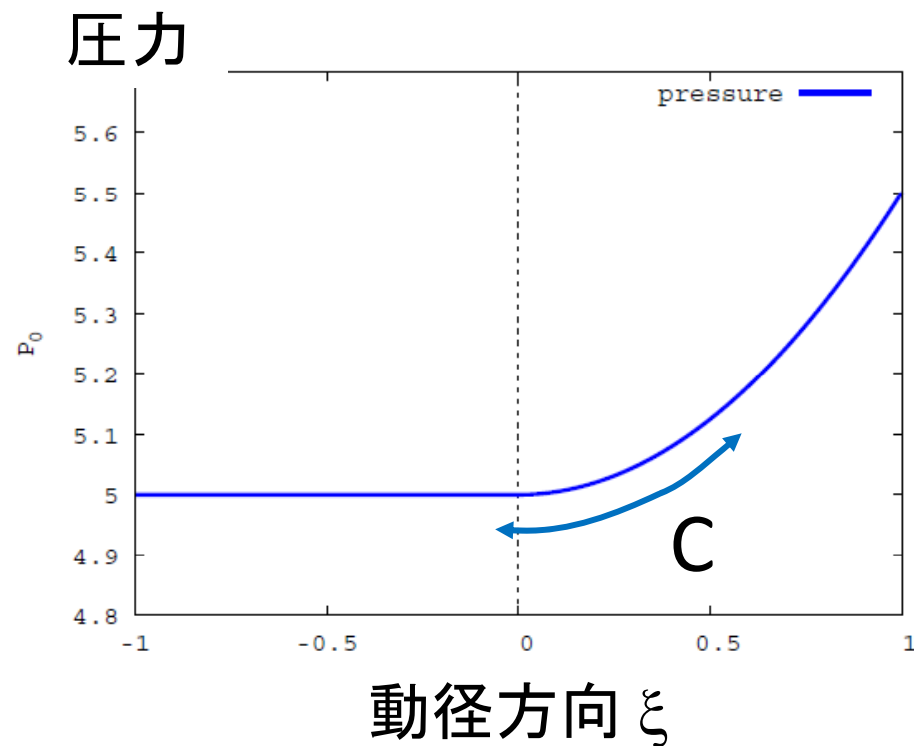
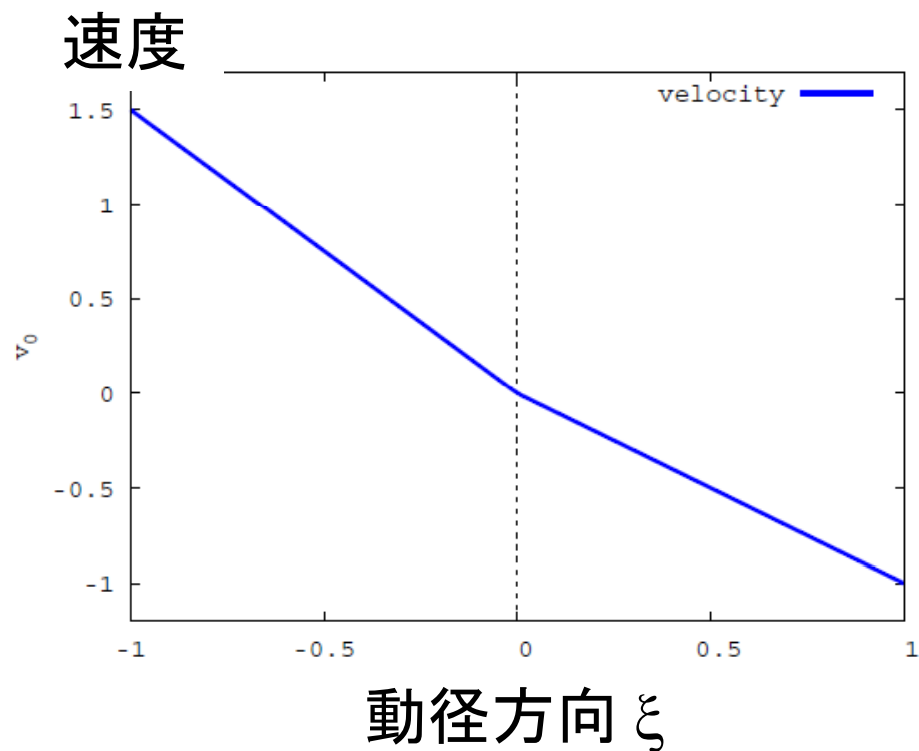
# 解けるモデルを作る

- 背景渦度が一定だが、飛びがあるようなモデルは、厳密に解ける

$$v'_0 = \begin{cases} -\frac{3}{2}\Omega_0 & (\xi < 0) \\ -\frac{3}{2}\Omega_0 + C & (\xi > 0) \end{cases} \quad v''_0 = C\delta(\xi)$$



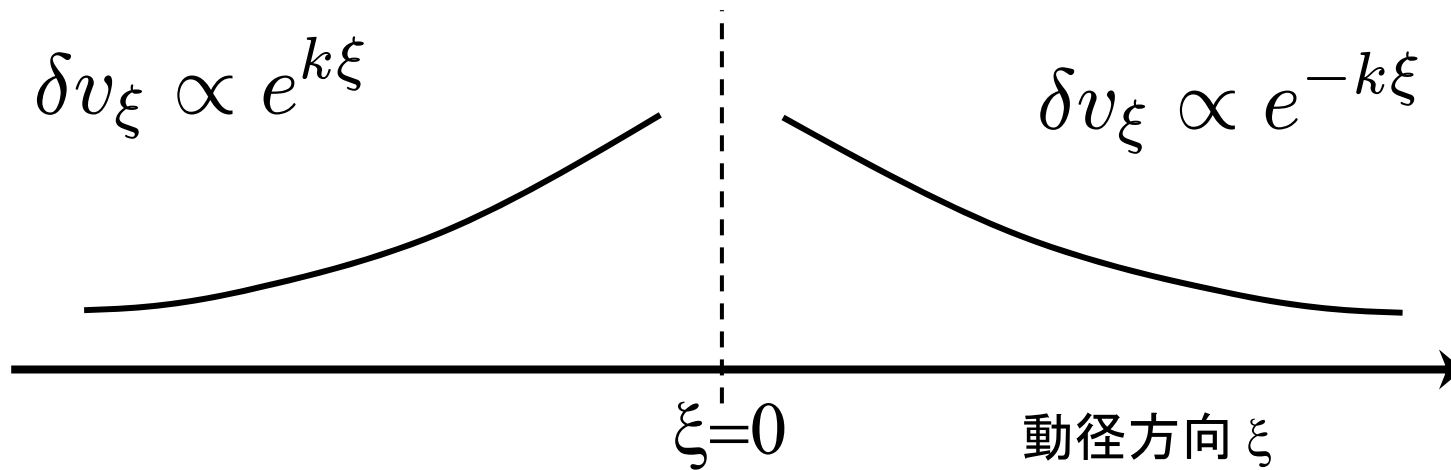
# 背景流の速度と圧力



C: 渦度の飛び = 圧力変化の「曲がり具合」

# 境界条件と解法

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \delta v_\xi - \left[ k^2 - \frac{k}{\omega - kv_0} K \delta(\xi) \right] \delta v_\xi = 0$$



無限遠で収束する解を、渦度の不連続点で接続

接続条件:  $\left[ \frac{d}{d\xi} \delta v_\xi \right]_{-0}^{+0} + \frac{k}{\omega - kv(\xi=0)} \delta v_\xi(\xi=0) = 0$

# 分散関係式と共回転半径

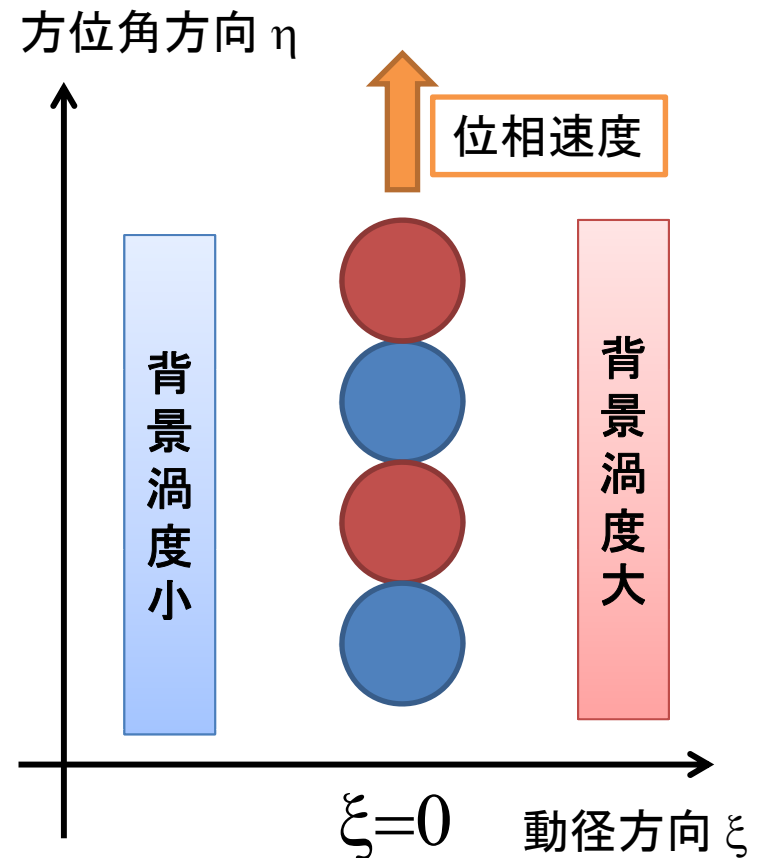
接続条件から、非自明な解が存在するための  $\omega$  と  $k$  の関係が出る  
→ 分散関係式

今の場合:  $\omega = \frac{1}{2}C$

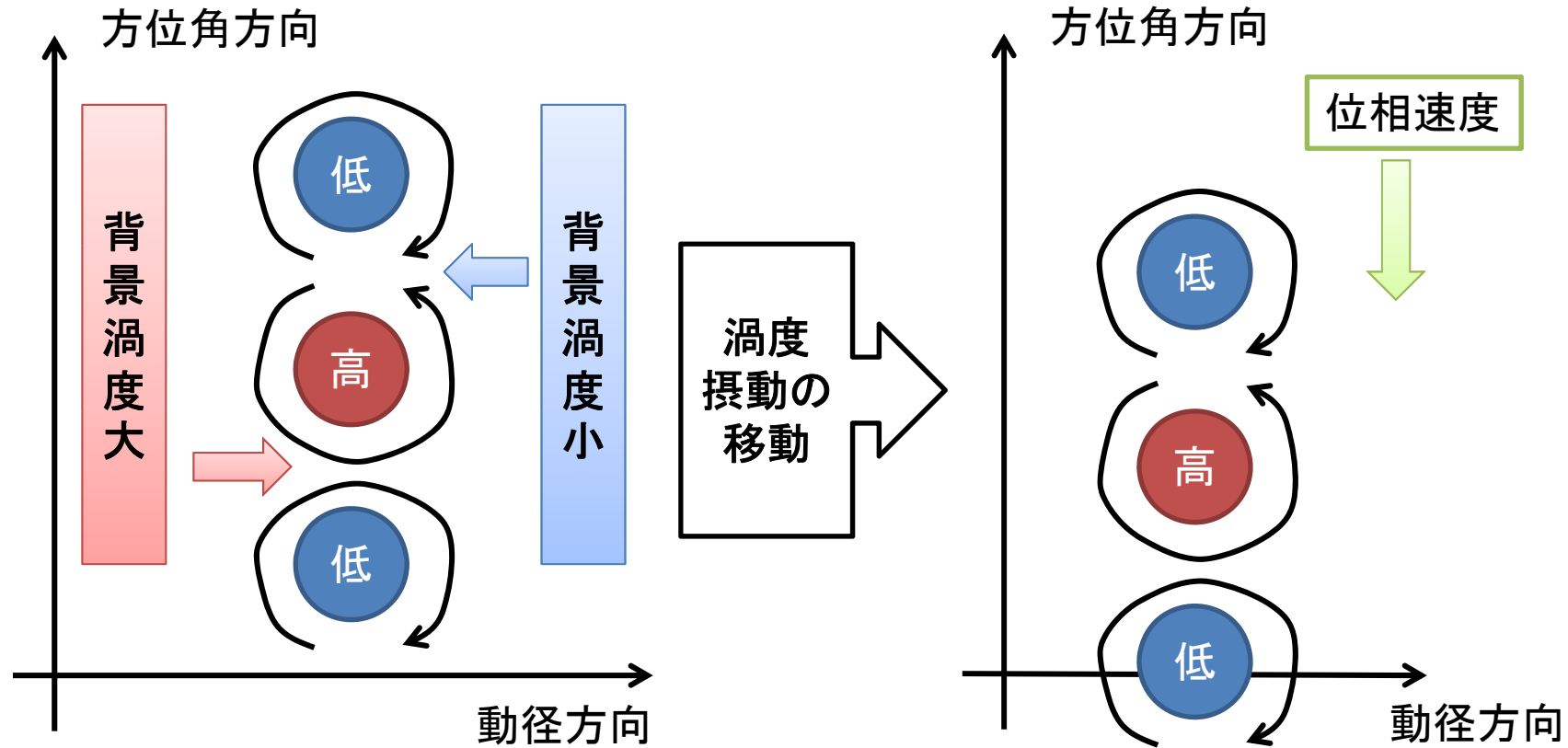
共回転半径:  $\omega - kv_0(\xi_c) = 0$

$$v_0(\xi) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\Omega_0\xi & (\xi < 0) \\ (-\frac{3}{2}\Omega_0 + C)\xi & (\xi > 0) \end{cases}$$

より  $\xi_c = \frac{1}{k} \frac{C/\Omega_0}{-3 + 2C/\Omega_0}$



# 非圧縮流におけるロスビー波

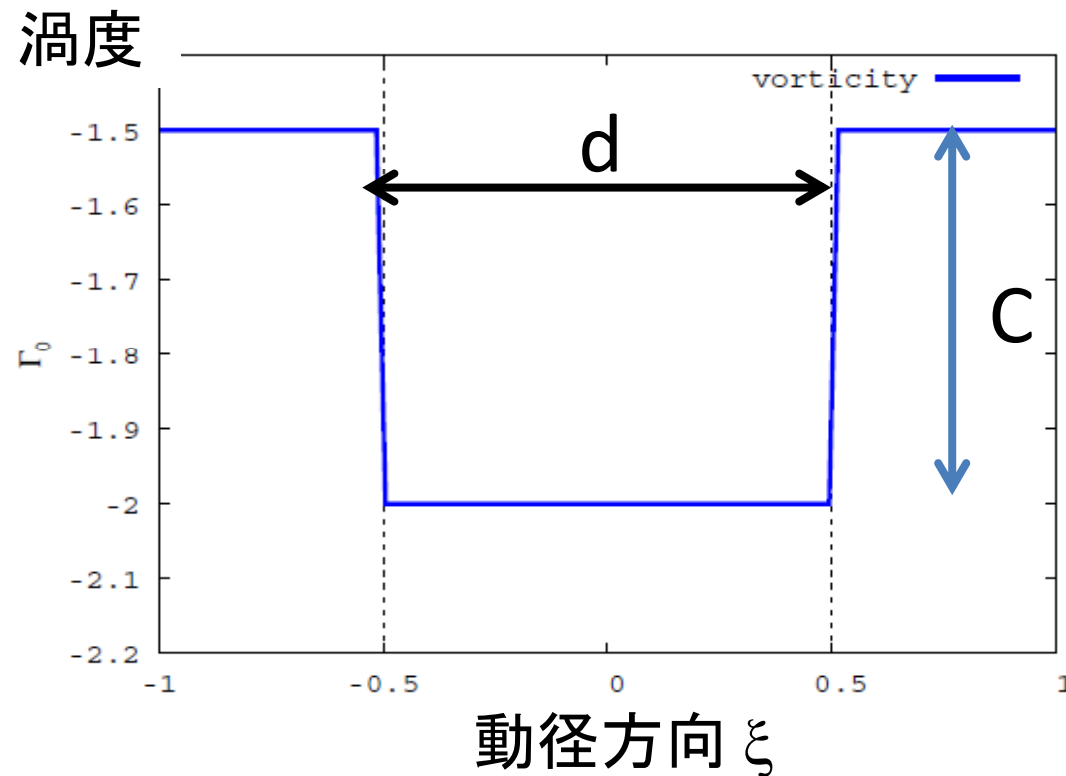


- 動径方向に渦度変化のある背景流において、渦度摂動が方位角方向に移動する

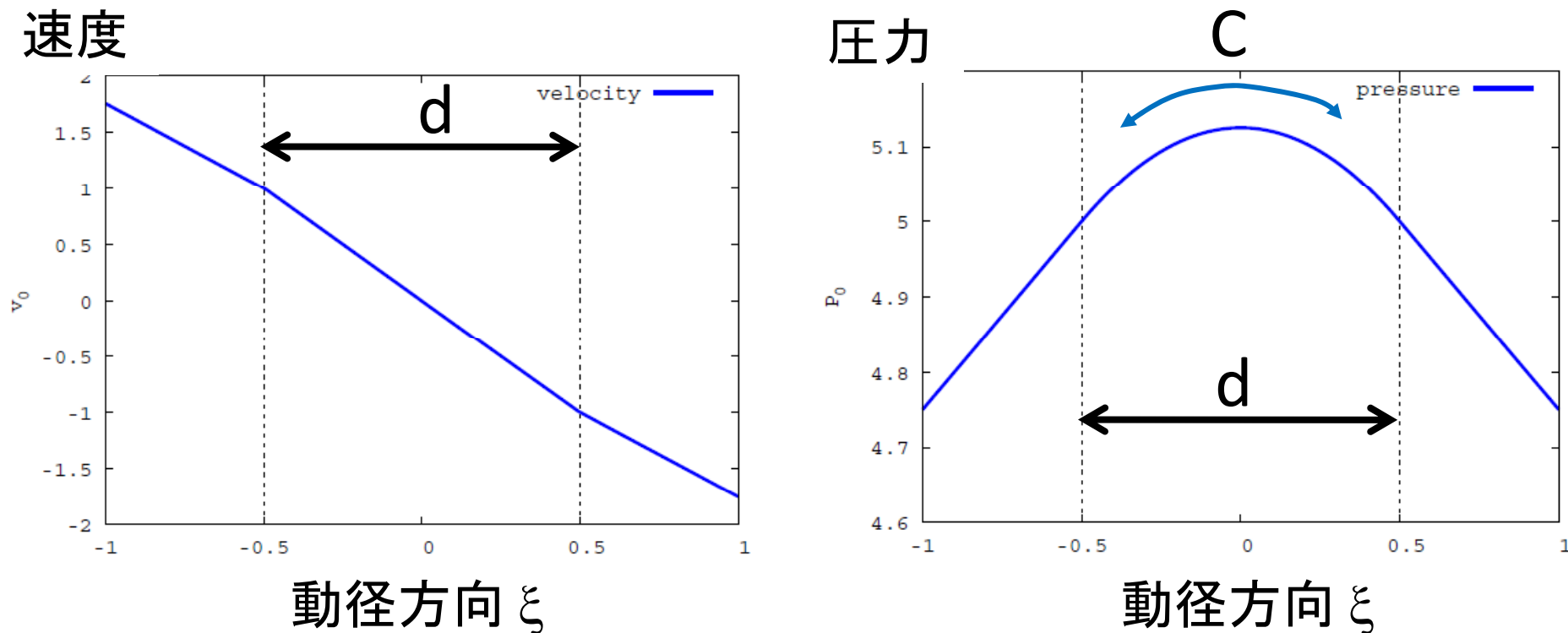
# 渦度の飛び2つ：圧力バンプ

背景の渦度分布が  
不連続になるモデル

$$v'_0 = \begin{cases} -\frac{3}{2}\Omega_0 & (\xi < -\frac{d}{2}) \\ -\frac{3}{2}\Omega_0 - C & (-\frac{d}{2} < \xi < \frac{d}{2}) \\ -\frac{3}{2}\Omega_0 & (\xi > \frac{d}{2}) \end{cases}$$



# 背景流の速度と圧力



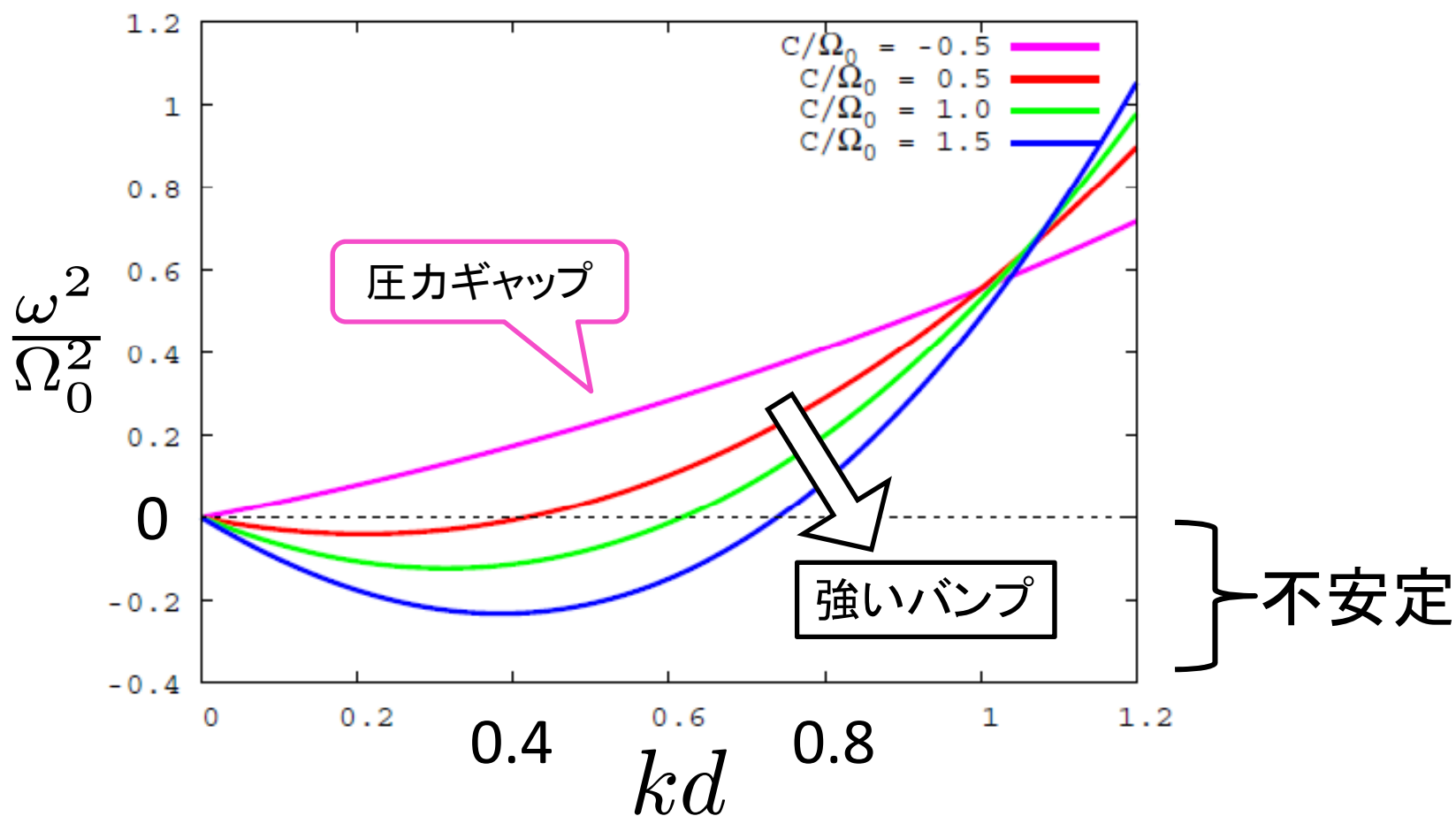
C: 渦度の飛び = 圧力ピークの尖り具合

d: 渦度の飛びの間隔

※  $C < 0$  ならば圧力ギャップ

# 分散関係式

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(C - kd (\frac{3}{2} \Omega_0 + C))^2 - C^2 e^{-2kd}}$$





# 中立安定条件

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(C - kd (\frac{3}{2} \Omega_0 + C))^2 - C^2 e^{-2kd}}$$

中立安定条件:

$$\omega = 0 \text{ となるのは } \frac{C}{\Omega_0} = \pm \frac{3}{2} \frac{kd}{e^{-kd} \pm (1 - kd)}$$

(複号同順)

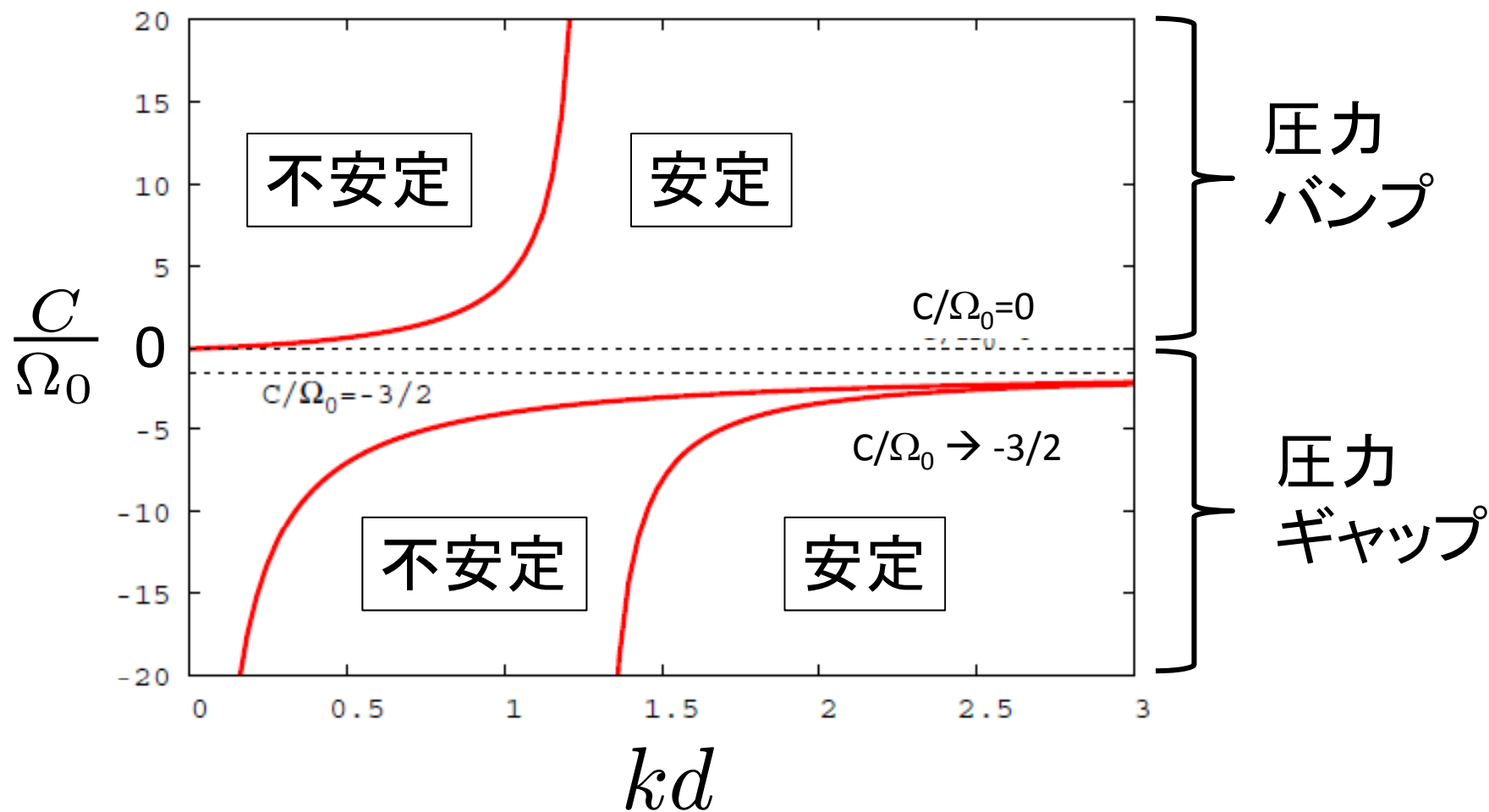
$kd \sim 0$  で、 $C > 0$  (圧カバンプの中立安定条件)となるのは、上符号

$$kd \sim 0 \text{ の時 } \frac{C}{\Omega_0} \sim \frac{3}{4} kd$$

系の安定性が、圧カバンプの尖り具合で決まる

# 中立安定条件

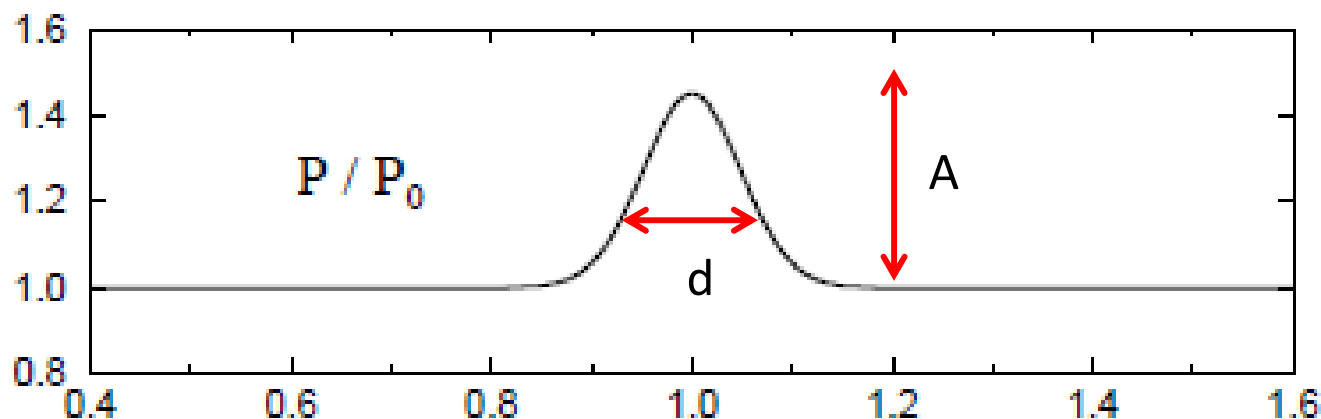
$$\frac{C}{\Omega_0} = \pm \frac{3}{2} \frac{kd}{e^{-kd} \pm (1 - kd)}$$



# 中立安定条件についての示唆

$kd \sim 0$  の時、中立安定条件は  $\frac{C}{\Omega_0} \sim \frac{3}{4}kd$

実際の「圧カバンプ」や「リング」は、幅と強さで表されることが多い

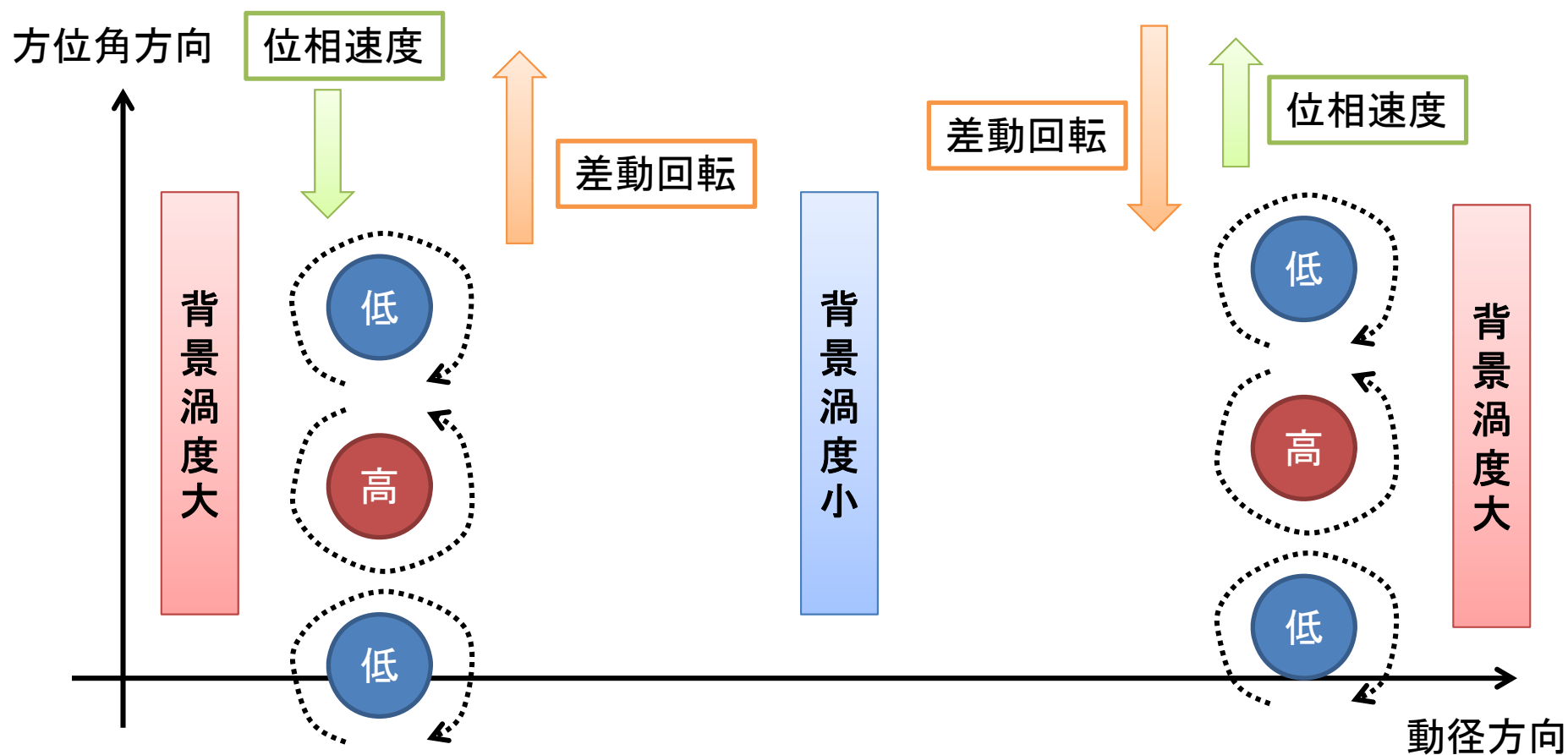


バンプの尖り具合 = 圧力の二階微分なので、 $C \sim \frac{A}{d^2}$

中立安定のリングの幅と強さには

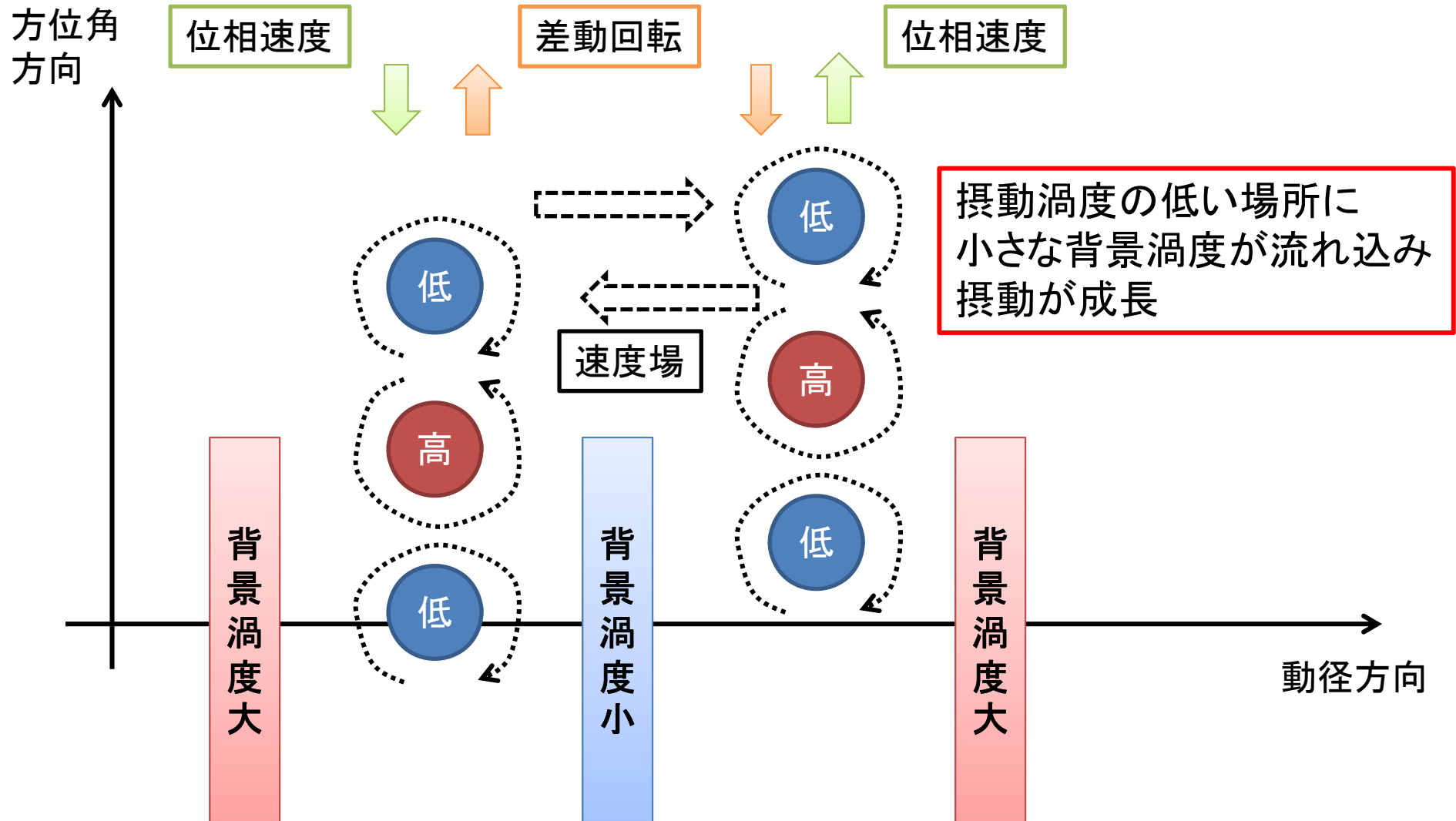
$A \propto d^3$  の関係があることが示唆される

# 固有関数の振る舞い: 安定の場合



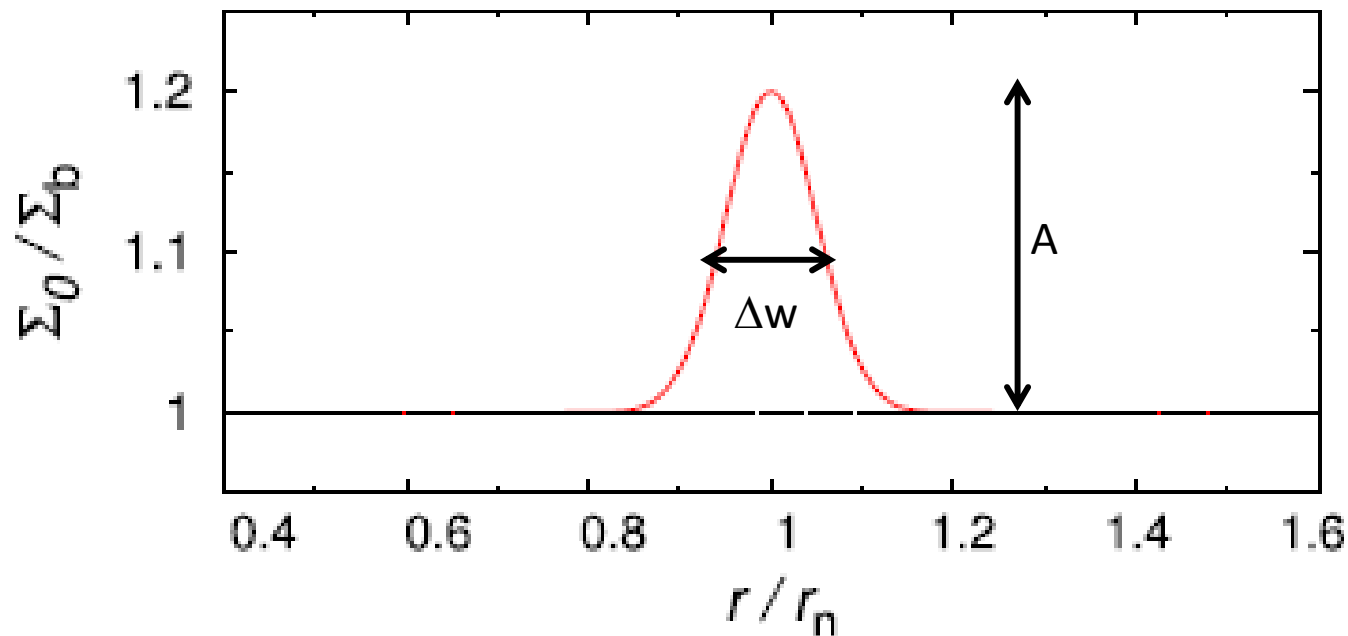
二つのロスビー波が十分離れていれば(リングが十分太ければ)、それぞれの渦度摂動が独立に運動

# 固有関数の振る舞い: 不安定の場合



# フルの解析の簡単な紹介 (Ono et al. 2016)

- 圧縮性入り、等温円盤、2次元
- 局所近似はしない
- 背景にバンプなどの構造を入れ、線型解析
- 系の安定性が、バンプ形状にどのように依存するか？

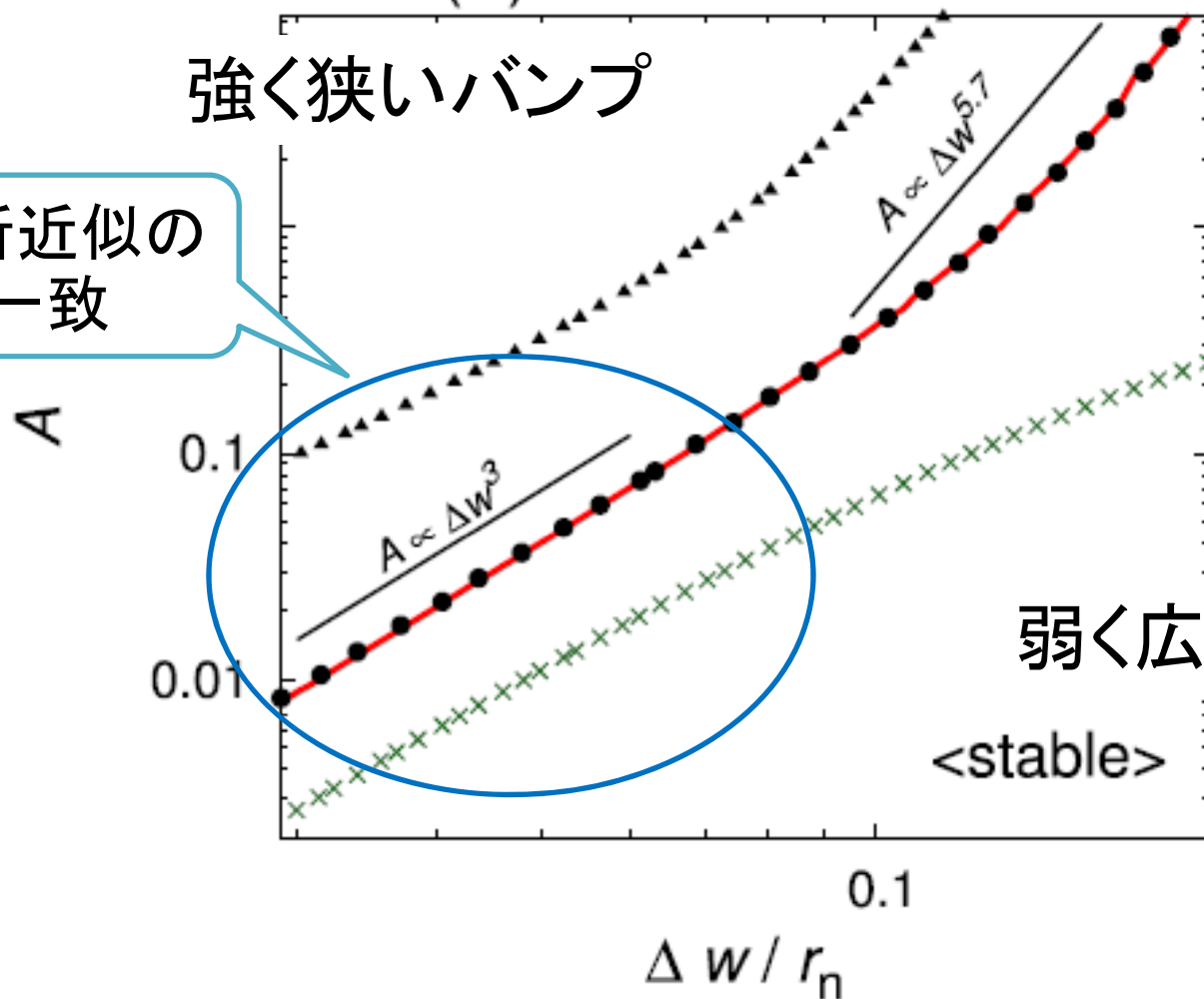


# 中立安定条件

Case (iv)

強く狭いバンプ

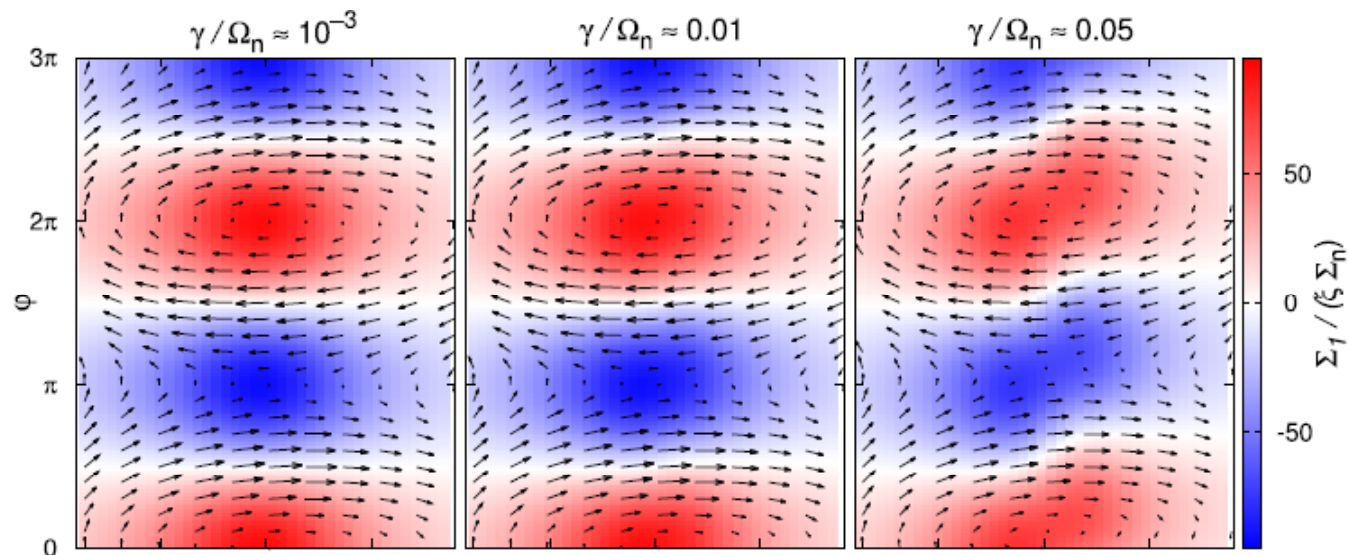
非圧縮局所近似の  
示唆に一致



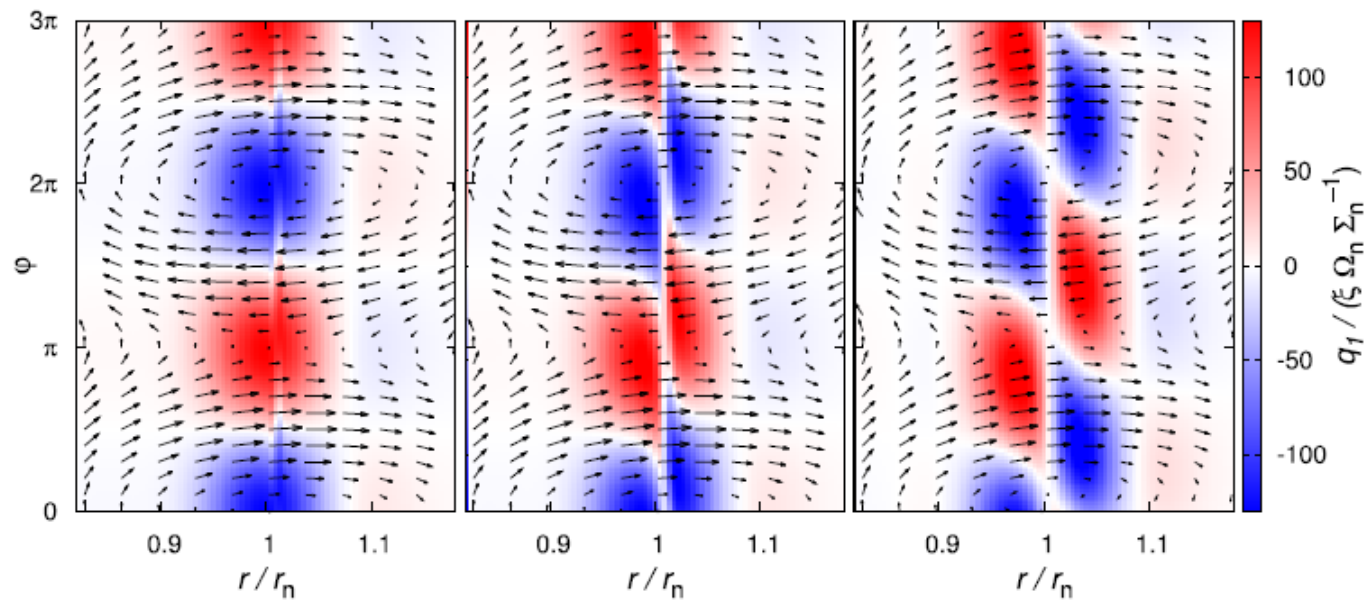
弱く広いバンプ

# 固有関数

面密度

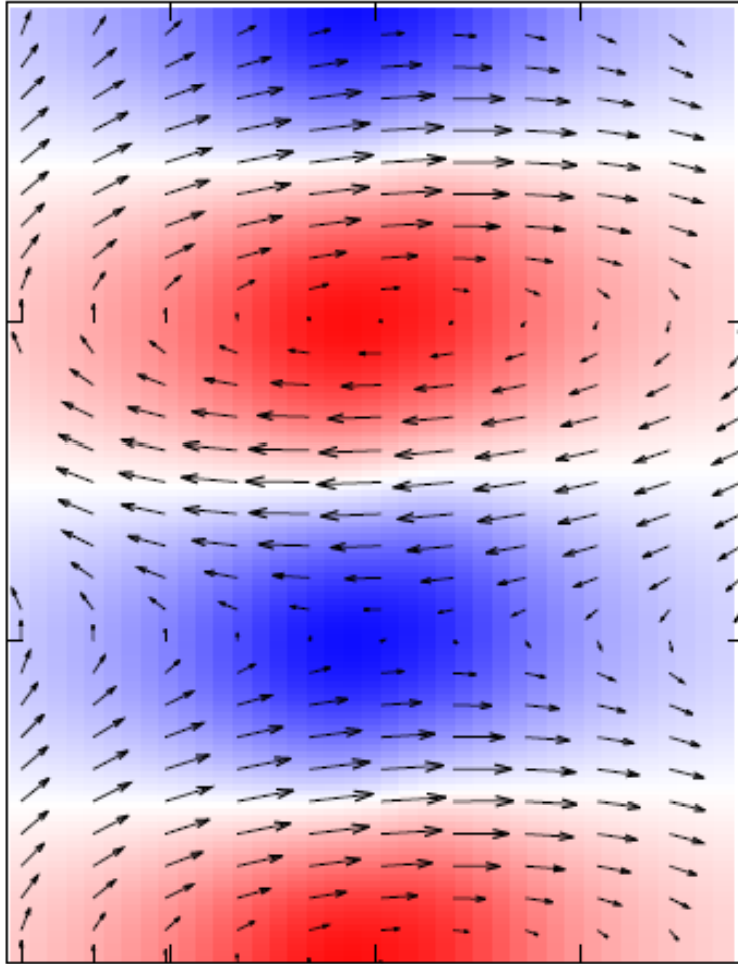


渦位

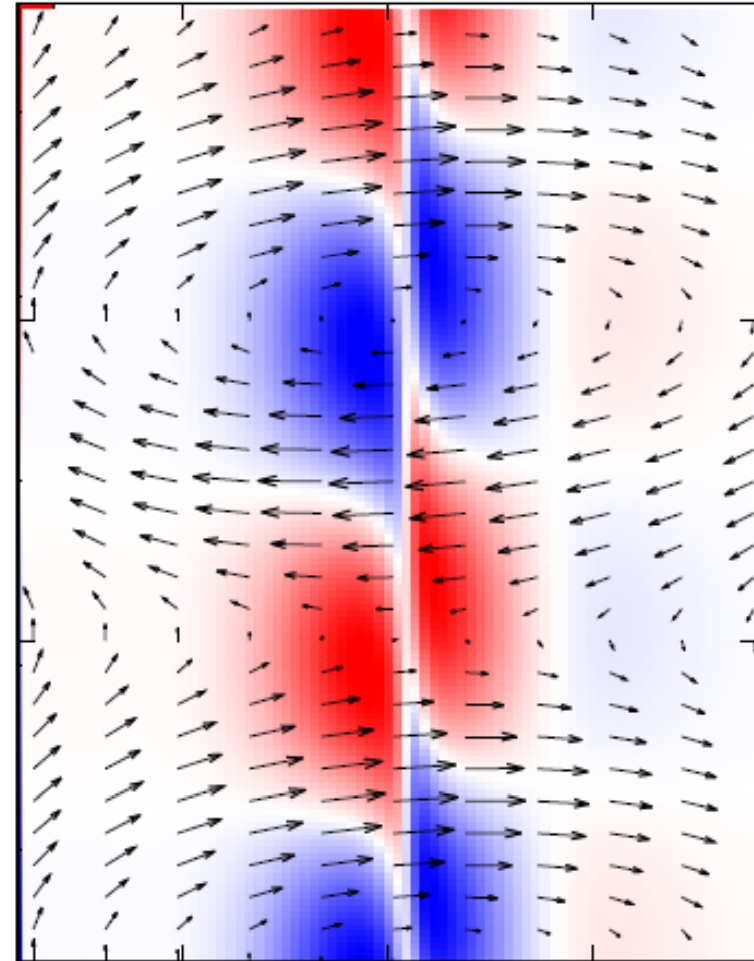




# 拡大図



面密度



渦位

# まとめ：背景面密度に構造がある場合

- ロスビー波不安定性
  - 波の減衰領域における不安定性
  - Lovelace条件：渦位の微分が符号を変える
- 非圧縮局所近似での解析
  - 渦位に「へこみ」がある時、不安定になる
  - 圧力のバンプ構造が不安定になる
  - 不安定のメカニズム：渦の相互作用
  - 摂動渦度が背景渦度を運ぶことに起因

# 全体のまとめ(1)

- 原始惑星系円盤の詳細構造観測
  - 円盤における力学過程が、観測的に直接見えるようになってきている
- 原始惑星系円盤の基本構造
  - 幾何学的に薄い(冷たい)円盤
  - 回転は、潮汐力(中心星重力+遠心力)・コリオリ力・圧力勾配のつり合い
  - シア速度は、ある程度決まっており、ほとんどKepler回転(=円盤が冷たい)
  - 円盤の厚みと同程度の大きさの構造があると、渦位は大きな影響を受ける

# 全体のまとめ(2)

- 線型摂動のキーワードまとめ

	軸対称モード	非軸対称モード
構造なし	音波の分散関係式 $\omega^2 = \kappa^2 + c^2 k_\xi^2$ エピサイクル振動(楕円運動) $\kappa^2 = 2\Omega_0(v'_0 + 2\Omega_0)$	密度波の理論 - 円盤中を伝わる音波 波の伝搬領域と減衰領域 共回転半径 基本的に安定な構造
構造あり	Rayleigh条件: $\kappa^2 < 0$ - 不安定の必要条件 - 細いリングが不安定 ※角運動量が、外に向かって増加	ロスビー波不安定性 - 波の減衰領域で発生 - 渦の相互作用

## 参考文献

- ALMA Partnership, Brogan, C.L., Perez, L.M., Hunter, T.R., Dent, W.R.F., Hales, A.S., Hills, R., Corder, S., Fomalont, E.B., Vlahakis, C., Asaki, Y., Barkats, D., Hirota, A., Hodge, J.A., Impellizzeri, C.M.V., Kneissl, R., Liuzzo, E., Lucas, R., Marcelino, N., Matsushita, S., Nakanishi, K., Phillips, N., Richards, A.M.S., Toledo, I., Aladro, R., Broguiere, D., Cortes, J.R., Cortes, P.C., Espada, D., Galarza, F., Garcia-Appadoo, D., Guzman-Ramirez, L., Humphreys, E.M., Jung, T., Kamenno, S., Laing, R.A., Leon, S., Marconi, G., Mignano, A., Nikolic, B., Nyman, L.-A., Radiszcz, M., Remijan, A., Rodon, J.A., Sawada, T., Takahashi, S., Tilanus, R.P.J., Vila Vilaro, B., Watson, L.C., Wiklind, T., Akiyama, E., Chapillon, E., de Gregorio-Monsalvo, I., Di Francesco, J., Gueth, F., Kawamura, A., Lee, C.-F., Nguyen Luong, Q., Mangum, J., Pietu, V., Sanhueza, P., Saigo, K., Takakuwa, S., Ubach, C., van Kempen, T., Wootten, A., Castro-Carrizo, A., Francke, H., Gallardo, J., Garcia, J., Gonzalez, S., Hill, T., Kaminski, T., Kurono, Y., Liu, H.-Y., Lopez, C., Morales, F., Plarre, K., Schieven, G., Testi, L., Videla, L., Villard, E., Andreani, P., Hibbard, J.E., Tatematsu, K., 2015: First Results from High Angular Resolution ALMA Observations Toward the HL Tau Region, arXiv: 1503.02649.
- Andrews, S.M., Wilner, D.J., Zhu, Z., Birnstiel, T., Carpenter, J.M., Perez, L.M., Bai, X.-N., Öberg, K.I., Hughes, A.M., Isella, A., Ricci, L., 2016: Ringed Substructure and a Gap at 1 AU in the Nearest

Protoplanetary Disk, *The Astrophysical Journal Letters*, 820(2), L40, doi:10.3847/2041-8205/820/2/L40.

- Casassus, S., van der Plas, G., Perez, S., Dent, W.R.F., Fomalont, E., Hagelberg, J., Hales, A., Jordán, A., Mawet, D., Ménard, F., Wootten, A., Wilner, D.J., Hughes, A.M., Schreiber, M.R., Girard, J.H., Ercolano, B., Canovas, H., Roman, P.E., Salinas, V., 2013: Flows of gas through a protoplanetary gap, *Nature*, 493, 191194, doi:10.1038/nature11769.
- Currie, T., Muto, T., Kudo, T., Honda, M., Brandt, T.D., Grady, C., Fukagawa, M., Burrows, A., Janson, M., Kuzuhara, M., McElwain, M.W., Follette, K., Hashimoto, J., Henning, T., Kandori, R., Kusakabe, N., Kwon, J., Mede, K., Morino, J., Nishikawa, J., Pyo, T., Serabyn, G., Suenaga, T., Takahashi, Y., Wisniewski, J., Tamura, M., 2014: Recovery of the Candidate Protoplanet HD 100546 b with Gemini/NICI and Detection of Additional (Planet-Induced?) Disk Structure at Small Separations, *The Astrophysical Journal Letters*, 796(2), L30, doi:10.1088/2041-8205/796/2/L30.
- Fukagawa, M., Tsukagoshi, T., Momose, M., Saigo, K., Ohashi, N., Kitamura, Y., Inutsuka, S., Muto, T., Nomura, H., Takeuchi, T., Kobayashi, H., Hanawa, T., Akiyama, E., Honda, M., Fujiwara, H., Kataoka, A., Takahashi, S.Z., Shibai, H., 2013: Local Enhancement of the Surface Density in the Protoplanetary Ring Surrounding HD 142527, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 65(6), L14, doi: 10.1093/pasj/65.6.L14.

- Li, H., Finn, J.M., Lovelace, R.V.E., Colgate, S.A., 2000: Rossby Wave Instability of Thin Accretion Disks. II. Detailed Linear Theory, *The Astrophysical Journal*, 533(2), 1023-1034, doi:10.1086/308693.
- Muto, T., Inutsuka, S., 2009: Local Linear Analysis of Interaction between a Planet and Viscous Disk and an Implication on Type I Planetary Migration, *The Astrophysical Journal*, 701(1), 18-31, doi:10.1088/0004-637X/701/1/18.
- Öberg, K.I., Furuya, K., Loomis, R., Aikawa, Y., Andrews, S.M., Qi, C., van Dishoeck, E.F., Wilner, D.J., 2015: Double DCO+ rings reveal CO ice desorption in the outer disk around IM Lup, *The Astrophysical Journal*, 810(2), 112, doi:10.1088/0004-637X/810/2/112.
- Ono, T., Muto, T., Takeuchi, T., Nomura, H., 2016: Parametric Study of the Rossby Wave Instability in a Two-Dimensional Barotropic Disk, *The Astrophysical Journal*, 823(2), 84-104, doi:10.3847/0004-637X/823/2/84.
- Quanz, S.P., Amara, A., Meyer, M.R., Kenworthy, M.A., Kasper, M., Girard, J.H., 2013: A young protoplanet candidate embedded in the circumstellar disk of HD 100546\*, *The Astrophysical Journal Letters*, 766(1), L1-L5, doi:10.1088/2041-8205/766/1/L1.
- Sallum, S., Follette, K.B., Eisner, J.A., Close, L.M., Hinz, P., Kratter, K., Males, J., Skemer, A., Macintosh, B., Tuthill, P., Bailey, V., Defrère, D., Morzinski, K., Rodigas, T., Spalding, E., Vaz, A., Weinberger, A.J., 2015:

Accreting protoplanets in the LkCa 15 transition disk, *Nature*, 527, 342-344, doi:10.1038/nature15761.

- Zhang, K., Isella, A., Carpenter, J.M., Blake, G.A., 2014: Comparison of the dust and gas radial structure in the transition disk [PZ99] J160421.7-213028, *The Astrophysical Journal*, 791(1), 42-52, doi:10.1088/0004-637X/791/1/42.
- [http://alma.mtk.nao.ac.jp/j/multimedia/files/editor/2012\\_antenna\\_0055.jpg](http://alma.mtk.nao.ac.jp/j/multimedia/files/editor/2012_antenna_0055.jpg)
- [http://web.gps.caltech.edu/~gab/astrophysics/starformation\\_mccaughrean.gif](http://web.gps.caltech.edu/~gab/astrophysics/starformation_mccaughrean.gif)
- [http://www.naoj.org/Gallery/gallery\\_images/dome\\_sky.jpg](http://www.naoj.org/Gallery/gallery_images/dome_sky.jpg)
- <https://cdn.eso.org/images/screen/eso0827a.jpg>