

# 4次元データ同化による 解析インクリメントの 構造はどう決まるのか？

伊藤耕介 (琉球大学)

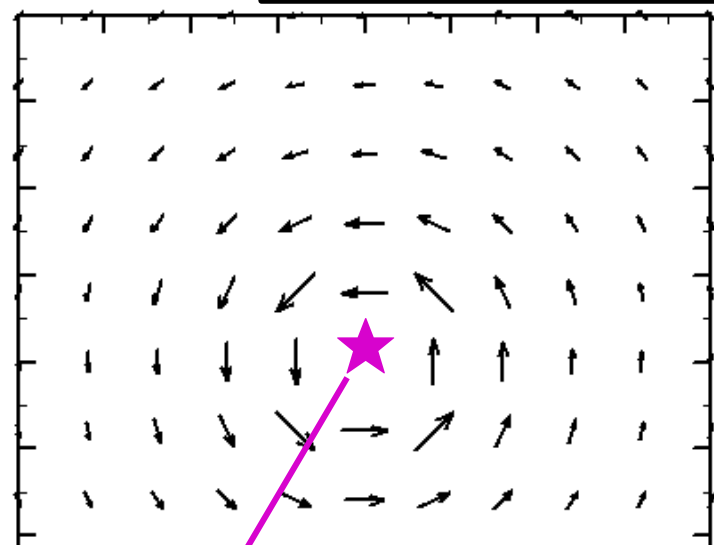
# データ同化とは何か？

イノベーション  $d$   
(観測値 - 背景値)

誤差共分散の  
推定値

解析インクリメント  $z$   
(解析値 - 背景値)

例：台風の中で中心気圧の観測だけが得られた

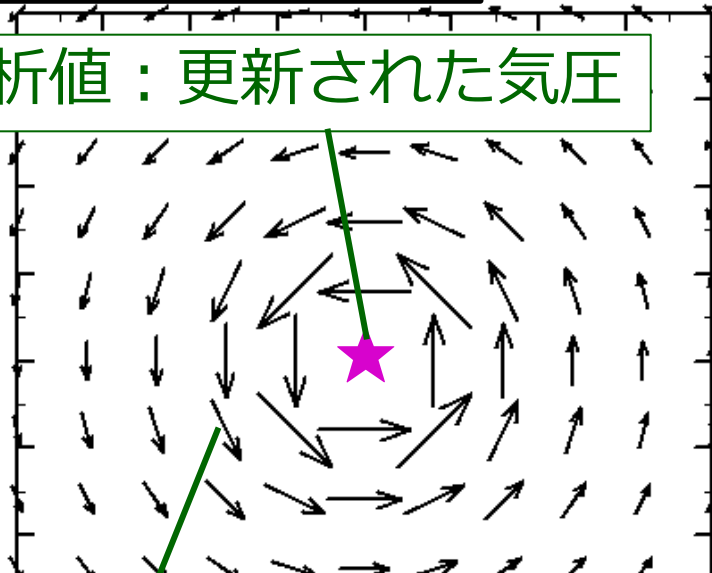


観測: 960hPa, 背景値: 980hPa  
→イノベーション: -20hPa

中心気圧と風速の  
共分散情報を追加



解析値：更新された気圧



解析値：更新された風

# 本解説の執筆の経緯

- 2009年：指導教員だった石川洋一先生から最適内挿法における解析インクリメントと固有値の関係に関するメモを渡される。



- 2012年：データ同化夏の学校@ Les HouchesでMarc Bocquet先生(Ecole des Ponts ParisTech)が講演でデータ同化を逆問題を対比的に論じた。



⇒“Advanced Data Assimilation for Geosciences” (Oxford press)の中の一編として公刊されている。

- 日本語の資料が無いように感じられたので、データ同化夏の学校@むつで紹介したのち、改めて藤井さんに協力いただき「ながれ」の解説としてまとめた。

[解説]

## 逆問題としての4次元データ同化

琉球大学 理学部 伊藤 耕介\*

気象研究所 全球大気海洋研究部・統計数理研究所 モデリング研究系 藤井 陽介

## Four-dimensional data assimilation as an inverse problem

\*Kosuke ITO, Deptment of Physics and Geosciences, University of the Ryukyus

Yosuke FUJII, Department of Atmosphere, Ocean, and Earth System Modeling Research, Meteorological  
Research Institute, and Department of Statistical Modeling, The Institute of Statistical Mathematics

\*E-mail: itokosk@sci.u-ryukyu.ac.jp

(Received 8 November 2019; revised 27 February, 2020; accepted 18 March, 2020; published 25 June, 2020)

Data assimilation has become common in various research fields. However, the link between the data assimilation and the conventional inverse problem has not been widely recognized. In this document, an inverse problem is briefly introduced first. Then, a best linear unbiased estimator (BLUE) of the 4-dimensional data assimilation method is regarded as the solution of an inverse problem, which yields a normalized analysis increment (analysis minus first guess) from a normalized innovation (observation minus corresponding first guess) with a regularization term of Tikhonov type for a given tangent linear model operator  $\mathbf{M}$ , observation operator  $\mathbf{H}_t$ , observation error covariance matrix  $\mathbf{R}_t$ , and background error covariance matrix  $\mathbf{B}_0$ . The analysis increment consists of right singular vectors of a so-called observability matrix  $\mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$ . The BLUE solution reveals the limitation of maximum number of possible modes to construct the increment, the reason why dynamically unstable modes tend to appear in the analysis increment, and the importance of the ratio of  $\mathbf{R}_t^{-1/2}$  to  $\mathbf{B}_0^{1/2}$ . The structure of an analysis error covariance matrix and degrees of freedom for the signal is also shown in terms of the singular value decomposition of  $\mathbf{G}$ .

(KEY WORDS): data assimilation, inverse problem

(p175左段)「式(29)と対比すると、 $E=0$ が条件と・・・正当化する理由は見当たらない」  
⇒私の誤解に基づく記述ですので削除願います。

# 本解説について

- 観測値を同化したときに得られるインクリメントの構造について深く理解することで、
  - 原理的に解けない問題を避けられる
  - 有効な観測システムの設計にも役に立つ
- GFDや逆問題に詳しい方がデータ同化に興味を持つきっかけになると嬉しい
- 4次元変分法、カルマンフィルタ系列の手法といったアルゴリズムの詳細には立ち入らず、 $B$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $R$ は既に与えられているとする

研究というより、教科書的な内容です

# 参考文献

- Bocquet, M., 2012: An introduction to inverse modelling and parameter estimation for atmosphere and ocean sciences *Advanced data assimilation for geosciences* (Oxford university press, 2012) 461–493.
- Johnson, C., Hoskins, B. J., and Nichols N. K., 2005: A singular vector perspective of 4D-Var: Filtering and interpolation, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 131, 1–19.
- メンケ著, 柳谷俊, 塚田和彦訳, 1997: 離散インバーズ理論, 古今書院, 295pp.
- Tarantola, A., 2005: Inverse problem theory and methods for model parameter estimation, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 352pp.

# データ同化をこれから学ぶ人へ

- データ同化が初めて学ぶという方。  
⇒【公開版】データ同化夏の学校 基礎講義  
というYouTubeの動画でゆっくり解説して  
いますので興味がありましたらどうぞ。
- 実際のアルゴリズムに触れてみたいという方  
⇒私のHPの配布資料に「データ同化実習テキ  
スト&Fortranプログラム」を置いています。  
4DVarやEnKFの気持ちが分かります。
- より詳しく専門家と話しながら学びたいとい  
う方には、毎年8月のでデータ同化夏の学校  
@むつ（今年はオンライン）をお勧めします。

# 問題設定・簡単化

- 時刻 $t$ における観測値と背景値から時刻0の状態変数を推定。
- 以下のような簡単化を施します。
  - 逆問題のうち、簡単な線形離散逆問題(状態変数の時間発展について非線形性が残っていてもよいが、摂動の時間発展については線形性を仮定する) について考える。
  - 観測誤差, 第一推定値の誤差のふるまいはそれぞれ正規分布に従う
  - 背景誤差共分散行列と観測誤差共分散行列は事前に与えられている。
  - 背景誤差共分散行列は正定値対称行列または半正定値対称行列, 観測誤差共分散行列は正定値対称行列とする。
  - 観測行列は線形とする。
  - 状態変数は時刻0 から時刻 $t$  までの時間発展を考えるが, 観測値は時刻 $t$  だけで得られるとする(途中の観測がある場合でも観測行列の拡張で対応可(Johnson et al. 2005))



# 解説のエッセンス(1/2)

- 最良線形不偏推定量 (見慣れたデータ同化の解)

$$\boxed{\mathbf{z}_0} = \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T (\mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T)^{-1} \boxed{\mathbf{d}_t}$$

$$\boxed{\mathbf{x}_{a,0} - \mathbf{x}_{b,0}}$$

解析インクリメント

$$\boxed{\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t}}$$

イノベーション

- 正規化( $\tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{B}_0^{-1/2} \mathbf{z}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{d}}_t = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{d}_t$ )して、可観測行列を特異値分解( $\mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2} = \mathbf{U}_p \hat{\mathbf{D}}_p \mathbf{V}_p^T$ )

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

(特異値 $\lambda_i$ , 左特異ベクトル $\mathbf{u}_i$ , 右特異ベクトル $\mathbf{v}_i$ )

# 解説のエッセンス(2/2)

- 4次元データ同化の解は逆問題の解の一種とみなせる。
- その逆問題とは、可観測行列（モデル）と正規化された時刻 $t$ のイノベーション（出力）から、正規化された時刻0のインクリメント（入力）を求める問題である。
- 可観測行列は正規化・摂動の時間発展・モデル変数から観測変数へのマッピングを担う行列である。
- 可観測行列の特異値分解で、観測空間上の左特異ベクトルとイノベーションの内積に応じて、右特異ベクトル方向の成分がインクリメントに加わることがわかる。ただし、特異値が1より小さい場合にはノイズが大きいとみなし、寄与を小さくする。
- この解の形より、以下のことなどが分かる。
  - インクリメントの構成に使われる特異ベクトルの数は、せいぜい $\min(\text{rank}(\mathbf{H}), \text{rank}(\mathbf{B}), \text{rank}(\mathbf{R}), \text{rank}(\mathbf{M}))$ である。
  - 不安定モードに対応する構造は取り出されやすい。
  - $\mathbf{R}$ と $\mathbf{B}$ そのものの大きさより、両者の比が重要である。

# 解説の流れ

- 平方根行列・特異値分解・逆問題のおさらい
- 4次元データ同化の解の導出
- 4次元データ同化の解の特異値分解
- 4次元データ同化の解の形からわかること

# 平方根行列・特異値分解・ 逆問題のおさらい

# 平方根行列

- $m \times m$ の誤差共分散行列は半正定値対称行列
- 半正定値対称行列(全ての固有値が非負)は、その性質から以下の通り固有値分解できる

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^T$$

- ここで正の固有値 $r$ 個の平方根を収めた対角行列  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_r^{1/2}$  とその逆数を収めた対角行列  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_r^{-1/2}$ ,  $r$ 個の正の固有値に対応する固有ベクトルからなる  $m \times r$ の行列 $\mathbf{C}_r$ を用いて、以下のように $\mathbf{A}^{1/2}$ と $\mathbf{A}^{-1/2}$ を定義できる。

$$\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{C}_r \hat{\mathbf{\Lambda}}_r^{1/2} \quad \mathbf{A}^{-1/2} = \hat{\mathbf{\Lambda}}_r^{-1/2} \mathbf{C}_r^T$$

# 特異値分解

- 任意の  $n \times m$  の行列  $\mathbf{G}$  を  $\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$  と分解できる。
- $\mathbf{U}=(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  で  $\mathbf{u}_i$  は左特異ベクトル。
- $\mathbf{V}=(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$  で  $\mathbf{v}_i$  は右特異ベクトル。
- $\mathbf{D}$  は対角行列  $\hat{\mathbf{D}}$  を用いて

$$\mathbf{D} = \begin{cases} (\hat{\mathbf{D}} \quad \mathbf{0}) & (n < m) \\ \hat{\mathbf{D}} & (n = m) \\ (\hat{\mathbf{D}} \quad \mathbf{0})^T & (n > m) \end{cases}$$

と表せる。 $\hat{\mathbf{D}}$  の要素は特異値と呼ばれ、本解説では簡単のため値が大きい順に並べる。

# 特異値分解（続き）

- 方程式 $\mathbf{d}=\mathbf{G}\mathbf{z}$ について $\mathbf{G}=\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ とする
- $\mathbf{u}_i$ と $\mathbf{v}_i$ はそれぞれ $\mathbf{d}$ と $\mathbf{z}$ の正規直交基底を成す

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \quad \mathbf{z} = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i$$

説明のため、 $p$ 番目までのベクトルが張る空間を $p$ 空間と呼ぶ。

- 正の特異値が $p$ 個( $p \leq \min(m, n)$ )のとき,  $p+1$ 番目以降のベクトルが張る空間をヌル空間という

$$\mathbf{z}_p = \sum_{i=1}^p \beta_i \mathbf{v}_i, \mathbf{z}_q = \sum_{i=p+1}^m \beta_i \mathbf{v}_i, \mathbf{d}_p = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i, \mathbf{d}_q = \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i$$

- $\mathbf{u}_i$ と $\mathbf{v}_i$ は $\mathbf{G}$ を通じて互いにつながっている

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \quad \mathbf{G}^T \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

# 順問題・逆問題とは？

- 定義
  - 入力変数ベクトル  $z$
  - 出力変数ベクトル  $d$
  - モデル(物理モデルとは限らない)  $G$
  - 残差  $e$
- 順問題  $d = Gz$
- 逆問題  $d = Gz + e$
- 後述するが、4次元データ同化は「可観測行列  $G$ 」と「時刻  $t$  の正規化したイノベーション  $d$ 」から「時刻  $0$  の正規化したインクリメント  $z$ 」を求める逆問題を設定し「ダンプ付き最小二乗解」と呼ばれる劣決定問題の解を与えることに相当する。



# 優決定・劣決定問題

- 逆問題  $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{e}$
- 優決定問題：出力から入力を完全に決定しうるモデルを用いている逆問題。
- 劣決定問題：優決定問題でない逆問題。
  - $\mathbf{d}$ の長さが $\mathbf{z}$ の長さに対して不足している。  
(データ同化ではこちらを想定する)
  - $\mathbf{d}$ の長さは $\mathbf{z}$ の長さに対して十分だが、解の構造を完全には復元できない。

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 1.0 \\ 2.0 & 2.0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

# 優決定問題の解：最小二乗解

- 逆問題  $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{e}$

- 最小二乗法

$$E = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{G}\mathbf{z} - \mathbf{d})^T (\mathbf{G}\mathbf{z} - \mathbf{d}) \text{ の最小化}$$
$$\rightarrow \mathbf{z} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}$$

- 補足：優決定問題ならば、 $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$  は存在する。

(証明) 優決定問題なら  $\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$  の  $\mathbf{v}_i$  の特異値に 0 がない。このとき、以下のように書ける。

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{V}^T$$

# 劣決定問題の解

- 劣決定問題：逆問題  $\mathbf{d} = \mathbf{Gz} + \mathbf{e}$  において $\mathbf{d}$ から $\mathbf{z}$ を決めるのに十分な情報が含まれていない。大きくわけて二つの解法がある。
  - 最小長さ解  $\|\mathbf{d}_p - \mathbf{Gz}_p\| = 0$  として $\mathbf{z}$ が $\mathbf{z}_q$ 方向に成分を全く持たない解を選択(下付き $p$ は正の特異値の個数)。
  - ダンプ付き最小二乗解：  $\mathbf{e}^T \mathbf{e} + \varepsilon^2 \mathbf{z}^T \mathbf{z}$  を最小とする解を選択 ( $\varepsilon^2$ はあるスカラー定数；データ同化の解は正規化した変数の空間で  $\varepsilon^2=1$  としていることに相当)

# 劣決定問題の解(1) : 最小長さ解

- 逆問題  $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{e}$

- 最小長さ解

$\mathbf{d}_p - \mathbf{G}\mathbf{z}_p = \mathbf{0}$  を満たしつつ、 $\mathbf{z}$ が $\mathbf{z}_q$ 方向に成分を全く持たない解

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}^{-I} \mathbf{d}$$

ここで $\mathbf{G}^{-I}$ は一般化逆行列であり、正の特異値 $p$ 個が収められた対角行列を $\hat{\mathbf{D}}_p$ として

$$\mathbf{G}^{-I} = \mathbf{V}_p \hat{\mathbf{D}}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T$$

- この解は特異ベクトルを使ってまとめると

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^p \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{d}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

$\mathbf{z}$ は( $p$ 空間を張る)  $\mathbf{v}$ の方向の成分の和で構成されている。

# 劣決定問題の解(2) : ダンプ付き最小二乗解

- 逆問題  $\mathbf{d} = \mathbf{Gz} + \mathbf{e}$
- ダンプ付き最小二乗解

$$J = (\mathbf{d} - \mathbf{Gz})^T (\mathbf{d} - \mathbf{Gz}) + \varepsilon^2 \mathbf{z}^T \mathbf{z}$$

を最小化する解

$$\rightarrow \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}} = 2 (\mathbf{G}^T \mathbf{Gz} - \mathbf{G}^T \mathbf{d} + \varepsilon^2 \mathbf{z}) = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{z} = \left( \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \varepsilon^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}$$

これは $\varepsilon \neq 0$ ならば必ず存在する。

- この解は特異ベクトルを使ってまとめると

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{\varepsilon_i^2 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{d}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

$\mathbf{z}$ は( $p$ 空間を張る) $\mathbf{v}$ の方向の成分の和で構成されている。

# 直観的イメージ(順問題)

- $n=m=2, p=1$ として、 $\mathbf{d}=\mathbf{Gz}$ を計算する場合は、



$\mathbf{z}$ は時刻0における正規化されたモデル変数の世界、  
 $\mathbf{d}$ は時刻 $t$ における正規化された観測変数の世界、  
 $\mathbf{G}$ は2つの世界をつなぐ演算子。

- 当然、 $\mathbf{u}_2$ 方向には $\mathbf{d}$ の成分は存在しない。

# 直観的イメージ(逆問題; 劣決定問題)

- $n=m=2, p=1$ として、 $\mathbf{d}=\mathbf{G}\mathbf{z}+\mathbf{e}$ を計算する場合は、



$\mathbf{z}$ は時刻0における正規化されたモデル変数の世界、  
 $\mathbf{d}$ は時刻 $t$ における正規化された観測変数の世界、  
 $\mathbf{G}$ は2つの世界をつなぐ演算子。

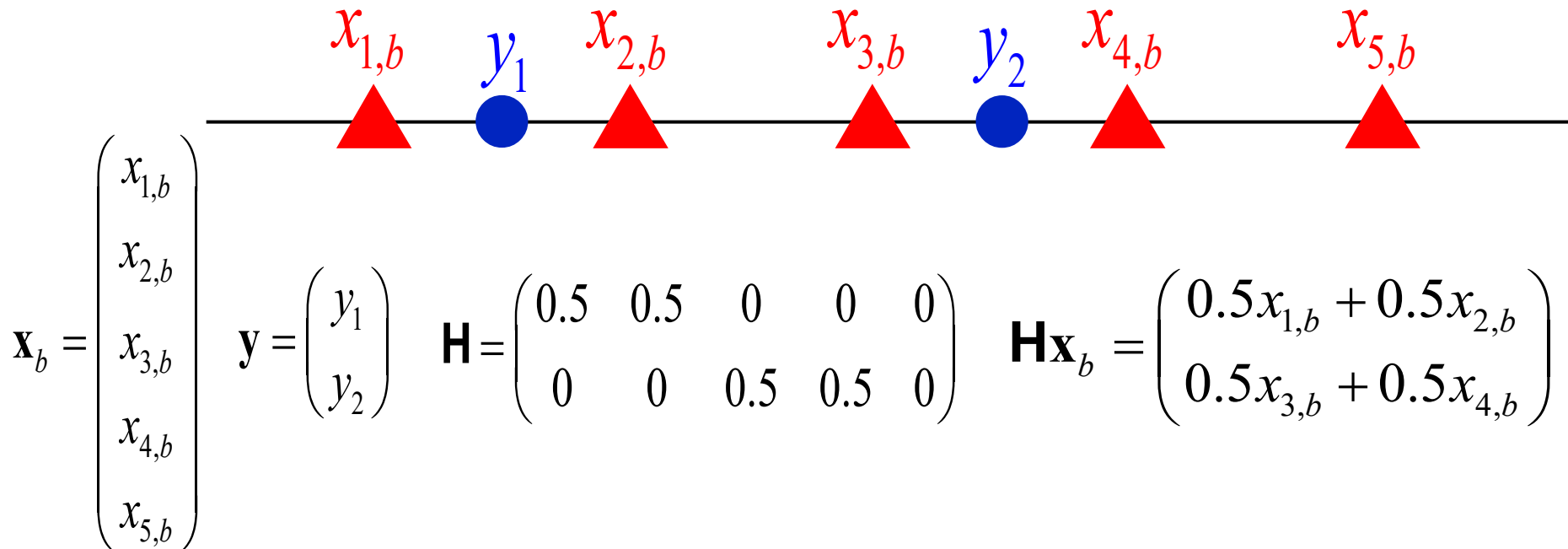
- $\mathbf{d}$ から $p$ 空間を張る $\mathbf{v}_1$ の成分の方向に $\mathbf{z}$ が得られる。

# 4次元データ同化の解の導出



# 変数の定義

- 解析値ベクトル  $\mathbf{x}_a$ , 背景値ベクトル  $\mathbf{x}_b$ , 観測値ベクトル  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{x}_a$  と  $\mathbf{x}_b$  の長さは格子点数  $\times$  変数の種類)
- 背景誤差共分散行列  $\mathbf{B}$ , 観測誤差共分散行列  $\mathbf{R}$ 。
- 観測行列  $\mathbf{H}$ : モデルの値を観測値と比較できるようにするための演算子(格子点内挿・変数変換など)。
- イノベーション  $\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b$ , インクリメント  $\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$



# 摂動の時間発展

- モデルの背景値が下記のように時刻0から時刻 $t$ まで時間発展することを考える。

$$\mathbf{x}_{b,t} = M(\mathbf{x}_{b,0})$$

- モデルの背景値の摂動 $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ の時間発展は

$$\mathbf{x}_{b,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{b,t} = M(\mathbf{x}_{b,0} + \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0})$$

から引き算して、テイラー展開の1次の近似を適用し

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{b,t} = M(\mathbf{x}_{b,0} + \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0}) - M(\mathbf{x}_{b,0}) \cong \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}_{b,0}} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0}$$

- $\mathbf{M} \equiv \partial M / \partial \mathbf{x}_0$ を時間発展演算子(接線形演算子)と呼ぶ。  
タイムステップごとに分けると $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{t-1} \dots \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_0$

# 4次元データ同化の定式化( $\mathbf{B}_0$ が正則)

時刻 $t$ の観測ベクトル $\mathbf{y}_t$ から時刻0のモデル変数 $\mathbf{x}_0$ を推定する

ベイズの定理の適用

& 観測誤差と背景誤差の無相関の仮定

$$p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{y}_t) = \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_0) p(\mathbf{x}_0)}{p(\mathbf{y}_t)}$$

以下の確率分布が正規分布に従うと仮定

$$p(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{B}_0|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{b,0})^T \mathbf{B}_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{b,0}) \right]$$

$$p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{R}_t|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t)^T \mathbf{R}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t) \right]$$

( $|\cdot|$ は行列式を表すものとする)

$$p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{y}_t) \propto \exp \left[ -\left( \frac{1}{2} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{b,0})^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{b,0}) + \frac{1}{2} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t) \right) \right]$$

次ページの代入・正規化を使うと

$$J = \tilde{\mathbf{z}}_0^T \tilde{\mathbf{z}}_0 + (\tilde{\mathbf{d}}_t - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{z}}_0)^T (\tilde{\mathbf{d}}_t - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{z}}_0) \text{ になる。}$$

$p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{y}_t)$  の最大化問題

$$J(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{b,0})^T \mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{b,0}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t)^T \mathbf{R}_t^{-1}(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t) \text{ の最小化問題}$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{b,0}) - \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1}(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t) = \mathbf{0}$$

整理

$$\mathbf{x}_{a,0} = \mathbf{x}_{b,0} + (\mathbf{B}_0^{-1} + \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t})$$

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t} = (\mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T) (\mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T)^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t}) \text{ を代入}$$

Mを両辺の左から作用させるとカルマンフィルタ系列の解と一致する。

$$\mathbf{x}_{a,0} = \mathbf{x}_{b,0} + \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T (\mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T)^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t})$$

イノベーションの定義  $\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t}$

インクリメントの定義  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_{a,0} - \mathbf{x}_{b,0}$

$$\mathbf{z}_0 = \left( \mathbf{B}_0^{-1} + \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \right)^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{d}_t$$

イノベーションの正規化  $\tilde{\mathbf{d}}_t = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{d}_t$

インクリメントの正規化  $\tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{B}_0^{-1/2} \mathbf{z}_0$

可観測行列の定義  $\mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \left( \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{d}}_t$$

可観測行列の特異値分解  $\mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

逆問題  $\mathbf{d} = \mathbf{G} \mathbf{z} + \mathbf{e}$  の  
ダンプ付き最小二乗解は  
 $J = \varepsilon^2 \mathbf{z}^T \mathbf{z} + (\mathbf{d} - \mathbf{G} \mathbf{z})^T (\mathbf{d} - \mathbf{G} \mathbf{z})$   
の最小化で得られる  
 $\mathbf{z} = (\varepsilon^2 \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}$   
なので、データ同化は  
逆問題と見なせる。

# 逆問題の解と4次元データ同化の解の対比

- 4次元データ同化の解は $\varepsilon^2=1$ としたダンプ付き最小二乗解と見なせる。

	最小長さ解	ダンプ付き 最小二乗解	4次元データ 同化の解
逆問題	$\mathbf{d} = \mathbf{Gz} + \mathbf{e}$	$\mathbf{d} = \mathbf{Gz} + \mathbf{e}$	$\tilde{\mathbf{d}}_t = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{e}$
解の導出	$\mathbf{d}_p - \mathbf{Gz}_p = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{z}_q$ 方向に成分なし	$J = (\mathbf{d} - \mathbf{Gz})^T (\mathbf{d} - \mathbf{Gz})$ $+ \varepsilon^2 \mathbf{z}^T \mathbf{z}$ の最小化	$J = (\tilde{\mathbf{d}}_t - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{z}}_0)^T (\tilde{\mathbf{d}}_t - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{z}}_0)$ $+ \tilde{\mathbf{z}}_0^T \tilde{\mathbf{z}}_0$ の最小化
解	$\mathbf{z} = \mathbf{G}^{-I} \mathbf{d} = \mathbf{V}_p \hat{\mathbf{D}}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T \mathbf{d}$	$\mathbf{z} = (\varepsilon^2 \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}$	$\tilde{\mathbf{z}}_0 = (\mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{d}}_t$
$\mathbf{G}$ の特異値 解析で分解	$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^p \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{d}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$	$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{\varepsilon_i^2 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{d}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$	$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$

$\tilde{\mathbf{d}}_t$ : 正規化されたイノベーション(= $\mathbf{R}_t^{-1/2}(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t})$ ),  $\tilde{\mathbf{z}}_0$ : 正規化されたインクリメント(= $\mathbf{B}_0^{-1/2}(\mathbf{x}_{a,0} - \mathbf{x}_{b,0})$ )  
 $\mathbf{G}$ : 可観測行列(= $\mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$ ),  $\lambda_i$ :  $\mathbf{G}$ の*i*番目の特異値,  $\mathbf{u}_i$  &  $\mathbf{v}_i$ :  $\mathbf{G}$ の*i*番目の左・右特異ベクトル

# 線形データ同化の定式化( $\mathbf{B}_0$ が正則でない場合に拡張)

モデル空間では  $\mathbf{B}_0^{-1/2}$ 、観測空間では  $\mathbf{R}_t^{-1/2}$  を掛けて、正規化を施す。

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{B}_0^{-1/2} \mathbf{x}_0 \quad \tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{y}_t$$

正規化された変数に対するベイズの定理  
& 観測誤差と背景誤差の無相関の仮定

$$p(\tilde{\mathbf{x}}_0 | \tilde{\mathbf{y}}_t) = \frac{p(\tilde{\mathbf{y}}_t | \tilde{\mathbf{x}}_0) p(\tilde{\mathbf{x}}_0)}{p(\tilde{\mathbf{y}}_t)}$$

以下の確率分布が正規分布に従うと仮定

$$p(\tilde{\mathbf{x}}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^r}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_{b,0})^T (\tilde{\mathbf{x}}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_{b,0})\right]$$

$$p(\tilde{\mathbf{y}}_t | \tilde{\mathbf{x}}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}}_t - \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t)^T (\tilde{\mathbf{y}}_t - \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t)\right]$$

最尤値を取る

可観測行列の定義  $\mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$

$$\tilde{J}(\tilde{\mathbf{z}}_0) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}_0^T \tilde{\mathbf{z}}_0 + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{d}}_t - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}_0)^T (\tilde{\mathbf{d}}_t - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}_0) \text{ の最小化}$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = (\mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{d}}_t$$

このままだと規格化された変数の世界のインクリメントなので、 $\mathbf{x}_{a,0} - \mathbf{x}_{b,0} = \mathbf{B}_0^{1/2} \tilde{\mathbf{z}}_0$  でモデル変数の世界のインクリメントに直す



# 可観測行列Gとは何か？

- $\mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$  は正規化された時刻0のインクリメントを正規化された時刻 $t$ のイノベーションと対比するための行列。
- いま考えているのは  $\tilde{\mathbf{d}}_t = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2} \tilde{\mathbf{z}}_0$  という状況。

正規化された時刻0のインクリメント  $\tilde{\mathbf{z}}_0$

$\mathbf{B}_0^{1/2}$  を左から作用 ↓

元の時刻0のインクリメント  $\mathbf{B}_0^{1/2} \tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{z}_0$

$\mathbf{M}$  を左から作用 ↓

元の時刻 $t$  のインクリメント  $\mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2} \tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{z}_t$

$\mathbf{H}_t$  を左から作用 ↓

元の時刻 $t$  のインクリメントを観測空間に対応させた値  $\mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2} \tilde{\mathbf{z}}_0$

$\mathbf{R}_t^{-1/2}$  を左から作用 ↓

元の時刻 $t$  のインクリメントを観測空間  
に対応させたのち正規化した値

$$\mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2} \tilde{\mathbf{z}}_0 = \tilde{\mathbf{d}}_t$$

# 特異値解析を用いた成分の分解

- 逆問題の解を

- ▶ 最小長さ解として求めると

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

- ▶ ダンプ付き最小二乗解として求めると

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

- ここに出てくる変数がどう決まるか？

- ▶ モデル変数と観測変数のマッピング  $\Rightarrow \mathbf{H}$

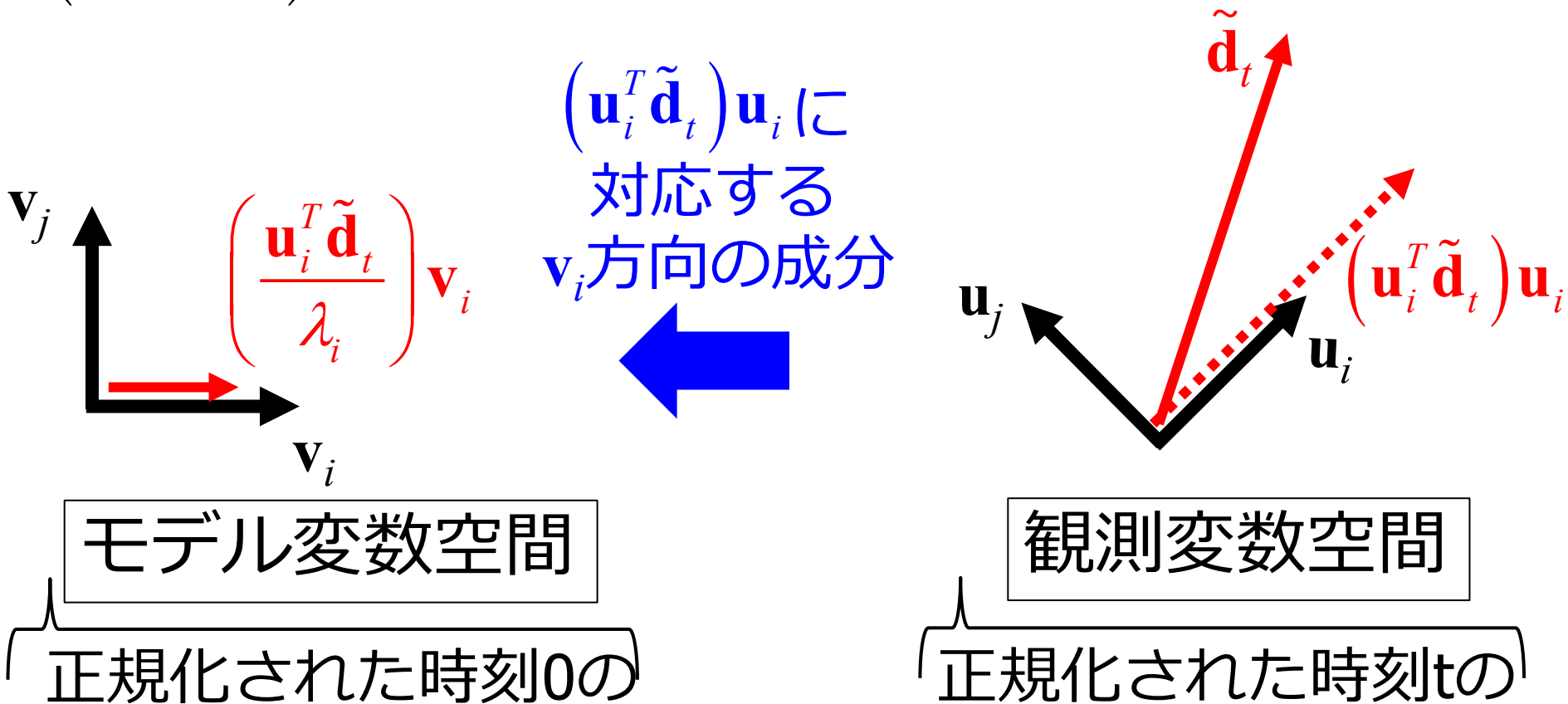
- ▶ 背景誤差共分散と時間発展演算子  $\Rightarrow \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \lambda_i$

- ▶ 観測値と背景値  $\Rightarrow \mathbf{d}_t$

- 共通している部分  $(\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t / \lambda_i) \mathbf{v}_i$  はどういうもの？

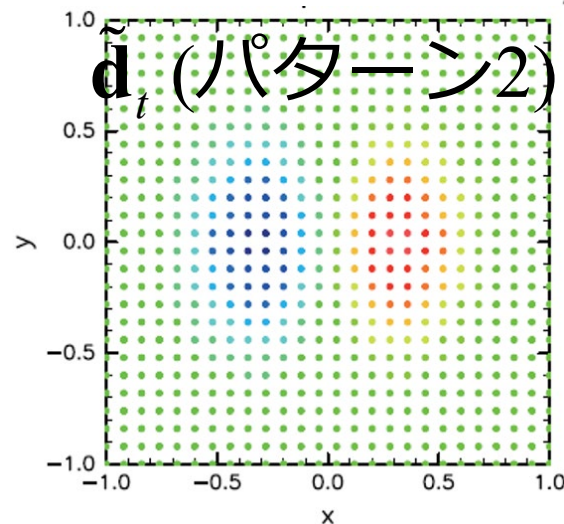
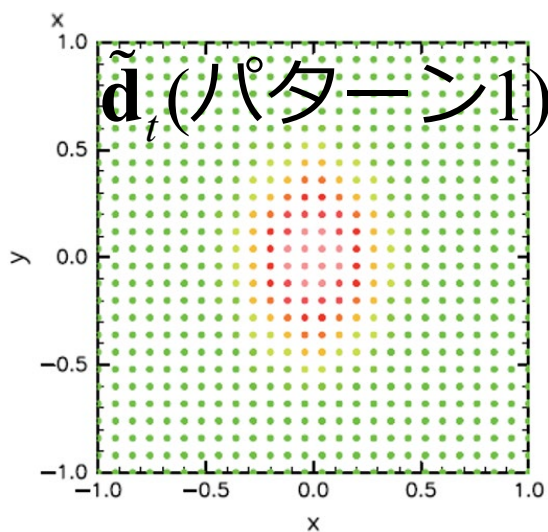
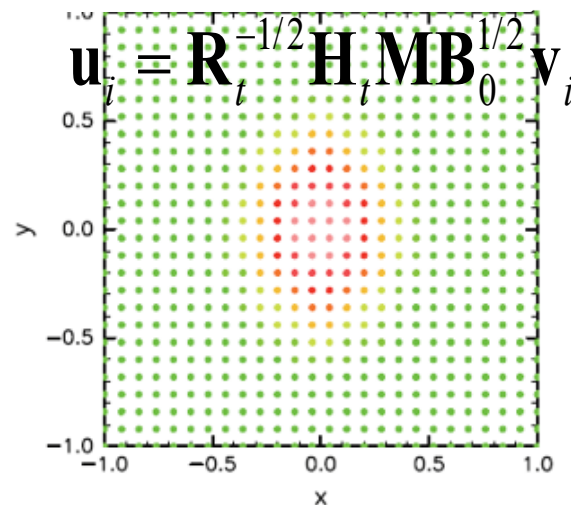
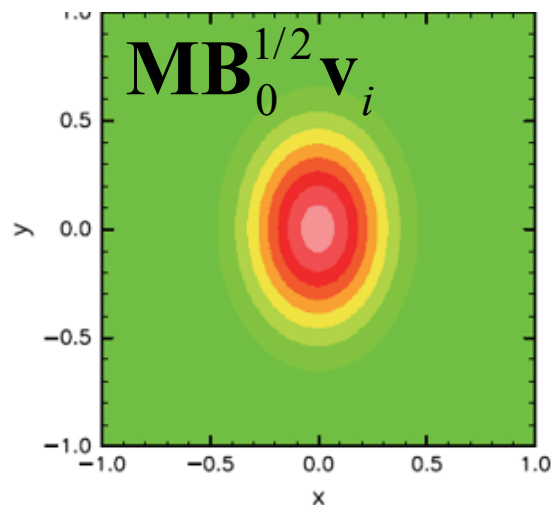
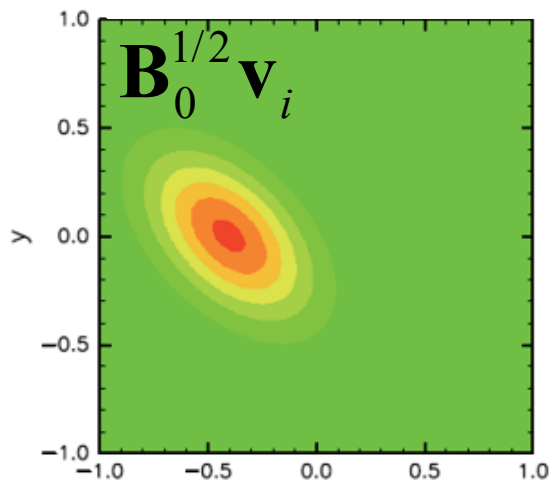
# $(\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t / \lambda_i) \mathbf{v}_i$ の解釈

- $\mathbf{G}=\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ は  $\tilde{\mathbf{z}}_0$ を  $\tilde{\mathbf{d}}_t$  に結び付ける行列。
- $(\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t) \mathbf{u}_i$  : イノベーションのうち  $\mathbf{u}_i$  方向の成分
- $(\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t / \lambda_i) \mathbf{v}_i$  :  $(\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t) \mathbf{u}_i$  を説明するインクリメント



# $(\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t / \lambda_i) \mathbf{v}_i$ の解釈 (物理空間上で)

- パターン1の  $\tilde{\mathbf{d}}_t \Rightarrow \mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t > 0 \Rightarrow \mathbf{z}_0$  に  $\mathbf{B}_0^{1/2} \mathbf{v}_i$  方向の成分有
- パターン2の  $\tilde{\mathbf{d}}_t \Rightarrow \mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{z}_0$  に  $\mathbf{B}_0^{1/2} \mathbf{v}_i$  方向の成分無



# 最小長さ解とダンプ付き最小二乗解の違い

- 最小長さ解は

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

- ダンプ付き最小二乗解は

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

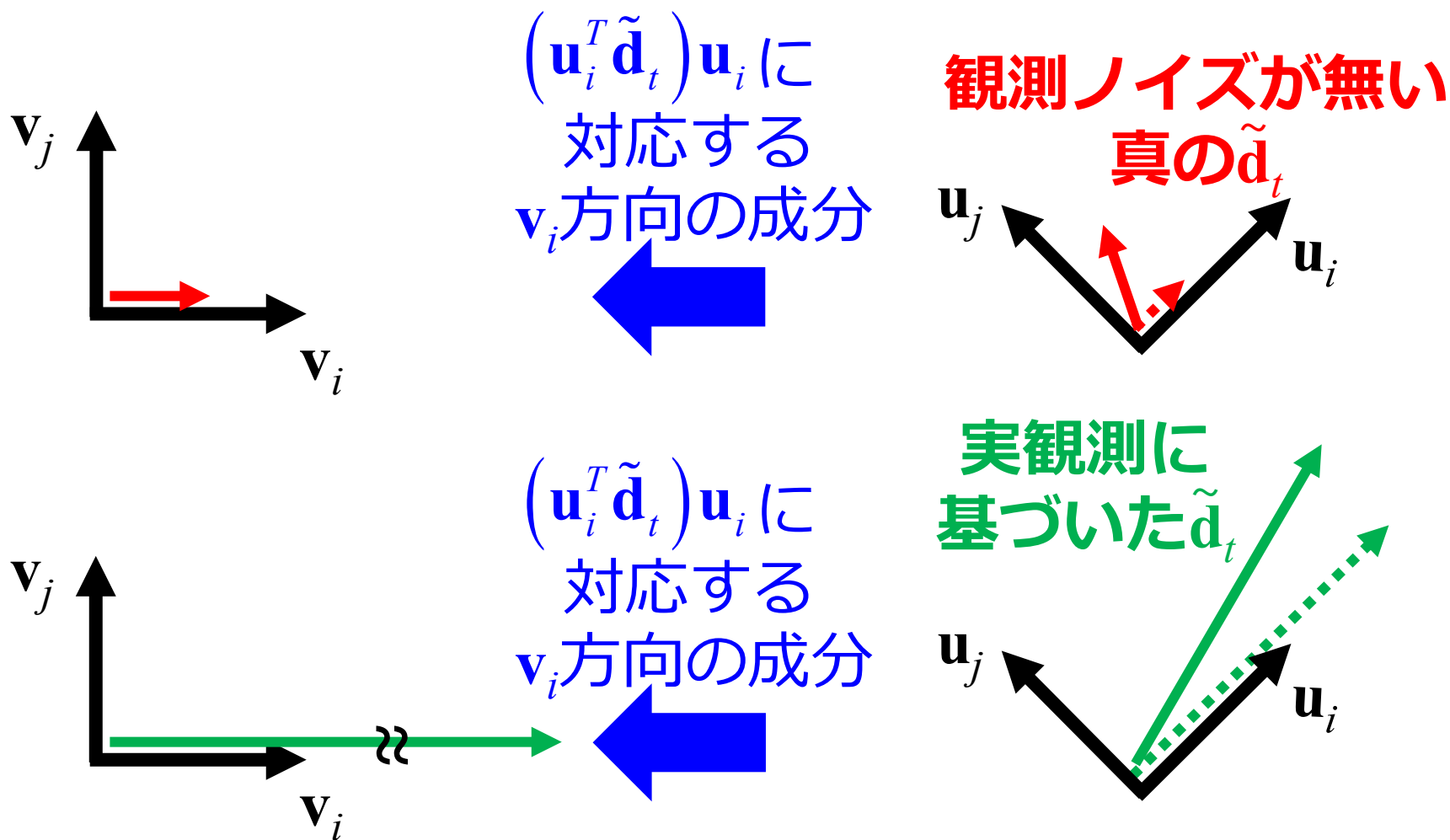
- 両者は  $\frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2}$  だけ異なる。

これを作用  
させることを  
Tikhonovの  
正則化と呼ぶ

- これは特異値 $\lambda_i$ が1に比べて十分小さいとき、対応する右特異ベクトル $\mathbf{v}_i$ 成分がダンプ付き最小二乗解にほとんど寄与しないことを意味する。

# なぜ $\lambda_i$ が小さいときに解に反映させない？

- $\tilde{\mathbf{d}}_t = \mathbf{R}_t^{-1/2} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t})$  には $O(1)$ のノイズがある。  
⇒観測ノイズを拡大して $\mathbf{z}_0$ に反映するおそれ



# $\tilde{\mathbf{z}}_0$ と $\tilde{\mathbf{d}}_t$ の関係に関する補足

- データ同化により解を得たとする。
- $\tilde{\mathbf{d}}_t$ のある2つ成分が同じ大きさのとき、 $\tilde{\mathbf{z}}_0$ の空間では特異値が1に近いほど大きくなる。
- 一方、逆問題により得られた $\tilde{\mathbf{z}}_0$ の*i*番目の成分について
  - 特異値が1より十分に大きい場合には、その $\tilde{\mathbf{z}}_0$ の成分を成長させると $\tilde{\mathbf{d}}_t$ の*i*番目の成分を良く説明する
  - 特異値が1より十分に小さい場合には、 $\tilde{\mathbf{z}}_0$ の成分が極めて小さく生成され、時間発展で成長させても、 $\tilde{\mathbf{d}}_t$ の*i*番目の成分の大きさにはならない。

# 4次元データ同化の解の形から わかること



# 4次元データ同化の解の性質(1)

解の構成に利用できる特異ベクトルの数は背景誤差分  
散・観測行列・ $\mathbf{M}$ のランクの小さいものに制約される

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad \mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$$

- 解の構成に使われるのはせいぜい  $\mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$  のランクまで（更に $\lambda_i$ の小さい方向には修正効かず）。
- 観測1個: インクリメントと $\mathbf{G}$ の唯一の $\mathbf{v}$ の向きが一致
- さらに $\mathbf{B}_0$ がフルランクでない場合には、そのランクよりも小さくなる。特に、アンサンブル摂動を使って単純に  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$  とする場合、アンサンブルメンバー数にも制約を受ける。  
(ただし、LETKFにおいては、別途考察する必要がある)

# 4次元データ同化の解の性質(2)

時間発展演算子 $\mathbf{M}$ を通じて成長する摂動は  
ダンプされにくく解の構成に使われやすい

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad \mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$$

- 簡単のため、全てのモデル変数に対応する観測が得られたと仮定する。また、観測誤差共分散と背景誤差分散は単位行列の定数倍であるとする。

$$\mathbf{R}_t = \sigma_o^2 \mathbf{I}, \mathbf{B}_0 = \sigma_b^2 \mathbf{I}, \mathbf{H} = \mathbf{I}$$

- この場合、 $\mathbf{G} = (\sigma_b / \sigma_o) \mathbf{M}$  となり、成長モード ( $\lambda_i$  が大きい $\mathbf{M}$ の特異ベクトル) はダンプされにくい。
- 全球大気モデルの例：傾圧不安定波(温帯低気圧)

# 4次元データ同化の解の性質(3)

観測誤差共分散が小さい、背景誤差分散が大きい  
⇒より多くの特異ベクトルが解に反映される

$$\tilde{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_t}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad \mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$$

- 例えば、 $\mathbf{R}$ の要素が全て1/100になったとする。  
⇒  $\mathbf{G}$ の定義より、特異値 $\lambda_i$ はすべて10倍になる。  
⇒  $\lambda_i$ が0(1)より大きな特異ベクトル方向に修正がかかるので、さまざまな方向に修正がかかる
- 同様に、 $\mathbf{B}$ の要素が大きくなった時もさまざまな特異ベクトル方向への修正がかかりやすくなる。
- $\mathbf{R}$ と $\mathbf{B}$ の比が大事。

# Lorenz63モデルを用いた4次元変分法

- $t=0.5$ の観測(1番目の要素のみ)から $t=0$ の状態推定
  - 真値  $\mathbf{x}_{true,0} = (-0.890, 0.496, 21.596)$
  - $\mathbf{B}=\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R}=10^{-4}\mathbf{I}$
  - 背景値  $\mathbf{x}_{b,0} = (-0.940, 0.446, 21.096)$
  - 時間発展した背景値  $\mathbf{x}_{b,t} = (-2.509, -4.982, 6.108)$
  - 観測値  $\mathbf{y}_t = (-0.487)$  (1番目の要素のみを観測)
  - イノベーション  $\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_{b,t} = (-0.487 - (-2.509)) = (2.021)$
  - 同化で得られた時刻0のインクリメント  
 $\mathbf{z}_0 = (0.0440, 0.0724, 0.0032)$  正規化後 202.1
  - 可観測行列の  $\lambda_i = 2.37 \times 10^3$ ,  $\mathbf{v}_i = (0.519, 0.854, 0.041)$
  - $\mathbf{z}_0$  と  $\mathbf{v}_i$  がほぼ平行で値は  $202.1 / 2.37 \times 10^3 = 0.085$  倍

# カルマンフィルタ系列の手法との対比

- ここで議論したインクリメントに時間発展演算子を作用させた $\mathbf{z}_t$ は時刻 $t$ におけるカルマンフィルタ系列のインクリメントに一致。

- また、カルマンフィルタ系列のインクリメント

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{B}_t \mathbf{H}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \mathbf{B}_t \mathbf{H}_t^T \right)^{-1} \mathbf{d}_t$$

について、出力 $\mathbf{d}_t$ とモデル $\mathbf{G} = \mathbf{R}_t^{-1/2} \mathbf{H}_t \mathbf{M} \mathbf{B}_0^{1/2}$ から入力 $\mathbf{z}_t$ を求める逆問題を解いていると考えてもよい。

( $\mathbf{z}_0$ を $\mathbf{z}_t$ ,  $\mathbf{B}_0$ を $\mathbf{B}_t$ ,  $\mathbf{H}_t \mathbf{M}$ を $\mathbf{H}_t$ で置き換えて変形)

⇒この場合でも、可観測行列の特異値解析でインクリメントを整理することができる。

# 可観測行列とその他の諸量の関係

- 解析誤差共分散行列

$$\tilde{\mathbf{A}}_0 = (\mathbf{I} + \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1}$$
$$\tilde{\mathbf{A}}_0 = \sum_{i=1}^p \frac{1}{1 + \lambda_i^2} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=p+1}^r \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T = \tilde{\mathbf{B}}_0 - \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$$

- 自己感度

$$\frac{\partial \mathbf{y}'_t}{\partial \mathbf{y}_t} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$$

- DFS

$$\psi = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2}$$

データ同化による誤差共分散の縮小は特異値 $\lambda_i$ が大きい方向には有効だが、小さい方向には効いていない。

⇒EnKFによるアンサンブル摂動は成長モードの方向を潰した傾向にあることを示唆する

# まとめ(伊藤・藤井, ながれ, 2020)

- 4次元データ同化の解は逆問題の解の一種とみなせる。
- その逆問題とは、可観測行列（モデル）と正規化された時刻 $t$ のイノベーション（出力）から、正規化された時刻0のインクリメント（入力）を求める問題である。
- 可観測行列は正規化・摂動の時間発展・モデル変数から観測変数へのマッピングを担う行列である。
- 可観測行列の特異値分解で、観測空間上の左特異ベクトルとイノベーションの内積に応じて、右特異ベクトル方向の成分がインクリメントに加わることがわかる。ただし、特異値が1より小さい場合にはノイズが大きいとみなし、寄与を小さくする。
- この解の形より、以下のことなどが分かる。
  - インクリメントの構成に使われる特異ベクトルの数は、せいぜい $\min(\text{rank}(\mathbf{H}), \text{rank}(\mathbf{B}), \text{rank}(\mathbf{R}), \text{rank}(\mathbf{M}))$ である。
  - 不安定モードに対応する構造は取り出されやすい。
  - $\mathbf{R}$ と $\mathbf{B}$ そのものの大きさより、両者の比が重要である。